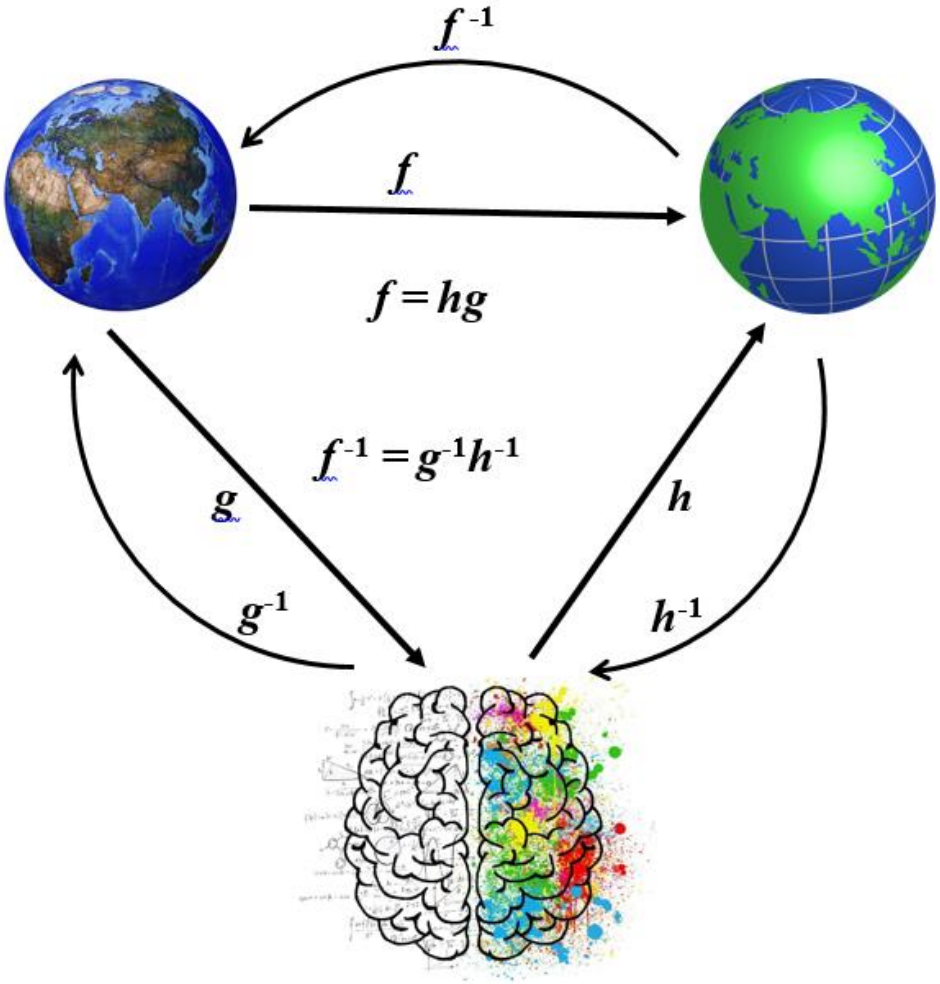
В.С. Кулабухов

Общий принцип изоморфизма: алгебраическая теория систем



МИР НАУКИ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

УДК 512:519.2:519.7:681.5
ББК 22.14:22.17:32.81:32.96:39.52
К 90

Рецензенты: Никульчев Евгений Витальевич – доктор технических наук, профессор, профессор РАО, профессор кафедры цифровых технологий обработки данных РТУ МИРЭА.

Каперко Алексей Федорович – доктор технических наук, профессор, профессор Департамента электронной инженерии Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики».

Кулабухов, Владимир Сергеевич
К 90 Общий принцип изоморфизма: алгебраическая теория систем. Монография. – М.: Мир науки, 2023. – Сетевое издание. Режим доступа: https://izd-mn.com/PDF/32MNNPM23.pdf – Загл. с экрана.

ISBN 978-5-907731-12-7
DOI: 10.15862/32MNNPM23

В книге изложена алгебраическая теория систем, опирающаяся на единый и единственный аксиоматический «первый принцип» - общий принцип изоморфизма. В первой части на языке морфизмов и вместе с тем в доступной форме вводится новая аксиоматика в математической теории систем и на ее основе разрабатывается фундаментальная научная парадигма, содержащая формализованное описание всех компонентов теории: базовых и производных понятий, теорем, следствий, «принципов» и «постулатов», ранее введенных в теории систем из эвристических соображений, методических примеров, а также примеров в области кибернетики, физики, биологии. Во второй части освещен широкий спектр приложений новой теории к разработке технологий автоматического управления одномерными и многомерными объектами, информационного обеспечения процессов управления, идентификации нелинейных объектов и построения интеллектуальных датчиков, интеграции систем, системного анализа и проектирования в авионике. Приведены результаты сравнительных исследований известных и новых методов управления. Дан обзор современного состояния и направлений развития математической теории анализа и синтеза систем на основе общего принципа изоморфизма.

Книга рассчитана на широкий круг ученых и читателей, интересующихся мировоззренческими проблемами естественных наук и общей теории систем, на специалистов научно-технического профиля, разрабатывающих интегрированные информационно-управляющие системы для динамических объектов, а также на преподавательский состав, научных сотрудников, аспирантов, соискателей ученых степеней и студентов высших учебных заведений.

ISBN 978-5-907731-12-7

© Кулабухов Владимир Сергеевич
© ООО Издательство «Мир науки», 2023

Оглавление

	Предисловие автора…..……...	**7**
Часть 1	**Общий принцип изоморфизма. Алгебраическая теория систем……**	**25**
Глава 1	Введение в алгебраическую теорию систем. Проблема реализации……..	29
Глава 2	Общий принцип изоморфизма в теории систем. Фундаментальная лемма и теорема о реализации…….....	35
Глава 3	Формализация базовых понятий теории систем……..	46
3.1	Определение системы. Простые и сложные системы ……	46
3.2	Следствия из принципа изоморфизма и определений систем……...	50
Глава 4	Алгебраический формализм общих свойств систем. Наблюдаемость системы с точностью до изоморфизма……..	80
Глава 5	Управляемость системы с точностью до изоморфизма …….....	94
Глава 6	Двойственность управляемости и наблюдаемости системы ……..	100
Глава 7	Контролируемость систем с точностью до изоморфизма ……..	103
Глава 8	Идентифицируемость и адаптируемость систем …….....	113
Глава 9	Интеграция систем с точностью до изоморфизма. Принцип суперпозиции	118
Глава 10	Теорема (принцип) разделения. Принцип модульности ……	123
Глава 11	Свойства интегрированных систем. Общий принцип относительности в алгебре ……	128
Глава 12	Определение обратных для отображений в типовых коммутативных диаграммах задач теории систем …….....	137
Глава 13	Очерк алгебраической теории обработки информации в системах. Закон сохранения информации …….....	151
13.1	Сжатие-восстановление информации с точностью до изоморфизма. Теоретические положения …….....	152
13.2	Системы сжатия-восстановления информации с точностью до изоморфизма. Методические примеры …….....	154
Глава 14	Обсуждение результатов. Заключение ……	173
14.1	Обсуждение результатов …….....	173

14.2 Заключение ……..... 188

Приложение к части 1. Доказательство основной леммы……... 192

Литература к Части 1 ……..... 197

Часть 2 Технологии системного анализа, обработки информации, синтеза управлений и системного проектирования в авионике на основе общего принципа изоморфизма ……... 203

Раздел 1 Технологии применения общего принципа изоморфизма в динамических системах……..... 205

Глава 1 Задача о регуляторе …… 205

1.1 Задача синтеза регулятора с точностью до изоморфизма. Вводные замечания …… 205

1.2 Задача синтеза регулятора. Теоретические положения ……..... 209

1.3 Прикладная технология синтеза изоморфных регуляторов ……... 214

1.4 Примеры синтеза и исследования изоморфных регуляторов ……... 231

1.5 Сравнительные исследования некоторых алгебраических методов формализованного синтеза регуляторов для следящих систем ……. 239

1.6 Обсуждение результатов, заключение ……..... 249

Литература к Главе 1 Части 2……..... 262

Глава 2 Синтез изоморфных регуляторов для исполнительных устройств систем управления ……..... 267

2.1 Синтез регулятора для газового привода на основе анализа экспериментальных данных …….. 267

2.2 Синтез изоморфного регулятора для позиционного привода с вентильным двигателем с использованием датчика углового положения ротора ……... 283

2.3 Синтез изоморфного регулятора для управления скоростью вращения вентильного двигателя ……..... 295

Литература к Главе 2 Части 2……. 307

Глава 3 О некоторых особенностях технологии синтеза изоморфных регуляторов для многомерных систем. Методические примеры ……..... 309

3.1 Предварительные замечания по синтезу регуляторов для линейных многомерных многосвязных объектов …… 310

3.2	Примеры синтеза регуляторов для линейных многомерных объектов ……	315
	Литература к Главе 3 Части 2…….	330
Глава 4	Технология синтеза изоморфных наблюдателей. Примеры ……..	331
4.1	Задача синтеза наблюдателя с точностью до изоморфизма. Вводные замечания ……	331
4.2	Задача синтеза наблюдателя. Теоретические положения ……...	333
4.3	Особенности синтеза наблюдателей для нелинейных объектов ……...	340
4.4	Технология синтеза линейных изоморфных наблюдателей ……..	344
4.5	Примеры синтеза и исследования изоморфных наблюдателей …….....	348
4.6	Задача коррекции. Синтез наблюдателя для гировертикали …….	353
	Литература к Главе 4 Части 2…….	375
Глава 5	Интеграция наблюдателя и регулятора информационно-управляющей системе …….....	377
5.1	Разделение и интеграция систем с точностью до изоморфизма ……	379
5.2	Анализ и синтез следящих интегрированных контуров управления ……	385
5.3	Линейные интегрированные следящие контуры управления …….....	394
	Литература к Главе 5 Части 2…….....	398
Глава 6	Способ и технология идентификации систем с точностью до изоморфизма	400
6.1	Способ идентификации моделей нелинейных систем и калибровка датчиков	400
6.2	Вариант технологии обучения и калибровки интеллектуальных инерциальных датчиков ……	407
	Литература к Главе 6 Части 2……	422
Глава 7	Современное состояние математической теории анализа и синтеза систем на основе общего принципа изоморфизма ……...	425
7.1	Развитие теоретических положений новой научной парадигмы в математической теории систем……...	428
7.2	Приложения общего принципа изоморфизма к анализу и синтезу систем управления ……..	438
	Литература к Главе 7 Части 2 ……	447
Раздел 2	Системное проектирование на основе общего принципа изоморфизма ……...	455

Глава 1 Системное проектирование как процесс деятельности по созданию искусственных целенаправленных систем. Способы интеграции систем……. 457

Глава 2 Эвристические подходы к интеграции систем. Содержательная формулировка телеоцентрического подхода……..... 465

Глава 3 Пример системного проектирования на основе телеоцентрического подхода. Концепция «ФИРМА»……..... 481

Глава 4 Алгебраический формализм стратификации систем и телеоцентрического подхода……..... 495

Глава 5 Алгебраический формализм проектирования сложных систем на основе ARP4754A ……..... 503

5.1 Содержательный анализ подхода к системному проектированию на основе руководства ARP4754A ……..... 503

5.2 Математическая формализация процедуры проектирования …… 506

5.3 Математическая формализации взаимосвязи подходов к проектированию … 513

Литература к Разделу 2 Части 2 ……..... 517

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

«Поверил Я алгеброй гармонию…»

А. С. Пушкин,
«Моцарт и Сальери»

В книге предлагается «свежий взгляд» на математическую теорию систем, опирающийся на новую, предложенную автором, аксиоматику. Главной и единственной аксиомой рассматриваемой в книге теории является *общий принцип изоморфизма*. Для уяснения предпосылок возникновения этого принципа обратимся к краткой справке о развитии математической теории систем.

Вопросам применения современных математических методов к моделированию объектов реальной действительности в форме «систем», а также к анализу и синтезу «искусственных систем», создаваемых человеком, уделяется очень большое внимание. Поискам удачных ответов посвящены тысячи публикаций, но проблема не снята и остается актуальной. Достаточно универсальная математическая формализация, объясняющая причины возникновения и проявления различных «системных феноменов», может иметь не только сугубо практическое, утилитарное, но и общенаучное, фундаментальное, мировоззренческое значение. Современная общая теория систем, сформировавшаяся первоначально классиками на уровне феноменологического осознания многих явлений и сущностей как «систем» [1-5], выделяющем и отражающем имеющиеся в этих сущностях общие признаки, к концу XX века приобрела устойчивые очертания применительно к предмету исследований – системам как таковым – и создала все необходимые предпосылки, по сути, уже настоятельно требовала дальнейшего обобщения, абстрагирования и формализации знаний о системах на уровне строгого математического описания [6-8].

Первые попытки формально-математического обобщения некоторых «принципов» и «постулатов» теории систем, характерных признаков систем как объектов исследования, были предприняты в конце 40-х годов прошлого венка. Возникли новые научные дисциплины, опиравшиеся на математическое описание и моделирование отдельных «принципов», проявлявшихся в системах живой и неживой природы. В связи с этим отметим кибернетику Норберта Винера [9], как науку об общих закономерностях процессов управления и передачи информации в машинах, живых организмах и обществе, появившуюся как раз в конце 40-х годов, а также теорию автоматического регулирования и теорию оптимального управления, опиравшиеся на «принцип обратной связи» и стремительно

развивавшиеся рядом выдающихся ученых в нашей стране и за рубежом с конца 50-х до 90-х годов. Здесь отдадим дань памяти академикам Н.Н. Красовскому [10], А.А. Красовскому [11, 12], Г.С. Поспелову [13], Л.С. Понтрягину [14], а также зарубежным ученым Р.Э. Беллману [15] и Р.Е. Калману [16-18]. Имена других выдающихся ученых в области теории автоматического регулирования фигурируют в списках литературы в соответствующих разделах и главах книги. Вспомним также возникшую практически одновременно с кибернетикой математическую теорию информации К.Э. Шеннона [19], существенный вклад в которую внесли Г. Найквист, а также А.Н. Колмогоров и В.А. Котельников.

Указанные научные дисциплины наряду с фундаментально-математическим обобщением знаний в соответствующих областях теории систем имели огромное практическое значение. Вместе с тем именно прикладная ориентированность не позволяла выявить в их рамках и формализовать более широкие, общесистемные, мировоззренческие аспекты и закономерности. Более того, Клод Шеннон, анализируя возможности широкого использования предложенной им теории информации в разных областях знаний, оценивал их весьма скептически: «Сознавая, что теория информации является сильным средством решения проблем теории связи (и в этом отношении ее значение будет возрастать), нельзя забывать, что она не является панацеей для инженера-связиста и тем более для представителей всех других специальностей. Очень редко удается открыть одновременно несколько тайн природы одним и тем же ключом. Здание нашего несколько искусственно созданного благополучия слишком легко может рухнуть, как только в один прекрасный день окажется, что при помощи нескольких магических слов, таких, как информация, энтропия, избыточность..., нельзя решить всех нерешенных проблем.» [19].

В настоящее время типовыми задачами, исследуемыми в современной теории систем применительно к технической кибернетике, являются задачи идентификации математических моделей объектов управления, синтеза наблюдателей и регуляторов, задачи контроля систем, а также задачи комплексирования и интеграции систем в «системы систем» - в интегрированные комплексы. Все эти задачи решаются с использованием большого разнообразия методов, опирающихся, как правило, на различные эвристические инженерные приемы, «подходы» и «постулаты», сформированные по результатам обобщения эмпирического опыта. Одним из самых известных, как указывалось, является постулат или принцип обратной связи в системах управления. Ничего плохого в этом, конечно, нет, тем белее, что указанные подходы, методы и постулаты позволяют успешно решать практические инженерные задачи. Однако возникает вопрос о научных предпосылках, основаниях возникновения и границах применения того или иного метода.

Кроме того, большое разнообразие методов, если не учитывать вкусовые предпочтения, с одной стороны, требует обоснования эффективности их применения по результатам сравнения при решении практических задач и, с другой стороны, вызывает классический «математический» вопрос о существовании и единственности решений указанных задач, а также о существовании некоторого наилучшего по совокупности критериев метода.

Одним из первых задался этим вопросом Р.Е. Калман в конце 50-х – начале 60-х годов прошлого века. Однако попытка Р.Е. Калмана, наоборот, максимально абстрагироваться от практики и построить на языке высшей алгебры достаточно общую «теорию реализации» систем на основе сформулированного им «принципа единственности» хотя и в достаточно частной, но вместе с тем фундаментальной задаче идентификации не привела к успеху, о чем он прямо заявил [18]. В дальнейшем работы видных ученых по математизации общей теории систем также не привели к заметным успехам - конструктивное решение, удовлетворяющее как фундаментальным интересам теории, так и утилитарным интересам практики, не было найдено. Из наиболее известных отметим в этой связи работу Месаровича М., Такахары Я. [20]. Вместе с тем исследования в области теории реализации продолжаются [21, 22].

До сих пор мы говорили лишь о системных проблемах кибернетики, причем в основном технической. Вместе с тем в настоящее время все больше исследователей и просто интересующихся природой бытия людей задумываются об общих мировоззренческих проблемах естествознания и, прежде всего, о проблемах существования и единственности некоторых фундаментальных основ, позволяющих объяснить явления и объекты реального мира и спрогнозировать их развитие с позиций цельности и единства, то есть, в конечном счете, с позиций общей теории систем.

В связи с этим растет количество мультидисциплинарных исследований, находящихся на стыке различных наук [23, 24], а также наблюдается тенденция к конвергенции наук и технологий [25, 26]. Например, в области физики и космологии ученые уже давно озабочены «кризисом» и поиском оснований для так называемой «теории всего» [27-29], объясняющей с единых позиций общую теорию относительности, а также теоретические основы и эффекты квантовой физики. В области наук о жизни, особенно в связи с пандемией коронавируса Covid-19, обострился интерес к объяснению явлений вирусной «активности», а также самого феномена жизни и проявлений (признаков) живого. Не ослабевает интерес и к поиску рациональных причин для объяснения феномена сознания у человека, являющегося наивысшей формой организации живого. Все это привело к возникновению и интенсивному развитию алгебраической биологии [30]. И в це-

лом актуальность исследований в области математической формализации различных аспектов существования и эволюции систем естественного происхождения в настоящее время существенно возросла.

Автор не является тонким специалистом во всех указанных областях и не проводил специальных исследований в попытке найти единое объяснение всему сущему. Вместе с тем результаты исследований в математической теории систем и в различных областях технической кибернетики, а также определенная эрудиция позволяют предположить, что у систем искусственного и естественного происхождения имеется определенная общая фундаментально-методологическая, «формально-математическая основа». Но прежде чем говорить о столь глобальных, мировоззренческих проблемах скажем несколько слов о том, в каком вообще отношении автор находится к математической теории систем.

В нашей стране на проблему единственности решений задач теории систем первым обратил внимание профессор В.Н. Буков. Им был предложен так называемый «принцип сопоставления изоморфизмов», на основе которого в дальнейшем была построена весьма развитая «теория вложения» [31-33], в рамках которой были предложены новые и достаточно рациональные решения многих из указанных выше классических задач теории систем.

Автору, с самого начала принимавшему участие в исследованиях проблемы единственности в рамках школы В.Н. Букова, наряду с исследованиями этой проблемы в задаче интеграции систем, была отведена негласная роль конструктивного критика решений различных задач, предлагавшихся участниками школы. В результате такой критической переоценки результатов исследований школы В.Н. Букова и результатов решения задачи реализации классиками, сформулировавшими проблему, автор выработал собственный взгляд на решение проблемы единственности решений задач теории систем.

Этот взгляд опирался на новую, предложенную автором в 1996 году, формулировку принципа единственности в форме «общего принципа изоморфизма», а также полученные на его основе формулировку и доказательство основной леммы и теоремы о реализации, которые рассматривались автором в качестве основополагающих утверждений в рамках формировавшейся новой парадигмы в математической теории систем. Критика коллег и выдвигавшиеся ими контрпримеры, которые, как потом оказывалось, лишь подтверждали рождавшуюся теорию, существенно замедляли темпы исследований, но были весьма полезными, так как требовали тщательной и многократной проверки доказательств и выводов.

Сказалась на темпах исследований и возникшая почти одновременно с науч-

ными дискуссиями служебная необходимость перехода автора в другое подразделение. Сотрудничество в рамках школы В.Н. Букова конечно продолжалось, но его интенсивность существенно снизилась. Вместе с тем в качестве положительного момента происшедших изменений следует отметить возросшую возможность проведения смелых самостоятельных исследований. Это ни в коем случае не умаляет достоинства школы и ее руководителя, общение с которыми было всегда полезным.

Дальнейшие исследования в рамках общего принципа изоморфизма продолжались автором фактически в одиночку. К тому же непрерывно возрастала административная нагрузка, содержание которой часто не совпадало с научными интересами автора. Это, конечно, существенно замедляло продвижение работы. Тем не менее исследования продолжались, публиковались статьи, состоялись выступления на многих конференциях как по теоретическим, так и по прикладным аспектам формировавшейся теории. Общие основы теории выдержали многочисленные проверки как со стороны математиков, так и со стороны ученых-прикладников. Возникавшие сомнения были развеяны, более детальная проработка задач математической теории систем в рамках общего принципа изоморфизма продолжалась и по прошествии более четверти века с момента открытия этого принципа можно уверенно констатировать, что на его основе сложилась новая теоретическая парадигма, позволяющая на единой формально-математической и методологической основе решать все указанные выше классические задачи технической кибернетики и математической теории систем.

Следует отметить, что термин «принцип изоморфизма» в последние годы стал все чаще и независимо использоваться специалистами в различных узких областях знаний для объяснения аналогий, подобия и идентичности тех или иных явлений [34-36]. Однако использование термина «принцип изоморфизма» было во многом интуитивным, опиравшимся на подобие неких внешних форм, например, одинаковых форм дифференциальных уравнений, описывающих динамику разных по природе объектов, явлений и систем, не вскрывавшим причин такого математического подобия [6].

Автор также независимо от других ученых, отталкиваясь от принципа единственности Р.Е. Калмана [18], первоначально ввел понятие и использовал термин «общий принцип изоморфизма» лишь применительно к различным аспектам своей предметной области – технической кибернетики [36-43]. Но с самого начала содержательная основа понятия «общий принцип изоморфизма» была автором математически строго формализована в соответствии с определением изоморфизма, принятым в современной алгебре. Вместе с тем с самого начала в математической формулировке принципа учитывались практические соображения. Так как исторически проблема единственности решений задач теории систем

анализировалась именно на языке морфизмов [18], в дальнейшем логика изложения требовала использования этого универсального и одновременно мощного алгебраического математического аппарата для вывода и объяснения утверждений теории. Кроме того, как показал опыт, именно алгебраический язык, как язык «математической философии», оказался наиболее адекватным для формализации основных положений общей теории систем В интересах практической интерпретации и прозрачности изложения все математические выкладки на языке морфизмов были снабжены пояснениями, позволяющими сделать применяемую математику интуитивно понятной для специалистов-прикладников и неподготовленного читателя. Иногда это делалось без полной математической детализации, но не в ущерб строгости и основной мысли изложения. Однако во всех случаях автор в своих публикациях давал ссылки на первоисточники, содержащие необходимые доказательства. Этому правилу автор следует и в книге и надеется, что «рафинированные» математики войдут в положение автора, пытавшегося донести свои мысли до возможно большего круга читателей, интересующихся различными предметными областями прикладных наук и естествознания.

Общий принцип изоморфизма, как базовое, единое и единственное исходное положение (аксиома) новой формально-математической парадигмы в теории систем, первоначально был сформулирован, как отмечалось, в рамках анализа проблемы существования и единственности решений некоторых типовых и достаточно частных задач математической теории систем и кибернетики [36-43]. Затем была обоснована общность этого принципа в отношении существенно большего разнообразия свойств систем [44-52]. В дальнейшем еще более широкий обзор и анализ научного ландшафта показал, что применение этого термина в разных науках вряд ли является случайным. Уже то, что этот термин начинает использоваться все чаще, говорит об общности того, что за ним скрывается в разных областях знаний.

Этим общим, на взгляд автора, и соответствующие утверждения в рамках разработанной математической теории это подтверждают, как раз и является универсальный «механизм» или способ реализации любого изоморфизма посредством построения (возникновения) специальных структур, обобщаемых понятием «система». При этом сам изоморфизм, рассматриваемый в качестве взаимно-однозначного отображения некоторых алгебраических структур, является средством формализации «цели» системы, ее «назначения», как заранее мыслимого результата «функционирования». В естественных системах цель возникновения и существования также имеется, но не проявляется явно, точнее не зависит от нас.

Относительно понятия «система» в общей теории систем уже сложился достаточно широкий консенсус (см., например, [1-8, 53-56]): главным признаком

системы считают нечто целое, состоящее из частей, причем такое целое, в котором проявляются новые свойства не только у системы в целом, но и у частей, отсутствовавшие у них до включения в систему. Признаки и «системные эффекты», проявляющиеся лишь у системы в целом и у элементов в системе, причем часто «неожиданно», объединяют понятием «эмерджентность». По большому счету *именно вскрытию универсального «математического механизма» возникновения «системных эффектов» и эмерджентности в системах разной природы на основе общего принципа изоморфизма посвящена предлагаемая читателю книга*.

Вывод о возможности применения введенного, или, вернее говоря, *открытого* автором общего принципа изоморфизма для объяснения со строгих формально-математических позиций *механизма возникновения и проявления в системах* самой разной природы наблюдающихся в них свойств и явлений, опирается на *представленные в книге результаты исследований применительно к системам, относящимся в большей части к проблематике технической кибернетики*. Вместе с тем автор дает некоторые ремарки и примеры из области биологии и физики, позволяющие интерпретировать полученные результаты в терминах этих наук и, вообще, создать мостики между предлагаемой теорией и естественными науками. Этому способствуют и *широко публикующиеся результаты исследований в области систем естественной природы*, которые *показывают, что они также хорошо ложатся в подготовленную почву разработанной теории и на ее языке могут быть интерпретированы с достаточной полнотой, точностью и прозрачностью*. В целом это позволяет говорить, что предлагаемая *книга представляет собой попытку построения неких «математических начал натуральной философии систем»*. Автор никак не соотносит себя с уровнем Ньютона и других «натуральных философов», но, тем не менее вполне здраво осознает значение общего принципа изоморфизма для «теории всего» в области системных исследований.

Необходимость (для мировоззрения и приложений) такой теории, как указывалось выше, давно назрела и, как представляется автору, *общий принцип изоморфизма дает возможность построения математической «теории всего» для систем*. Здесь помимо основной мировоззренческой проблемы, которую предлагаемая книга призвана решать, к сожалению приходится иметь в виду по крайней мере две «присоединенные проблемы»: первая связана с тем, что многочисленные «любительские», «научно-популярные» и, в целом, весьма поверхностные попытки «обнять необъятное» серьезно подмочили репутацию «теории всего» и на любые, даже серьезные исследования в этой области многие ученые смотрят

весьма скептически («утрата веры») – это отталкивает от подобных теорий квалифицированных физиков и математиков; вторая проблема связана с искусственной, часто излишней математизацией теории систем и ее приложений, например, теории управления, «чистыми математиками» без должного внимания к ее содержательному аспекту в физическом и даже философском смысле - вводятся надуманные аксиоматика и определения и на их основе строятся теории весьма общего характера, – что, в свою очередь, отталкивает ученых и специалистов по общей теории систем, технической кибернетике и инженеров-прикладников [12, 57]. Найти «золотую середину», отвечающую, с одной стороны, математической строгости и фундаментальности изложения и, с другой стороны, отражающей «естественные процессы», их физику, общепринятое системное и, в целом, философское понимание, весьма непросто. Автор пытался эту середину найти, «дозируя» математическую строгость и «популярность» изложения, сознательно сопровождая математические утверждения простыми методическими примерами, пространными комментариями и практическими «примерами из жизни». Было желание поместить в конце книги приложение, содержащее основные сведения из высшей алгебры, однако, по размышлении, это желание было отвергнуто, так как сама алгебра быстро развивается, формируются новые разделы, например, теория категорий, и даже в среде математиков многие понятия трактуются неоднозначно. Поэтому автор применял только достаточно устоявшийся и интуитивно понятный даже не математикам алгебраический формальный аппарат в части свойств алгебраических структур и отображений и дал ссылки на литературу в области алгебры (см., например, [59-63]), которой он пользовался и из которой читатель может почерпнуть все необходимые сведения.

Термин «теория всего» использован автором лишь в том смысле, в каком эффект эмерджентности относится к различным системам, по аналогии с таким термином, возникшим в физике, без претензий на всеобщий охват и объяснение вообще всех явлений, наблюдающихся в системах разной природы на разных уровнях их рассмотрения. При этом системы рассматриваются в книге на соответствующем макроуровне, безотносительно их масштабов и «истинных размеров», лишь применительно к изучению их свойств как целого с акцентами на свойства элементов до включения в систему и после такого включения.

В настоящее время уже не подлежит сомнению правильность сформулированных автором в рамках общего принципа изоморфизма положений и соответствующих теорем и следствий, так как они прошли неоднократное тщательное рецензирование при подготовке многочисленных публикаций, в том числе и в высокорейтинговых отечественных и зарубежных математических журналах, заслушивались на многих конференциях и семинарах, а также апробированы на

практике при решении различных прикладных задач [36-52]. Многочисленные ссылки на соответствующие работы в дополнение к указанным даются в тексте книги.

Несмотря на то, что общий принцип изоморфизма был введен автором из практических соображений, как бы искусственно, и применительно лишь к одной из задач теории систем – классической задаче идентификации, – на самом деле, по сути, он был именно *открыт* и с самого начала рассматривался *как общесистемный принцип.*

Последующий анализ показал возможность, целесообразность, а часто и *необходимость* применения общего принципа изоморфизма к решению сложных проблемных вопросов в других, помимо теории систем и кибернетики, научных дисциплинах, относящихся, например, к физике, космологии, системной биологии, а также к решению сложных слабо структурированных проблем в гуманитарной сфере и к другим приложениям общей теории систем. В этом смысле полученные результаты как раз позволяют говорить *о возможности создания* «*теории всего*» *для систем* разной природы, по крайней мере, при рассмотрении их «в большом», на макроуровне, характеризующем системы как целое. Достаточно очевидно и практика подтверждает, что этот «макроуровень» в различных задачах может быть разным (от отдельных живой клетки и вируса, до космологических систем масштаба Вселенной), но суть его при использовании на различных «этажах» познания систем произвольной природы остается единой.

В связи с этим вполне понятно, что первоначально как у самого автора, так затем и у его оппонентов и рецензентов это вызывало определенную настороженность. Так один из уважаемых журналов, несмотря на положительное заключение его научного редактора и двух из трех рецензентов «на всякий случай» не принял к печати серию представленных туда статей. Автору пришлось «сгладить» некоторые формулировки, касающиеся весьма общего характера предлагаемой теории и другие журналы опубликовали соответствующие статьи (см., например, [40-44, 50, 51]).

Последующие анализ и соотнесение с различными явлениями, наблюдаемыми в природе, в техносфере, в человеческом обществе, а также с существующими общепринятыми теориями, объясняющими эти явления и проверенными на практике, показали, что в основе весьма большого числа фундаментальных явлений и свойств систем лежит именно *общий принцип изоморфизма*, точнее, сформулированные и доказанные на основе этого принципа *основная лемма и теорема о реализации изоморфизма композицией отображений*.

Общий принцип изоморфизма может быть отнесен к категории так называемых *первых принципов,* на основе которых строятся и развиваются теории в различных научных дисциплинах (по выражению Аристотеля «первый принцип» это «первая основа, из которой известна вещь», Ab initio - лат. от начала) [58]. На нем основана весьма простая, внутренне непротиворечивая, достаточная, вполне очевидная, интуитивно понятная аксиоматика развиваемой алгебраической теории систем. Если же считать абсолютную *самоидентичность* любого объекта (явления) самому себе вполне очевидной, то в такой *сильной* в математическом смысле формулировке общий принцип изоморфизма становится настолько прозрачным и тривиальным, что *можно вообще говорить об отсутствии необходимости в какой-либо аксиоматике*. В связи с этим общий принцип изоморфизма является основным положением, на которое могут опираться как *междисциплинарные исследования в теории систем*, так и исследования систем в приложениях общей теории к отдельным дисциплинам.

В качестве примера укажем *системный анализ* или, как его часто называют, *системный подход* к решению так называемых «слабо структурированных», «неформализуемых» проблем. Существует достаточно много различных, на первый взгляд, способов решения слабо структурированных проблем, но все они, в конечном счете, сводятся именно к системному подходу, как универсальной методологии решения таких проблем. Этот подход, как часто кажется, не имеет отношения к математике и возник из чисто эвристических соображений на основе обобщения опыта решения многочисленных практических задач в «гуманитарной сфере».

Под «гуманитарной сферой» в широком смысле понимается обширная область знаний и практической деятельности людей, в которой как раз и возникают «слабо структурируемые» задачи и проблемы. Такие задачи, как правило, ставятся в форме весьма «размытых», качественных, вербальных формулировок и не поддаются строгой математической формализации как в плане постановки, так и в плане процедур решения. Сочетание слов «гуманитарная сфера» взято в кавычки потому, что, например, даже такая далеко не гуманитарная проблема, как *проблема системного проектирования* технических устройств и комплексов, не имела строгого формально-математического решения. Вместе с тем оказывается, что указанная проблема имеет на соответствующем макроуровне, в общем виде, строгое формально-математическое описание и его обоснование на языке общего принципа изоморфизма. И это показано в книге. Показано также, что *системный подход* в целом в качестве средства и способа решения «слабо структурируемых проблем» любой природы «возник не на пустом месте» и не случайно,

то есть не является некоторым надуманным искусственным приемом, а имеет объективную физико-математическую основу.

Вообще в природе и человеческом обществе, как особой ее части, не случайно выработалась *практика решения различных проблем* и разрешения соответствующих противоречий *путем создания определенных систем* в том формально-математическом смысле понимания термина «система», в каком дано его определение в рамках общего принципа изоморфизма [44]. В книге это поясняется на примерах решения практических задач и, более широко, проблем в технической кибернетике, в том числе проблем системного проектирования новых технических комплексов и информационно-управляющих систем для динамических объектов, а также приводятся отдельные примеры и интерпретации решения некоторых «проблем» в живой и неживой природе в терминах алгебраической теории систем, разработанной на основе общего принципа изоморфизма.

Любой фундаментальный результат, как правило, имеет фундаментальное значение в том смысле, что он порождает универсальный методический инструментарий весьма широкого функционального назначения, может быть, и даже часто, изначально не предполагавшегося. В этом смысле, опираясь на результаты исследований и вспоминая слова Клода Шеннона, приведенные в начале предисловия, автор высказывает надежду и даже определенную степень уверенности, что общий принцип изоморфизма окажется тем самым редким, «золотым», универсальным ключиком, который позволит «открыть одновременно несколько тайн природы», так как уже сейчас он позволил открыть некоторые «дверцы», скрывающие решения как фундаментальных, мировоззренческих проблем теории систем, к которым можно отнести, например, проблему возникновения эмерджентности и природу принципов «обратной связи» и «относительности», так и новые прикладные методы решения ее классических практических задач: идентификации моделей объектов, наблюдения, обработки информации в системах, синтеза регуляторов, контроля систем, комплексирования и интеграции систем в «системы систем» - в комплексы. Более того, общий принцип изоморфизма позволяет дать строгую научную интерпретацию применявшихся ранее эвристических «подходов», методов, приемов и принципов системного проектирования искусственных систем, а также дать научную формально-математическую интерпретацию «системного подхода», применяемого при решении слабо структурированных проблем и новое объяснение с позиций алгебраической теории возникновению и эволюции некоторых систем естественного происхождения.

В связи с высоким уровнем общности результатов, полученных в рамках новой алгебраической теории систем, возникает вопрос о ее соотношении с кибернетикой. Уже сейчас можно констатировать, что все типовые задачи, относящиеся, например, к технической кибернетике могут быть формализованы на языке рассматриваемой теории и решены ее методами. Другие ветви кибернетики и системного анализа, судя по примерам, приведенным в книге, также поддаются такой формализации. Это позволяет прогнозировать возрастание роли математических формализмов новой теории в системных, междисциплинарных исследованиях.

При чтении книги необходимо учитывать также важный нюанс. Может сложиться впечатление, что автор при введении общего принципа изоморфизма полностью игнорирует случайность («интервальность», «шумы») имеющихся данных об объекте (системе) и в дальнейшем строит теорию на основе чисто детерминистского подхода. Это не совсем так. Во-первых, случайность рассматривается автором как векторная, точнее, даже «многомерная закономерность»: любое «событие» есть точка пересечения «необозримого множества» следствий, каждое из которых обусловлено своей локальной причиной. В свою очередь это детерминированное, по сути, событие может стать одной из локальных причин нового «случайного» события и т.д. Соответствующие пояснения приведены в первой части книги. Во-вторых, введение «интервалов», точнее классов, на множестве данных, делает данные в пределах классов неразличимыми и позволяет стянуть данные в условные «точки», с которыми в дальнейшем можно оперировать как с точными данными (с точностью до классов). Такое моделирование случайностей (шумов) достаточно распространено. Единственность решений, о которой идет речь в книге, рассматривается именно с точностью до классов. Не исключается и «более тонкое» моделирование шумов, например, с использованием стохастических моделей, расширяющих пространства состояний соответствующих динамических систем. Важно лишь помнить, что эти стохастические модели по своей природе также являются детерминированными.

Автор надеется, что представляемая на суд читателя книга, впервые наиболее полно обобщающая результаты исследований в рамках алгебраической теории систем, опирающейся на общий принцип изоморфизма, будет не только интересной и познавательной в мировоззренческом плане, но и полезной в практической деятельности.

В книге изложена алгебраическая теория систем, опирающаяся на единый и единственный аксиоматический «первый принцип» - общий принцип изоморфизма.

Книга содержит две части. В первой части вводится новая аксиоматика, основанная на авторской трактовке известного принципа единственности в форме общего принципа изоморфизма, и на ее основе разрабатывается на языке морфизмов *новая алгебраическая теория систем*, содержащая формализованное описание всех основных понятий, фундаментальных мировоззренческих взглядов на системы и их свойства и ранее введенных в теории систем из эвристических соображений «принципов» и «постулатов». В целом первая часть посвящена изложению формально-математических основ новой научной парадигмы в теории систем, которая является внутренне замкнутой, не нуждающейся в привлечении каких-либо идей извне и в этом смысле цельной системой взглядов и теоретических утверждений, охватывающих и формализующих на языке современной алгебры и вместе с тем в доступной форме все составные компоненты теории: базовые и производные понятия, теоремы, следствия и методические примеры, а также примеры приложений в кибернетике, физике, биологии.

Вторая часть книги содержит два раздела. Первый раздел посвящен демонстрации возможностей теории применительно к решению различных прикладных задач технической кибернетики и управления динамическими системами. Соответствующие приложения доведены до уровня технологий. Во втором разделе рассматривается применение теории к формализации процедур системного проектирования. В целом во второй части освещен широкий спектр приложений новой теории к разработке технологий автоматического управления одномерными и многомерными объектами, информационного обеспечения процессов управления, идентификации нелинейных объектов и построения интеллектуальных датчиков, интеграции систем, системного анализа и проектирования в области авионики летательных аппаратов. Приведены результаты сравнительных исследований известных и новых методов управления. Дан обзор современного состояния и направлений развития математической теории анализа и синтеза систем на основе общего принципа изоморфизма.

Каждая часть книги содержит специальную главу, посвященную обсуждению полученных результатов.

В силу того, что книга предназначена не только, а может быть даже и не столько для математиков, хотя для них весьма интересным и неожиданным может оказаться «*принцип относительности в алгебре*», сколько для специалистов в области собственно теории систем и ее приложений в различных областях естествознания, автор посчитал необходимым снабдить математические утверждения и выкладки достаточно пространными комментариями.

Следует иметь в виду, что автор склонен к рефлексии и не рассматривает книгу как окончательное решение проблемы математической формализации теории систем. Скорее это, как указано выше, некоторые «математические начала натуральной философии систем». В дальнейшем вполне возможно переосмысление и/или уточнение некоторых положений изложенной теории. Вполне возможно, что читателями будут выявлены неточности и ошибки, за которые автор заранее приносит извинения. Отчасти автора оправдывает то, что он не является «чистым математиком» – автор инженер, занимавшийся прикладными вопросами теории систем в технической кибернетике, лишь в силу необходимости (наличия проблем в глубоком теоретическом обосновании применявшихся практических методов и эвристик) пришедший к осознанию целесообразности и полезности применения алгебраических методов для решения возникавших задач и к последующему их обобщению на собственно системы, как объекты исследований, то есть развитие автора в области теории систем шло от частного к общему.

В книге каждый параграф несет отпечаток целого смыслового содержания рассматриваемой теории и сам привносит нечто в целое, в общий смысл. Поэтому желательно прочитать ее всю, целиком, хотя бы «по диагонали».

Автор надеется, что книга будет полезна студентам старших курсов и аспирантам высших учебных заведений различного профиля, специалистам-разработчикам в области системного анализа, обработки информации и синтеза управлений в системах, а также специалистам, исследующим фундаментальные мировоззренческие проблемы и практические приложения теории систем в различных областях естествознания.

Автор выражает искреннюю благодарность В.Н. Букову, привлекшему его внимание к фундаментальной проблеме единственности решений некоторых задач теории систем; В.В. Булгакову, Ю.Б. Кулифееву, Б.О. Качанову, Н.А. Туктареву, оказавшим существенную помощь в отработке прикладных технологий применения общего принципа изоморфизма в задачах управления динамическими объектами и обработки информации; руководителям АО МНПК «Авионика» А.А. Углову, В.Ф. Заецу, Р.Р. Абдулину и всем коллегам, благоприятствовавшим творческой работе; Евстратовой Н.Ю. за большую помощь в подготовке иллюстраций.

Литература к Предисловию:

1. *Богданов А.А.* Тектология: Всеобщая организационная наука. М.: «Финансы», 2003, 287 с.
2. *Ludwig von Bertalanffy* The Theory of Open Systems in Physics and Biology// Science 13 January 1950 111: 23-29 [DOI: 10.1126/science.111.2872.23] (in Articles).
3. *Берталанфи Л. фон* Общая теория систем: основы, развитие, приложения. Нью-Йорк: Джордж Бразиллер. 1968. (von Bertalanffy, Ludwig. 1968. General System Theory: Foundations, Development, Applications New York: George Braziller)
4. *Берталанфи Л. фон* Общая теория систем — критический обзор. В кн.: Исследования по общей теории систем. Сборник переводов. М.: «Прогресс», 1969.
5. *Берталанфи Л. фон* Общая теория систем — обзор проблем и результатов. // Системные исследования. Ежегодник. М.: «Наука», 1969. 203с.
6. *Рапопорт А.* Принцип математического изоморфизма в общей теории систем // Системные исследования. Ежегодник. М.: «Наука», 1973. С.158-172.
7. *Уемов А.И.* Методы построения и развития общей теории систем // Системные исследования. Ежегодник. М.: «Наука», 1973. С.147-157.
8. *Урманцев Ю.А.* Общая теория систем: состояние, приложения и переспективы развития // Система, симметрия, гармония. М.: Мысль, 1988.
9. *Норберт Винер* Кибернетика или управление и связь в животном и машине. Второе издание. М.: Советское радио, 1968. 328 с.
10. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М., 1968.
11. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А.А.Красовского. М.: Наука, 1987.
12. *Красовский А.А.* Проблемы физической теории управления // АиТ. 1990. №11. С. 3-28.
13. *Красовский А.А., Поспелов Г.С.* Основы автоматики и технической кибернетики. М.—Л., 1962.
14. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. 2-е изд. М.: Наука, 1969. 384 с.
15. *Беллман Р.* Процессы регулирования с адаптацией. М.: Наука, 1964. 360 с.
16. *Калман Р.* Об общей теории систем управления. Труды 1 Конгресса ИФАК. М.: Изд. АН СССР, т. 2. 1961. С. 521–547. [Kalman R.E. On the General Theory of Control System //Proc. of 1st IFAC Congress, Moskow, 1960.]
17. *Калман Р., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971.

18. *Калман Р.Е.* Идентификация систем с шумами // УМН. 1985. Т. 40. Вып.4 (244). С. 27-41.
19. *Шеннон К. Работы* по теории информации и кибернетике. М.: Изд. иностр. лит., 1963. С. 667-668; первоисточник: Shannon C., The Bandwagon, Trans. IRE, IT-2, № 1 (1956), 3
20. *Месарович М., Такахара Я.* Общая теория систем: математические основы. М.: Мир, 1978.
21. *Уильямс, Роберт Л., II; Лоуренс, Дуглас А.* Linear State-Space Control Systems. John Wiley & Sons, 2007, С. 185. ISBN 9780471735557.
22. *Тангирала, Арун К.* Принципы системной идентификации: теория и практика. CRC Press, 2015, С. 96. ISBN 9781439896020.
23. URL: https://zen.yandex.ru/media/the_world_is_not_easy/obnovlennaia-karta-bolshogo-vzryva-v-nauke-xxi-veka-6148875a165f3a1c9b361098 (Дата доступа - 14.04.2023 г.)
24. URL: https://www.art-sciencefactory.com/complexity-map_feb09.html (Дата доступа - 14.04.2023 г.)
25. *Ковальчук М.В.* Конвергенция наук и технологий – прорыв в будущее // Российские нанотехнологии. 2011. №1-2.
26. *Пригульный А.Г.* Конвергенция научного знания и технологий — системообразующие экономические процессы в эпоху постиндустриализма // Экономика и управление. 2012. №3 (77). С. 25-30.
27. Методологический кризис современной физики. URL: https://pandia.ru/text/78/009/72942.php?ysclid=lgfm7y7ety655427990 (Дата доступа - 14.04.2023 г.)
28. URL: https://habr.com/ru/articles/514430/ (Дата доступа - 14.04.2023 г.)
29. *Стивен Хокинг* Теория всего; пер. с англ. Е. В. Шимановская. М.: АСТ, 2018. 160 с.
30. URL:https://nphys.ru/images/for_news/algebraicheskaya_biologiya_i_teoriya_sistem_tezisy.pdf (Дата доступа - 14.04.2023 г.)
31. *Буков В.Н., Кулабухов В.С., Максименко И.М., Рябченко В.Н.* Проблема единственности решения задач теории систем // АиТ. 1997. №12. С. 4-17.
32. *Буков В.Н., Кулабухов В.С., Максименко И.М., Рябченко В.Н.* Вложение систем // АиТ. 1999. №8. С. 61-73.
33. *Буков В.Н.* Вложение систем. Аналитический подход к анализу и синтезу матричных систем. Калуга: Изд-во научн. литературы Н.Ф. Бочкаревой, 2006. 720с.
34. *Кирсанов К.А.* Теория изменений: от общих понятий к принципу изоморфизма // Интернет-журнал «Науковедение» №1, 2012, С. 1-18.

35. *Пугач В.Н.* Интеллектуальные системы: от принципа изоморфизма к меметическим представлениям // Интернет-журнал «Науковедение» №1, 2011.
36. *Кулабухов В.С.* Алгебраические аспекты некоторых свойств сложных систем // В сборнике научно-методических материалов: Управление техническим состоянием авиационного оборудования. М.: Изд. ВВИА им. Н.Е.Жуковского, 1998. С. 107-118.
37. *Кулабухов В.С.* Принцип изоморфности в теории систем // Международная конференция по проблемам управления (29 июня-2июля 1999г.). Тезисы докладов в 3-х томах. Том 1. ИПУ РАН. Москва. 1999г.
38. *Кулабухов В.С.* Принцип изоморфности в задаче реализации и его приложения к анализу свойств систем управления // XII Всероссийск. совещ. по проблемам управления ВСПУ-2014. Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2014. С. 438-448.
39. *Кулабухов В.С.* Теория реализации и ее приложения к моделированию систем // Моделирование авиационных систем. Матер. Всероссийской науч-но-практической конф. М.: Изд. ГНЦ РФ ФГУП ГосНИИАС, 2013. С. 13-14.
40. *Кулабухов В.С.* Синтез регуляторов для следящих систем на основе принципа изоморфности // Мехатроника, автоматизация, управление. 2017. Том 18, №8. С. 507-515.
41. *Kulabukhov V.* Linear Isomorphic Regulators // CMTAI2016. MATEC Web of Conf. 2017. Т. 99. С. 03008. (doi:10.1051/matecconf/20179903008)
42. *Кулабухов В.С.* Изоморфные наблюдатели состояния и робастная фильтрация сигналов систем // Радиотехника. 2017. №8. С. 50-55.
43. *Kulabukhov V.S.* Isomorphic observers of the linear systems state // Workshop on Materials and Engineering in Aeronautics (MEA2017) 15–16 November 2017, Moscow, Russian Federation. doi:10.1088/1757-899X/312/1/012016. p. 012016.
44. *Кулабухов В.С.* Общий принцип изоморфизма в теории систем // Cloud of Science. 2018. Т.5. №3. С. 400-472.
45. *Кулабухов В.С.* Алгебраическая формализация процедур анализа и синтеза сложных интегрированных систем // 6-я Международная конференция “Авиация и космонавтика – 2007”. 1-4 октября 2007г. Москва. Тезисы докладов. М.: Изд-во МАИ, 2007.
46. *Кулабухов В.С.* Некоторые результаты алгебраической теории телеоцентрического системного проектирования аэрокосмических эргатических комплексов // Системный анализ и управление аэрокосмическими комплексами. 6-я международная конф.: тезисы докладов (Евпатория, 02.07–08.07.2001 г.).
47. *Кулабухов В.С.* Технологии системной интеграции комплексных систем управления полетом перспективных летательных аппаратов // Авиационные

системы в XXI веке. Юбилейная Всероссийская научно-техн. конф. сб. тезисов докладов. (Москва, 26–27 мая 2016 г.) М. : ФГУП «ГосНИИАС», 2016.
48. *Кулабухов В.С.* Алгебраическая формализация телеоцентрического подхода к системному проектированию // Научные чтения по авиации, посвященные памяти Н. Е. Жуковского: мат. XV Всероссийской научно-технической конф. М.: Изд. дом Академии им. Н. Е. Жуковского, 2018. С. 279–287.
49. *Кулабухов В.С.* Вариант формализации системного анализа и синтеза структур авионики и систем управления полетом // Тезисы докладов 9 Международного Аэрокосмического Конгресса IAC'18. Москва, 28–31 августа 2018 г. М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, 2018. С. 12860.
50. *Kulabukhov V.* Algebraic Formalization of System Design Based on a Purposeful Approach // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 476 (2019) 012017. doi:10.1088/1757-899X/476/1/012017
51. *Vladimir S. Kulabukhov* A General Principle of Isomorphism: Determining Inverses // Symmetry 2019, 11, 1301; doi:10.3390/sym11101301.
52. *Кулабухов В.С.* Некоторые результаты теории интеграции бортового оборудования аэрокосмических эргатических систем // Третий Международный аэрокосмический конгресс. IAC'–2000: сборник тезисов, (Москва, 23–27 августа 2000 г.). М., 2000.
53. *Острейковский В.А.* Теория систем. М.: Высш. шк., 1997. 240 с.
54. *Жилин Д.М.* Теория систем: опыт построения курса. - Изд. 2-е, испр. М.: Едиториал УРСС, 2004. 184 с.
55. *Волкова В.Н., Денисов А.А.* Основы теории систем и системного анализа. Изд. 2-е, перераб. и дополн. СПб.: Издательство СПбГТУ, 1999. 512 с.
56. *Артюхов В.В* Общая теория систем: Самоорганизация, устойчивость, разнообразие, кризисы. Изд. 2-е. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. 224 с.
57. *Филимонов Н.Б.* Методологический кризис «всепобеждающей математизации» современной теории управления // Мехатроника, автоматизация, управление. 2016. Т. 17. №5. С. 291-300.
58. *Аристотель* Этика. Эстетика. Поэтика. Минск: Харвест, 2011. 1280 с.
59. *Кострикин А.И.* Введение в алгебру. Основы алгебры. М.: Физматлит, 1994.
60. *Мальцев А.И.* Алгебраические системы. М.: Наука, 1970. 392 с.
61. *Курош А.Г.* Общая алгебра. М.: Наука, 1974.
62. *Гротендик А.* О некоторых вопросах гомологической алгебры. М.: ИЛ, 1961.
63. *Родин А. В.* Теория категорий и поиски новых математических оснований физики // Вопросы философии. 2010. № 7. С. 67-81.

Отыщи всему начало,
и ты многое поймёшь!

Козьма Прутков

Часть 1

Общий принцип изоморфизма. Алгебраическая теория систем

В первой части книги изложена *новая математическая парадигма в теории систем*, являющаяся, по сути, фундаментально-алгебраической и в этом смысле наиболее общей «теорией всего» для «систем» любой природы, *опирающаяся на единый и единственный для всей теории общий принцип изоморфизма*.

Теория является замкнутой в себе, внутренне непротиворечивой, самодостаточной и цельной (как и сама Природа в целом!) в том смысле, что этого единственного принципа оказалось достаточно как для весьма общей алгебраической формализации самого понятия *«система»* и производных от него понятий, так и формализации *наиболее общих «системных свойств»*, характерных для *«объектов-систем»* реального мира безотносительно их природы и материальной основы, а также для достаточно абстрактных формально-математических, алгебраических, информационных, программных и других *«нематериальных», но вместе с тем вполне реальных систем*, являющихся, например, предметами разработки и исследований в сфере «чистой» математики и теоретической физики, а также в сфере информационных технологий.

Первоначально общий принцип изоморфизма появился исходя не из умозрительного теоретизирования, а в результате глубокого, по сути, фундаментального анализа принципов решения классических и во многом типовых задач «технической кибернетики», предметная область которой являлась областью приложений инженерных и научных интересов автора. Множество постулатов, эвристик и соответствующих инженерных приемов, сформированных и теоретически обобщенных по результатам эмпирического опыта, на которые приходилось опираться, например, при решении задач синтеза и идентификации математических моделей объектов управления, а также задач синтеза наблюдателей и регу-

ляторов для этих объектов, заставляло задуматься *о существовании и единственности* некоторых «абсолютных» и «наиболее совершенных» в каком-либо смысле или, другими словами, фундаментальных решений этих задач.

Вполне естественно, что ученые-классики, основоположники теоретической и технической кибернетики также задумывались над фундаментальной проблемой существования и единственности решений соответствующих задач. Однако, как они сами считали, конструктивное решение проблемы так и не было найдено. Так применительно к задаче построения и идентификации математических моделей исследуемых объектов по некоторым доступным данным о них, то есть *применительно к задаче реализации*, как ее называли в классической литературе, Р. Калманом был сформулирован *принцип единственности*. Однако, как признавал Р. Калман, на основе введенного принципа не удалось не только доказать, но и просто сформулировать *теорему реализации*. Возможно связано это было с тем, что сам Р. Калман и другие ученые, обращавшиеся к указанной проблеме, были в первую очередь «чистыми» математиками, теоретиками и им не приходило в голову посмотреть на нее с практической точки зрения. Вместе с тем алгебраический подход, который был использован Р. Калманом и его последователями, оказался очень полезным, так как содержал универсальный инструментарий, позволивший в дальнейшем с весьма общих позиций проанализировать не только изначально поставленную задачу реализации, но и другие фундаментальные задачи теории систем.

Автору этой книги, являющемуся по образованию и по роду основной деятельности в первую очередь инженером, пришла счастливая мысль взглянуть как на проблему в целом, так и на принцип единственности в частности, с практической, по сути, с «физической» точки зрения. И именно из практических соображений автором и была введена *новая математическая интерпретация известного принципа единственности в задаче реализации - в форме общего принципа изоморфизма*. *Это дало возможность в общем виде сформулировать и доказать фундаментальную лемму и теорему о реализации изоморфизма композицией отображений*.

На основе общего принципа изоморфизма и леммы в дальнейшем была сформирована новая единая фундаментально-математическая основа, формализующая сложившиеся теоретические и проверенные практикой «естественно-физические» взгляды на системы различной природы, то есть, по сути, *была предложена новая парадигма в теории систем*.

Парадигма позволила, *исходя из введенной новой аксиоматики*, по-новому переопределить все основные понятия теории систем (модель, абстрактная система, простая, сложная, большая система) и формализовать фундаментальные свойства систем и критерии их обеспечения. Так *по-новому, с точностью до некоторых изоморфных моделей*, были определены понятия и критерии свойств наблюдаемости, управляемости, контролируемости, идентифицируемости систем, интеграции систем в «системы систем», называемые «комплексами» или «комплексными системами». Указанные свойства обычно анализируются применительно к искусственным целенаправленным системам, создаваемым человеком в рамках «технической кибернетики». Вместе с тем эти свойства носят «общесистемный характер» и в рамках разработанной парадигмы, как показали последующие исследования, могут быть достаточно ясно интерпретированы применительно к любым «естественным системам», встречающимся в природе.

Таким образом, коренная перестройка математической теории коснулась не только искусственных целенаправленных систем различного назначения, создаваемых человеком для удовлетворения собственных нужд и потребностей, но и теории, позволяющей по-новому интерпретировать возникновение и эволюцию систем естественного происхождения, относящихся к живой и неживой (косной) материи и природе в целом. По сути *была построена некая всеобщая формализованная «метатеория всего» для любых «систем», удовлетворяющих простейшей аксиоматике, опирающейся на единственный «первый принцип» - общий принцип изоморфизма*.

В рамках парадигмы в самом общем формально-математическом смысле обоснованы новые взгляды на детерминизм и случайность, на проявления системного эффекта (эмерджентности), на принцип относительности и принцип суперпозиции в математической теории систем безотносительно их природы.

Парадигма также позволила формализовать условия интеграции искусственных систем в «системы систем» - «системы-комплексы» - и проанализировать свойства интегрированных систем. Рассмотрены формально-математические основы синтеза интегрированных информационно-управляющих систем для динамических объектов, имеющих важное прикладное значение. На основе обобщения принципа суперпозиции получены доказательства теоремы разделения и определены условия разрешимости задачи дуального управления для линейных и нелинейных интегрированных систем. *В целом общий принцип изоморфизма и являющийся его следствием обобщенный принцип суперпозиции позволили оперировать с «изоморфными системами» или системами, построенными*

на изоморфизмах, как с обычными линейными системами, что существенно упростило все процедуры их анализа и синтеза.

Первая часть книги посвящена изложению *новой фундаментальной парадигмы в математической теории систем*, позволяющей формализовать все основные понятия и свойства систем произвольной природы на основе *единого и единственного принципа - общего принципа изоморфизма*.

Глава 1

Введение в алгебраическую теорию систем. Проблема реализации

Изначально формально-математическая формулировка общего принципа изоморфизма была дана применительно к искусственным целенаправленным системам, рассматриваемым в «технической кибернетике» и создаваемым человеком для решения задач управления динамическими объектами и обработки информации *на основе построения математических моделей* таких объектов. В качестве исходной точки при фундаментальном анализе принципов решения указанных задач была рассмотрена именно *задача построения и идентификации математических моделей* соответствующих физических объектов, поскольку весь последующий синтез процедур обработки информации, управления и, вообще, процесс *системного проектирования* опирается на эти модели. В литературе соответствующая *задача построения математических моделей* реальных объектов по некоторой доступной информации о них или, как говорят, *по некоторым данным*, известна под названием «*задача реализации*» [1, 2]. При этом соотнося понятия «информация» и «данные», как правило, полагают, что информация представляет собой определенным образом *упорядоченные, структурированные данные*.

Анализ этой, казалось бы, достаточно локальной и «частной» классической задачи с акцентом на проблему существования и единственности соответствующих решений и с учетом практических аспектов построения моделей привел к обоснованию введения и строгой математической формулировке *главной и единственной аксиомы развиваемой теории в форме общего принципа изоморфизма*.

В дальнейшем оказалось, что соответствующие *формулировки общего принципа изоморфизма* и сделанные на его основе формально-математические утверждения (теоремы) *имеют гораздо более общий, фундаментальный характер*, охватывающий не только системы искусственного происхождения, и что их можно и нужно обобщить на системы естественного происхождения. То есть соответствующая новая фундаментальная формально-математическая парадигма в теории систем развивалась по индукции, от частного к общему, отталкиваясь от практики создания искусственных «кибернетических» систем и все более концентрически расширяясь на системы естественного происхождения произвольной природы. Такой процесс развития теории хорош уже тем, что теория с самого начала тщательно проверяется на решении различных частных практических задач и рассмотрении частных примеров и постепенно расширяет сферу приложений как в сугубо

практической области применительно ко все более широкому многообразию проблем прикладной теории систем, так и применительно ко все большим теоретическим обобщениям в рамках *абстрактной теории систем*, позволяющей распространить соответствующие выводы и утверждения на системы произвольной природы, то есть, по сути, придать этим утверждениям всеобщий, фундаментальный характер.

Таким образом, первоначально новая парадигма в теории систем возникла применительно к искусственным системам, создаваемым человеком для своих нужд. Актуальность разработки фундаментальных основ качественного анализа и синтеза систем целенаправленного управления различными динамическими объектами была обусловлена их важным мировоззренческим и прикладным значением. Одной из таких прикладных «технических» и вместе с тем фундаментальных мировоззренческих проблем является *проблема существования и единственности решений задач теории систем*, которая в наиболее общем виде была поставлена в работах [1-3]. Указанная проблема имеет большое значение также в теоретической физике и в математике. Начало фундаментального формализованного анализа этой проблемы положено в работах [1, 2], где она сформулирована в виде *принципа единственности в задаче реализации* (идентификации) с использованием понятия изоморфизма. Суть проблемы реализации состоит в построении системы (модели), объясняющей, то есть реализующей - по терминологии работ [1, 2] - некоторые данные о каком-либо объекте реальности (см. рис. 1.1). Система в работах [1, 2] рассматривается в весьма узком смысле, как синоним модели.

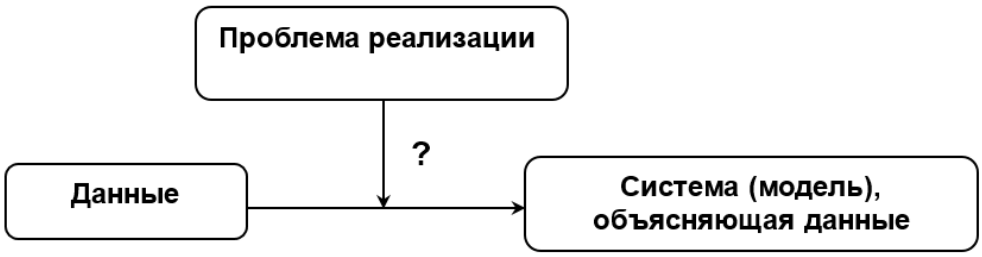


Рис. 1.1. Проблема реализации

Таким образом в самой общей постановке рассматривается задача построения и идентификации некоторой модели, наиболее полно учитывающей и обобщающей имеющиеся данные о каком-либо исследуемом объекте и наиболее точно им отвечающей. По сути такая *модель является средством отражения в концентрированной форме доступной информации об объекте*, то есть упорядочения имеющихся о нем данных. Если такую модель удается построить, то есть если устанавливается факт, что *модель существует*, то далее рассматривается вопрос о ее единственности. Вообще говоря, в [1, 2] *существование моделей не доказывается*, а предполагается по умолчанию. Применительно к рассматриваемой *проблеме реализации* в работе [1] был сформулирован принцип единственности.

Принцип единственности в задаче реализации (моделирования, идентификации) гласит [1]: «*Если данные*

(1) *точные и*
(2) *полные,*

то существует одна и только одна минимальная система (*математическая модель*), *воспроизводящая эти данные. Иными словами, все минимальные объяснения указанных данных представляют собой изоморфные модели*». И далее [1]: «Систему (модель), воспроизводящую имеющиеся данные, часто называют *реализацией*». Отметим, что «понятие минимальной реализации, для которой пространство состояний имеет минимальную размерность» [2], является одним из фундаментальных понятий, лежащих в основе «теории абстрактной реализации» [2] и, в целом, «алгебраической теории линейных систем» [2]. В качестве вывода в [1] отмечается, *что общая теорема о реализации, соответствующая принципу единственности, не сформулирована и не доказана*, так как (см. рис. 1.2) не определены математически строго понятия «данные» *U* и *Y*, «система», «полнота данных» и «точность данных», то есть не решена проблема формализации понятий. Приведенные в [1] тривиальные частные случаи теоремы о реализации, для которых она считается доказанной, не решают проблему в целом.

Рис. 1.2. Проблема формализации понятий

Дальнейшему исследованию проблемы единственности решения задач теории систем посвящены работы [4-14]. В [4] применительно к проблеме единственности решения задач теории систем сформулирован новый принцип – *принцип сопоставления изоморфизмов*. В его основу положена идея работы [3] о том, что модель системы должна доопределяться внешним образом с целью достижения ее единственности.

При этом *под единственностью понимается принадлежность модели или решения строго определенному подмножеству или классу эквивалентности*, то есть *под единственным решением понимается множество неразличимых в каком-либо смысле решений и понятие единственности не исключает существования некоторого множества равноценных или неразличимых решений в рамках*

одного класса эквивалентности [4]. Использование понятия классов эквивалентности (или понятия допустимых разбиений на классы эквивалентности) позволяет по-новому и в более корректной форме ставить и решать задачи теории систем применительно к объектам с различными алгебраическими особенностями. Рассматриваются отображения:

$$f{:}U\to Y,\ u \mapsto fu,\ u\in U,\ fu\in Y, \qquad f^{*}{:}U\to Y,\ u \mapsto f^{*}u,\ u\in U,\ f^{*}u\in Y.$$

Формулировка принципа сопоставления изоморфизмов [4, 5]: на основе поэлементного совпадения пар множеств на входе (прообразов) U и на выходе (образов) Y суждение о тождественности отображений f и f^* можно вынести только для изоморфных отображений, таких, что $f \equiv f^* \iff f \cong f^*$, где $\cong$ есть знак изоморфизма отображений.

В соответствии с этим принципом для корректного сопоставления систем их отображения (модели) должны быть приведены к изоморфному виду. Если f - не изоморфизм, то следует осуществить его внешнее доопределение так, чтобы доопределенное отображение стало изоморфизмом. При этом авторы работы [4] признают, что использование процедуры внешнего доопределения ведет к осознанной подмене исходной задачи, но такая подмена равносильна корректно сформулированным допущениям, обеспечивающим с их учетом ее разрешимость в ряде практически значимых случаев.

Принцип сопоставления изоморфизмов занимает центральное место в предложенном авторами работы [4] подходе к проблеме единственности решения задач теории систем. На его основе к настоящему времени сложилась хорошо развитая теория вложения систем [7-9], в общем случае многосвязных и имеющих некоторые алгебраические особенности (обусловленные неизоморфностью исходных моделей), в односвязные (а значит, заведомо изоморфные) системы-образы. На основе теории вложения в постановочном плане проанализированы многие классические задачи теории систем [4-9] (моделирование, идентификация, контроль систем, наблюдение состояния, регулирование с обратной связью, функциональная интеграция систем). Для некоторых задач получены достаточно конструктивные с точки зрения практики решения [8, 9].

Вместе с тем принцип сопоставления изоморфизмов не устраняет проблемы формализации понятий «система», «полнота данных» и «точность данных», «минимальное объяснение данных», а также, в целом, не содержит формулировки и доказательства общей теоремы о реализации и, следовательно, не решает проблемы, выявленные в [1]*, а также не позволяет получить единственные в смысле* [4-9] *решения указанных выше* классических задач *в их исходной*

постановке (без редукции моделей с использованием вложения в односвязные изоморфные системы-образы).

Ниже *рассматривается предложенная в работах* [6, 10-12] *новая формулировка принципа единственности в форме общего принципа изоморфизма*, которая, на взгляд автора, позволяет разрешить как возникшие мировоззренческие проблемы, так и проблемы, обусловленные трудностями решения часто встречающихся прикладных задач теории систем *в их исходной постановке*.

Как и в [1, 2, 4-14] *изложение ведется на языке отображений и морфизмов*, поэтому здесь на теории морфизмов останавливаться не будем. Отметим лишь, что теория морфизмов изложена, например, в [8, 14, 15]. В частности, под изоморфизмами понимаются взаимно однозначные (биективные) отображения на упорядоченных множествах [16] и на алгебраических структурах [14, 15], сохраняющие операции. Изоморфные алгебраические структуры тождественны по своим алгебраическим свойствам [15]. Язык алгебраической теории морфизмов («геометрический подход») использован и в известной работе М. Уонема [17] применительно к описанию линейных многомерных систем управления. Вообще весьма универсальный «язык морфизмов» интенсивно развивается в рамках *алгебраической теории категорий* и все шире начинает использоваться в различных приложениях применительно к формализованному описанию наиболее общих, то есть *абсолютно идентичных с точностью до некоторых изоморфизмов*, аспектов поведения систем различной природы. *Достоинством «языка морфизмов» является его удивительная способность переводить мировоззренческое описание явлений природы с классического языка философских категорий на строго формализованный и не менее красивый язык современной математики, вершиной которой является высшая алгебра с ее теорией категорий*, к основателям которой, наряду с МакЛейном и Эйленбергом, относится А. Гротендик [82]. Не случайно теория категорий рассматривается в качестве кандидата в числе новых возможных математических оснований физики [83].

Исходя из приведенного выше определения изоморфного отображения, содержательную основу понятия «данные» в простейшем случае составляют упорядоченные множества с определенными на них операциями. Такими множествами, как показано в последующих главах и примерах, в задачах управления и наблюдения линейных систем являются матрицы (алгебра матриц, как алгебраическая структура), в биологии – множества генов, упорядоченные в структурах ДНК (дезоксирибонуклеиновой кислоты) и «работающие» по своим правилам, в задачах идентификации систем – множества (векторы) действительных (вещественных) чисел на входе и выходе системы.

Работая над этой книгой и используя наиболее общий язык современной математики, каким является «язык морфизмов», автор надеялся, что она послужит мостиком между «философией систем» и «математикой систем». В этом смысле книга посвящена изложению новой философско-математической парадигмы в области анализа и синтеза систем на основе предложенного общего принципа изоморфизма и содержит, по существу, начала новой математической философии систем.

Указанная парадигма содержит цельную систему взглядов на системы и принципы их исследования и синтеза, а также некоторый общий подход к анализу их свойств и *опирается на прозрачную, минимально необходимую с точки зрения математики и строго обоснованную с точки зрения практики аксиоматику*. Это полностью согласуется и с «естественным» принципом максимальной простоты и минимальной достаточности («наименьшего действия»), прямо проявляющимся в эволюции природы.

Рассматриваемые результаты получены в процессе актуальных в настоящее время *многодисциплинарных исследований* на стыке кибернетики, общей и математической теории систем, системного анализа, современной теории автоматического управления, теоретической физики, философии и других научных дисциплин, например, биологии, с учетом обобщения практического опыта разработок различных систем. Общей фундаментальной основой формализации этих результатов являются бурно развивающиеся разделы современной высшей алгебры, опирающиеся на понятия морфизмов и вообще отображений, задаваемых на множествах и алгебраических структурах.

Глава 2

Общий принцип изоморфизма в теории систем. Фундаментальная лемма и теорема о реализации

Периодически возобновляющаяся дискуссия об излишней математизации современной теории управления [18, 19] затрагивает также проблему оценки необходимости и адекватности применения сложного математического аппарата к решению широкого круга современных задач теории систем. Часто применение громоздкого и сложного математического аппарата для решения практических задач бывает излишним и «искусственным». Однако *поиск наиболее общего и универсального подхода* к решению всей совокупности классических задач теории систем вполне объективно и обоснованно обусловил необходимость применения современного строго формализованного аппарата высшей алгебры [1, 2, 4-14]. Вместе с тем можно согласиться с мыслью автора работы [18] о необходимости рационального «сочетания инженерной направленности с обновляющимся математическим аппаратом». В этом смысле с практической точки зрения формулировку принципа единственности, данную в [1], следует уточнить. Дело в том, что, наблюдая поведение системы как «черного ящика» (вход и выход), априори неизвестно, полные ли и точные ли данные о системе мы имеем. Кроме того, как указывалось и в самой работе [1], весьма сложно формально определить сами понятия «полнота» и «точность» данных. В связи с этим нужно исходить из тех данных, которые имеются. Поэтому, как мне представляется, *целесообразно ввести новую математическую формулировку принципа единственности в форме ниже следующего общего принципа изоморфизма.*

Общий принцип изоморфизма в теории систем: *если существует такое минимальное в смысле* [1, 2] *отображение* (*модель*) *f, которое однозначно* (*изоморфно*) *объясняет некоторые данные о системе, то*

a) с точностью до модели-изоморфизма f эти данные являются полными и точными – имеет место изоморфизм данных;

b) модель f единственна в том смысле, что если существуют другие минимальные изоморфные модели-объяснения тех же данных, то эти модели-объяснения изоморфны модели f – имеет место изоморфизм моделей.

Другими словами, изоморфизм наблюдается в обе стороны:

во-первых, как взаимно-однозначное преобразование друг в друга данных *U* и *Y* («изоморфизм вдоль» отображения) - изоморфизм модели-отображения *f*, который назовем *изоморфизмом данных*;

во-вторых, как взаимно-однозначное преобразование друг в друга любого количества «минимальных объяснений» (моделей), построенных на этих данных («изоморфизм поперек»), который назовем *изоморфизмом моделей*.

С точки зрения теории категорий «изоморфизм вдоль» является обычным изоморфным отображением *f* данных *U* и *Y* друг в друга. «Изоморфизм поперек» изоморфно отображает уже не только данные, а и сами модели-отображения, построенные на этих данных, друг в друга и в смысле теории категорий является некоторым *функтором*.

Входными *U* и выходными *Y* данными будем называть любые (любой природы) упорядоченные сведения (информацию) о системе - упорядоченные множества с определенными на них операциями. В качестве резюме по новой формулировке принципа единственности отметим, что:

a) *если появятся дополнительные данные, не укладывающиеся в старое объяснение-модель, то нужно искать новый, более «широкий» изоморфизм*, объясняющий в том числе и новые данные. Например, классическим проявлением принципа единственности в новой его формулировке является переход от механики И. Ньютона к «более широкой» теории относительности А. Эйнштейна;

b) *новая формулировка не противоречит принципу единственности в формулировке работы* [1] *и принципу сопоставления изоморфизмов* [4]*, но, в отличие от формулировок, приведенных в* [1, 4] *и предопределяющих изоморфизм различных моделей, построенных на некоторых данных, здесь формулировка принципа единственности усилена в математическом смысле и основана на изначальном требовании и изоморфизма самих данных.* Это требование, не являясь на практике избыточным, позволяет в тоже время получить конструктивную формулировку общей теоремы о реализации;

c) словосочетание «*с точностью до модели-изоморфизма f*» *имеет глубокий математический и практический смысл. С точки зрения практики, любые заключения о свойствах исследуемой системы можно делать только с точностью до знаний о ней, сконцентрированных в ее модели. Если модель является отображением-изоморфизмом, то указанные заключения будут строгими и однозначными с точностью до этой модели-изоморфизма. Никакие строгие заключения о поведении и свойствах системы, не охваченных моделью-изоморфизмом, делать нельзя в принципе в силу неизвестности того, что находится за пределами модели.* В таком же смысле применяется выражение «*с точностью до*

изоморфизма» в алгебре [15] *применительно к анализу свойств абстрактных алгебраических структур и в теории вложения применительно к анализу свойств многосвязных систем с точностью до односвязных изоморфных систем-образов* [4, 7-9]. С учетом проведенных рассуждений принцип единственности в новой формулировке будем называть *общим* (*фундаментальным*) *принципом изоморфизма*.

На первый взгляд общий принцип изоморфизма является определенным шагом назад по сравнению с принципом единственности в классической формулировке, так как является более сильным в математическом смысле в силу того, что накладывает дополнительное условие на модель f – требует, чтобы эта модель была изоморфным отображением данных. Однако, как показали дальнейшие исследования, предложенная новая формулировка принципа единственности в форме общего принципа изоморфизма оказалась более конструктивной как в плане развития математической теории систем, так и в прикладных аспектах ее применения.

Общий принцип изоморфизма позволил сформулировать и доказать *основную* (*фундаментальную*) *лемму* развиваемой теории, из которой, как будет показано, следует формулировка и доказательство *теоремы о реализации*. Основная лемма теории дается в форме следующего утверждения [6, 10-12].

О с н о в н а я (ф у н д а м е н т а л ь н а я) л е м м а. Если отображение $f{:}X\to Y$ изоморфно (биективно) и существуют отображения $g{:}X\to Z$ и $h{:}Z\to Y$, такие, что выполняется композиция $f=hg$, то отображения h и g изоморфны (биективны) <u>с точностью до изоморфности (биективности)</u> f, то есть изоморфны (биективны) в рамках коммутативной диаграммы отображений, показанной на рис. 2.1.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & Y \\ & Z \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

Рис. 2.1. Коммутативная диаграмма отображений к основной лемме

Отображение f должно быть изоморфным вне коммутативной диаграммы, то есть должно быть обыкновенным, «безусловным» изоморфизмом, реализующим «данные» X и Y. Про композицию hg отображений h и g можно сказать, что она *реализует, моделирует* само отображение-изоморфизм f. Исходя из этого можно сказать, что основная лемма, по сути, является и *теоремой о реализации изоморфизма композицией отображений*. Более полная формулировка теоремы

о реализации на основе леммы с учетом новой формулировки принципа единственности будет дана ниже.

Применительно к отображениям h и g лемма утверждает, что даже если они по отдельности, вне композиции и коммутативной диаграммы, не являются изоморфизмами, то в составе композиции $f=hg$, замкнутой изоморфизмом f в коммутативную диаграмму, становятся *изоморфизмами с точностью до изоморфизма* f, то есть становятся некоторыми «относительными изоморфизмами» – изоморфизмами относительно (с точностью до) изоморфизма f. Это означает, что каждое из отображений h и g является изоморфизмом только в рамках коммутативной диаграммы отображений, показанной на рис. 2.1. При этих условиях отображения h и g в коммутативной диаграмме удовлетворяют всем свойствам изоморфных отображений, определенным в алгебре [15]. *Коммутативную диаграмму отображений, показанную на рис.* 2.1, *в дальнейшем будем называть канонической.*

Таким образом, словосочетание «отображения h и g изоморфны с точностью до отображения-изоморфизма f» нужно понимать в том смысле, что отображения h и g имеют соответствующие обратные и обладают свойствами изоморфизмов [15] только строго внутри коммутативной диаграммы и о таких свойствах отображений h и g вне диаграммы никаких утверждений делать нельзя. Как будет показано дальше, это замечание является весьма важным в различных приложениях теории. Другими словами, отображения h и g можно назвать «условными изоморфизмами» или «изоморфизмами с точностью до изоморфизма f», так как их изоморфность проявляется лишь при условии, что существует композиция этих отображений, коммутирующая естественный, «безусловный» изоморфизм f, остающийся изоморфизмом и вне связи с отображениями h и g, то есть вне коммутативной диаграммы.

В силу того, что сформулированное утверждение далее будет широко использоваться для доказательства других утверждений, будем называть его *основной* (*фундаментальной*) *леммой* развиваемой теории систем.

Про диаграмму говорят, что она коммутативна [15], если результат перехода от X к Y не зависит от того, делается это прямо при помощи отображения $f=hg$ или через промежуточный этап Z посредством последовательного выполнения отображений g и h. Композиция определена не для любых отображений g и h. Надо, чтобы у них общим было множество Z. Если диаграмма коммутативна, то она всегда замкнута. В дальнейшем, говоря о коммутативной диаграмме, ее замкнутость будем подразумевать по умолчанию.

С точки зрения современной теории категорий доказательство леммы является весьма простым и по сути сводится к обращению стрелок в коммутативной диаграмме на рис.3. Однако так можно доказать лишь существование некоторых отображений, «в каком-то смысле обратных» к отображениям g и h. Вопросы доказательства единственности и выявления структуры этих «обратных» отображений являются отдельными и гораздо более сложными. Сложность заключается в том, что отображения h и g, составляющие композицию, в общем случае, вне коммутативной диаграммы, не являются изоморфизмами в обычном смысле. В связи с этим задача определения обратных становится нетривиальной. Основная лемма позволяет эту задачу решить. Поэтому в целях достаточно цельного и формально строгого изложения основных положений развиваемой здесь теории полные доказательства леммы и некоторых вспомогательных утверждений приведены в Приложении к первой части книги в том виде, в каком они были первоначально получены. Эти доказательства отвечают на вопросы как о существовании указанных «обратных» отображений, так и о их единственности и, кроме того, позволяют сформулировать правила вычисления «обратных» отображений.

Лемма утверждает, что если в замкнутой коммутативной диаграмме существуют два «пути» от множества X к множеству Y слева направо, причем наиболее «короткий путь» в один «переход» является безусловно обратимым, то существуют и два однозначных и обратных им пути справа налево - от множества Y к множеству X. Лемма справедлива как для отображений, применяемых *к множествам X, Y* и *Z*, на отношения и операции между элементами внутри которых не накладываются никакие ограничения (в этом случае употребляются понятия биективности, сюръективности и инъективности соответствующих отображений), так и для отображений, применяемых к тем же множествам, когда отношения и операции между элементами внутри множеств в общем случае строго определены (в этом случае для отображений употребляются понятия изоморфизма, эпиморфизма и мономорфизма), как это имеет место применительно *к различным алгебраическим структурам*. Это касается и последующих утверждений. В дальнейшем, не умаляя общности рассуждений, будем пользоваться понятийным аппаратом, основанным на морфизмах.

К принципу единственности в формулировке [1] *основная лемма имеет следующее отношение* (*см. рис.* 2.2)*: если существуют минимальные модели-изоморфизмы* $f: X \to Y$ *и* $f^*: X \to Y$*, объясняющие одни и те же данные* (*например, интерполяционные многочлены минимальной степени Лагранжа и Ньютона, между которыми существует взаимно однозначное соответствие*)*, то существует и единственно изоморфное отображение* $\varphi: f^* \to f$*, такое, что выпол-*

няются соотношения $f = \varphi f^*$ *и* $f^* = \varphi^{-1} f$, *то есть отображения* f *и* f^* *изоморфны между собой*: $f \cong f^*$. Сказанное полностью соответствует и принципу сопоставления изоморфизмов.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "f^*"'] & Y \end{tikzcd}$$

Рис. 2.2. Диаграмма отображений к пояснению принципа единственности

В этом случае если существуют отображения g и h, коммутирующие изоморфизм $f=hg$ (рис. 2.1), то существуют и соответствующие им отображения g^* и h^*, коммутирующие изоморфизм f^*, т. е. $f^* = h^* g^* = \varphi^{-1} f = \varphi^{-1} hg$. Это означает, что отображения g, h и g^*, h^* являются изоморфизмами как с точностью до модели-изоморфизма f, так и с точностью до изоморфной ей модели-изоморфизма f^*, то есть внутри коммутативных диаграмм, образуемых соответствующими отображениями, даже если вне коммутативных диаграмм отображения g, h и g^*, h^* свойством изоморфности в обычном смысле (обратимости отображений) не обладают.

Таким образом, изучив систему с точностью до одной из минимальных в смысле [1] моделей и свойств отображений, составляющих с ней композицию, можно делать выводы о всех других изоморфных ей моделях и свойствах соответствующих отображений, составляющих с ними композицию. Следовательно, достаточно иметь единственную минимальную модель системы для всестороннего (с точки зрения и с точностью до других минимальных моделей) изучения ее свойств.

Например, на практике часто встречаются случаи, когда одни и те же данные о системе представляются в разных формах и на этих данных строятся разные, на первый взгляд, изоморфизмы-модели. Коммутативная диаграмма отображений для пояснения принципа единственности в указанных случаях показана на рис. 2.3. Примером могут служить данные о динамической системе, отображаемые во временной области в форме дифференциальных уравнений и те же данные, отображаемые в операторной форме Лапласа с помощью передаточных функций. Дифференциальные уравнения характеризуют *процессы* изменения данных, а передаточные функции являются *структурами*, преобразующими данные.

$$\begin{tikzcd} X^* \arrow[r, "f^*"] & Y^* \\ X \arrow[u, "\varphi_{xx}"] \arrow[r, "f"] & Y \arrow[u, "\varphi_{yy}"'] \end{tikzcd}$$

Рис. 2.3. Композиция отображений в случае разных форм данных

Известно, что между указанными формами данных и соответствующими отображениями при определенных условиях существует взаимно-однозначный пересчет с использованием соответствующих отображений-изоморфизмов [1, 2]. Применительно к указанному примеру таким изоморфизмом является прямое и обратное преобразование Лапласа. Вообще можно утверждать, что *структуры и соответствующие им процессы изоморфны*. Это простое, на первый взгляд, утверждение является весьма важным в теории систем.

Пусть, например, во временной области данные X и Y на входе и выходе системы описываются с помощью модели-изоморфизма f и пусть те же данные в другой форме (например, в операторной форме Лапласа) имеют вид X^* и Y^*. Допустим также, что известны изоморфные преобразования (отображения) $\varphi_{xx}:X\to X^*$ и $\varphi_{yy}:Y\to Y^*$, переводящие данные из одной формы в другую и наоборот. Пусть для описания данных в форме X^* и Y^* получен и известен изоморфизм f^*. В соответствии с общим принципом изоморфизма и принципом единственности необходимо показать, что модели f и f^* изоморфны между собой. Действительно, в силу коммутативности диаграммы отображений, показанной на рис. 2.3, справедливы следующие соотношения:

$$f = \varphi_{yy}^{-1} f^* \varphi_{xx}, \quad f^* = \varphi_{yy} f \varphi_{xx}^{-1}, \quad f^{-1} = \varphi_{xx}^{-1} f^{*-1} \varphi_{yy}, \quad f^{*-1} = \varphi_{xx} f^{-1} \varphi_{yy}^{-1}$$

$$f^{-1} f = e_x, \; f f^{-1} = e_y, \; f^{*-1} f^* = e_{x^*}, \; f^* f^{*-1} = e_{y^*}.$$

Из указанных соотношений следует, что между изоморфными моделями-отображениями f и f^* существует взаимно-однозначное изоморфное преобразование, что и требовалось доказать. Это означает, что в алгебраическом смысле модели f и f^* эквивалентны (взаимно-однозначно пересчитываются друг в друга), то есть модель рассматриваемой системы в смысле [1] единственна.

Полученное доказательство справедливо и для более общего случая, когда отображения $\varphi_{xx}:X\to X^*$ *и* $\varphi_{yy}:Y\to Y^*$, *а также модели* f *и* f^* *могут быть отображениями разной алгебраической природы в соответствующих парах отображений.* Например, отображение $\varphi_{xx}:X\to X^*$ может переводить входные данные из временн`ой формы в операторную форму Лапласа, а отображение $\varphi_{yy}:Y\to Y^*$ - выходные данные из временн`ой формы в частотную форму. В этом

случае отображение f работает во временной области, а отображение f^* изоморфно преобразует входные данные из операторной формы Лапласа в частотную форму. Используя коммутативную диаграмму, приведенную на рис. 2.3, нетрудно показать, что в этом случае существуют изоморфные отображения $\varphi_{xy}: X \to Y^*$ и $\varphi_{yx}: Y \to X^*$, переводящие входные данные, заданные во временной области, в выходные данные, имеющиеся в частотной области, а также выходные данные, имеющиеся во временной области, во входные данные, заданные в форме Лапласа. Известно, что при определенных условиях множество таких взаимно однозначных преобразований существует, то есть и в этом более общем случае между отображениями f и f^* имеется изоморфное преобразование.

Продолжая обобщения, отметим, что общий принцип изоморфизма, в первоначальном варианте отталкивавшийся от формулировки принципа единственности [1] и сформулированный применительно к некоторым «данным» об объекте реальной действительности, может быть абстрагирован на объекты любой природы и соответствующие «данные» о них. Действительно, обычно «данные» об объектах упорядочивают (собирают и объединяют в некоторую «информацию») в форме матриц, векторов, таблиц и вообще некоторых *упорядоченных множеств с операциями и отношениями* на них. Такие множества называют *алгебраическими структурами* [15, 63-65]. Опираясь на это понятие можно дать следующую абстрактно-обобщающую формулировку общего принципа изоморфизма.

Общий принцип изоморфизма в теории систем: если существует изоморфное отображение (модель) f, которое взаимно однозначно отображает друг в друга алгебраические структуры, характеризующие некоторый объект исследований (предмет, явление), то

a) с точностью до модели-изоморфизма f эти алгебраические структуры являются взаимно полными и точными – имеет место изоморфизм алгебраических структур;

b) изоморфное отображение (модель) f единственно и минимально в том смысле, что если существуют другие изоморфные модели-отображения тех же алгебраических структур, то эти модели-отображения изоморфны модели f – имеет место изоморфизм моделей.

Таким образом, принцип изоморфизма справедлив для весьма общих случаев, характеризующих разную алгебраическую и физическую природу соответствующих отображений, что и дает основание называть его *общим или фундаментальным принципом изоморфизма*.

По сути, приведенная выше «абстрактно-отвлеченная» формулировка общего принципа изоморфизма в иной форме повторяет известное в алгебре определение изоморфизма [15, 63-65] и, казалось бы, ничего нового не привносит. Однако это не так. На самом деле хорошо, что повторяет: тем самым не подлежащее сомнению в алгебре существование изоморфизмов алгебраических структур находит преломление в существовании изоморфизмов в реальной действительности применительно к ее объектам, предметам, явлениям, системам и характеризующим их множествам упорядоченных данных с соответствующими операциями. При этом акцент в рамках принципа делается не на данных и характеризующих их алгебраических структурах, а на изоморфизме этих данных (структур). Этим принципом, как уже не раз бывало, фиксируется теснейшая взаимосвязь математики и физической реальности. «Принцип изоморфизма» в теории систем давно декларировался и констатировался ее основоположниками [67-70] и их продолжателями [71, 77,78], однако форма его конструктивной формализации так и не была найдена. Отдельные демонстрационные примеры [71] ничего не меняли по существу. В нашем же случае желание «разобраться с системами с помощью изоморфизмов», как написал один из читателей [74] в отзыве на статью [62], стало реальностью.

Возвращаясь к формулировке основной леммы (рис. 2.1), не умаляя общности и исходя из проведенных рассуждений применительно к принципу единственности и общему принципу изоморфизма, можно дать следующую формулировку теоремы о реализации.

Т е о р е м а о р е а л и з а ц и и: *Если найдется модель* $f{:}X\to Y$ *изоморфно отображающая данные* X *в данные* Y *и существуют отображения* $g{:}X\to Z$ *и* $h{:}Z\to Y$ *такие, что выполняется композиция* $f=hg$*, то*

а) *с точностью до изоморфизма* f *данные* X *и* Y *являются точными и полными;*

б) *модель* f *минимальна и единственна* (*в смысле* [1])*;*

в) отображения h *и* g *являются изоморфизмами с точностью до изоморфизма* f*;*

г) *если найдется другая минимальная модель-изоморфизм* $f^*{:}X\to Y$*, объясняющая те же данные, то существует и единственно изоморфное отображение* $\varphi{:}f^*\to f$ *такое, что выполняются соотношения* $f=\varphi f^*$ *и* $f^*=\varphi^{-1}f$*, то есть отображения* f *и* f^* *изоморфны между собой*: $f\cong f^*$.

Теорема о реализации объединяет новую формулировку принципа единственности и формулировку основной леммы, то есть в нашей формулировке теорема о реализации, по сути, повторяет *новую формулировку принципа единственности* и именно в такой более развернутой формулировке ее трактовка совпадает с трактовкой теоремы реализации в работах [1, 2]. С учетом доказательства основной леммы и приведенного выше доказательства единственности минимальной модели системы полное доказательство теоремы о реализации в новой формулировке вполне очевидно. Теорема снимает и вызывавший прежде трудности сложный вопрос о полноте и точности данных X и Y, имеющихся о системе: *данные X и Y полагаются точными и полными с точностью до реализующей их изоморфной модели f*. Понятно, что изоморфизм модели f означает и ее минимальность в смысле [1].

Изоморфная модель f, наряду с тем, что она «реализует» данные X и Y, сама «реализуется» посредством композиции $hg=f$ отображений h и g. В этом смысле коммутативная диаграмма на рис. 2.1 иллюстрирует сразу две «реализации»: реализацию данных X и Y *изоморфной моделью f и реализацию изоморфизма f композицией отображений h и g*. Именно поэтому *теорему реализации* в нашей формулировке будем называть *теоремой о реализации* изоморфизма композицией отображений.

На примере матриц покажем, что при выполнении условий основной леммы и теоремы о реализации отображения h и g имеют обратные и приобретают свойства изоморфизмов в коммутативной диаграмме.

П р и м е р. Применительно к рис. 2.1 рассмотрим отображения-матрицы вида

$$f=I=1,\ g=G=\begin{bmatrix} 1 \\ (1-b_1)(b_2)^{-1} \end{bmatrix},\quad h=H=\begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix},$$

такие, что выполняется композиция

$$I=HG=\begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ (1-b_1)(b_2)^{-1} \end{bmatrix}=1.$$

Здесь $f=I=1$ - единичное скалярное отображение, то есть изоморфизм по определению, b_1 и b_2 – некоторые элементы матриц. Коммутирующие изоморфизм $f=I=1$ матрицы-отображения H и G - прямоугольные и не имеют обратных вне коммутативной диаграммы. В соответствии с условиями теоремы и основной леммы их изоморфность, а значит, и обратимость в коммутативной диаграмме с

точностью до изоморфизма $f=I$ обеспечивается при выполнении соотношений (см. рис. 2.1 и доказательство леммы в Приложении)

$$I_X^{\text{лев}}=G^{-1}G,\ I_X^{\text{прав}}=I^{-1}I=1,\ I_X^{\text{лев}}=I_X^{\text{прав}},\ I_Y^{\text{прав}}=HH^{-1},\ I_Y^{\text{лев}}=I\,I^{-1}=1,\ I_Y^{\text{лев}}=I_Y^{\text{прав}},$$

$$I_Z^{\text{лев}}=GG^{-1},\ I_Z^{\text{прав}}=H^{-1}H,\ I_Z^{\text{лев}}=I_Z^{\text{прав}}=I_Z,\ I_Z\,I_Z=I_Z.$$

Здесь $I_X^{\text{лев}}$, $I_X^{\text{прав}}$, $I_Y^{\text{лев}}$, $I_Y^{\text{прав}}$, $I_Z^{\text{лев}}$, $I_Z^{\text{прав}}$ - соответственно левое и правое единичные отображения (или просто единицы) на X, Y и Z. Эти соотношения позволяют определить единственные обратные H^{-1} и G^{-1} для отображений-матриц H и G. *В* данном случае H^{-1} и G^{-1} будут иметь вид $H^{-1}=GI$, $G^{-1}=IH$, то есть

$$G^{-1}=\begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix},\ H^{-1}=\begin{bmatrix} 1 \\ (1-b_1)(b_2)^{-1} \end{bmatrix}.$$

Проверяя выполнение записанных выше равенств, получим

$$I_Z^{прав}=H^{-1}H=I_Z^{лев}=GG^{-1}=\begin{bmatrix} 1 \\ (1-b_1)(b_2)^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ (1-b_1)(b_2)^{-1}b_1 & (1-b_1) \end{bmatrix}=I_Z.$$

Таким образом, левая и правая единицы на Z совпадают и умножение единицы на себя дает эту же матрицу, то есть полученная матрица действительно является единицей-изоморфизмом с точностью до изоморфизма I на Z даже несмотря на то, что определитель этой матрицы равен нулю и, следовательно, она в обычном смысле, вне коммутативной диаграммы (см. рис. 2.1), отображением-изоморфизмом не является – не обладает свойствами матричной единицы в обычном смысле. В целом, удовлетворяются все равенства, обусловливающие структуру обратных матриц H^{-1} и G^{-1}. Следовательно, необратимые в обычном смысле прямоугольные матрицы H и G имеют в коммутативной диаграмме единственные обратные с точностью до изоморфизма $f=I$. Пример приведен для тривиального скалярного изоморфизма $f=I=1$ лишь в интересах большей прозрачности и простоты проверки. Вместе с тем он не является чисто методическим и получен при синтезе регуляторов на основе общего принципа изоморфизма в соответствии с методикой, изложенной в [20, 21]. Для более сложного изоморфизма пример приведен в Приложении к первой части книги.

Глава 3

Формализация базовых понятий теории систем

3.1. Определение системы. Простые и сложные системы

В теории систем (см., например, [22-25]) существует большое количество определений понятия «система» и производных от него понятий «сложная система», «простая система» и др. Однако среди них нет строго формализованного, общепринятого, так как почти все определения являются содержательными, эвристическими и характеризуют соответствующие объекты перечислением и описанием их свойств. Исключение составляет понятие динамической системы, строго определенное в [2]. Вместе с тем, в [2] отмечается, что «… нет единого мнения по вопросу о том, что следует считать исходным определением системы… По-видимому, в данной области никто не может утверждать, что последнее слово осталось за ним». Согласимся с авторами работы [2] и, тем не менее, с учетом введенной нами формально строгой формулировки общего принципа изоморфизма и утверждения основной леммы попытаемся по-новому подойти к определениям базовых понятий теории систем (см. рис. 3.1), не претендуя на их абсолютность.

Рис. 3.1. Базовые понятия теории систем

***О п р е д е л е н и е* 1.** Моделью $\Sigma=(X, s, Y)$ объекта произвольной природы назовем отображение (как правило, неединичное) $s{:}X\to Y$ известного множества X входов (области определения) объекта в известное множество Y выходов (область значений), воспроизводящее поведение объекта с точностью и полнотой до известных множеств X и Y, то есть обеспечивающее точное соответствие множества выходов модели известному множеству выходов Y реального объекта при

подаче на их входы одного и того же множества X. Отображение s назовем структурой модели.

Понятие «точное соответствие» определяется отдельно в каждой задаче построения модели. Например, *применительно к формулировке общего принципа изоморфизма «точное соответствие» данных X и Y на входах и выходах объекта и модели определяется с точностью до модели-изоморфизма*.

Под *объектом* будем понимать любую сущность или предмет наших исследований [22-25]. Любой реальный объект в кибернетике часто рассматривается как «черный ящик» (см. рис.3.2), входы и выходы которого не всегда непосредственно доступны для исследователя [26]. Исследовать объект можно, воздействуя на него с помощью другого, заранее известного объекта-стимулятора посредством множества входных «сигналов»-стимулов U через известное отображение $\beta{:}U\to X$ и наблюдая поведение исследуемого объекта посредством заранее известного объекта-наблюдателя в виде множества Z выходных «сигналов»-реакций, формируемых отображением $h{:}Y\to Z$.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\beta"] \arrow[rrr, bend right, "s^*"'] & X \arrow[r, "s"] & Y \arrow[r, "h"] & Z \end{tikzcd}$$

Рис. 3.2. Объект и отображения для его исследования

***О п р е д е л е н и е* 2**. Формальной (абстрактной или абстрактно-алгебраической) системой назовем композицию любого количества отображений (и соответствующих им объектов), реализующую какой-либо изоморфизм и образующую в совокупности с этим изоморфизмом замкнутую коммутативную диаграмму, свойства которой, как целого, не сводятся к множеству изначальных свойств, включаемых в систему объектов-компонент и соответствующих им отображений, а сами эти объекты-компоненты и отображения приобретают в системе свойства, отсутствовавшие у них до включения в систему.

Конечно для системы в определении целесообразно было бы использовать в качестве синонима и термин «алгебраическая система», однако он уже занят в «чистой математике», хотя в смысловом отношении никак не коррелирует с содержанием понятия «система», используемым в теории систем.

Утверждение о том, что «целое несводимо к сумме частей, его образующих» [27], известно со времен Аристотеля, который, не вводя понятие «система», тем не менее, абсолютно правильно охарактеризовал его сущность и содержание. С указанным утверждением соглашаются все современные специалисты в теории

систем [22-25], называя его свойством интегративности, эмерджентности или «системным эффектом», присущим только системе в целом. Вообще основные признаки систем, как философских сущностей и категорий, были известны давно и, например, великий немецкий философ Гегель (1770—1831) в своих работах выделял следующие их признаки [76]:

1. *целое есть нечто большее, чем сумма частей*;

2. *целое определяет природу частей*;

3. *части не могут быть познаны при рассмотрении их вне целого*;

4. *части находятся в постоянной взаимосвязи и взаимозависимости*.

Все указанные признаки системы, как целого, по сути, формализованы в приведенном нами определении. Рассмотрим замкнутую композицию отображений, представленную на рис.3.2. Пусть для исследуемого объекта $s{:}X\to Y$ с помощью заранее известных вспомогательных объектов и соответствующих отображений $\beta{:}U\to X$ и $h{:}Y\to Z$ нам удалось построить изоморфную модель $s^*{:}U\to Z$, взаимно-однозначно описывающую входные U и выходные Z косвенные данные об объекте. Прямые данные X и Y, как уже отмечалось, не всегда доступны для непосредственных воздействий на объект и наблюдения его поведения. Тогда в соответствии с основной леммой в рассматриваемой замкнутой композиции отображений, содержащей изоморфизм s^*, отображения β, s, h суть изоморфные отображения с точностью до изоморфной реализации (модели) $s^*=h(s\beta)=h\mu=(hs)\beta=\eta\beta$. Причём особенность отображений β, s, h, входящих в коммутативную диаграмму, заключается в том, что неизоморфные в обычном понимании (поодиночке, вне коммутативной диаграммы) эти отображения становятся изоморфными в композиции с изоморфизмом s^*, то есть у этих отображений возникает дополнительный или, как говорят, «системный эффект», проявляющийся в свойстве изоморфности, которого вне системы, как целого, в общем случае, у них не было.

Таким образом, свойства рассматриваемой композиции отображений как системы не сводятся к множеству изначальных свойств компонент-отображений, взятых по отдельности - вне коммутативной диаграммы, характеризующей рассматриваемую систему. Это ключевой и главный признак любой системы как таковой: *признак эмерджентности или «системного эффекта», присущий только системе в целом.*

Следовательно, *основная лемма может служить фундаментальной основой для строгого, формального определения понятия «система». Основная*

лемма позволяет понять, как появляются дополнительные, новые, системные свойства у отображений, замыкаемых некоторым изоморфизмом в композицию, то есть собственно в систему.

***О п р е д е л е н и е* 3**. Если существует изоморфное отображение $s^*=hs\beta$, представляющее собой реализацию (модель) системы (см. рис. 3.2), то *система называется простой* с точностью до изоморфной реализации (модели) s^*.

Система определяется как простая в связи с тем, что ее поведение полностью предсказуемо с точностью до изоморфной модели s^*. Никакие неожиданные эффекты в поведении простой системы невозможны в принципе.

В тривиальном случае, когда входы X и выходы Y исследуемого объекта непосредственно доступны для исследователя, изоморфной должна быть сама структура-модель объекта $s^*=s$, то есть должен выполняться общий принцип изоморфизма, отвечающий новой формулировке принципа единственности. Только в этом простейшем случае отпадает необходимость в построении системы, то есть замкнутой композиции отображений для исследований свойств объекта.

***О п р е д е л е н и е* 4**. Если система нереализуема (немоделируема, неидентифицируема) с точностью до какой-либо модели-изоморфизма из-за недостатка знаний–данных о ней, то она называется *сложной*.

Термин и понятие реализуемость (моделируемость, идентифицируемость) рассматривается, как и ранее, в смысле [1, 2].

Таким образом, *сложность системы определяется неизоморфностью ее модели или отсутствием* (*невозможностью построения*) *изоморфной модели как таковой*. Невозможность получения изоморфной модели обычно связана с недостаточностью (неполнотой) данных для однозначной интерпретации их связности и отнесения к данной системе.

Наряду с понятиями «простая система» и «сложная система» *иногда употребляют термин «большая система», часто ассоциируемый с большим количеством элементов в системе*. *Так как для сложной системы количество элементов и границы в принципе неизвестны, под «большой системой» будем понимать простую систему с весьма большим количеством элементов*. Таким образом, можно ввести определение.

***О п р е д е л е н и е* 5**. *Большой системой* будем называть простую систему, коммутативная диаграмма которой содержит композицию весьма большого

(«необозримого») числа естественных изоморфизмов и коммутируемых ими отображений-компонент.

Понятие, охватываемое словосочетанием «весьма большое число», не может быть формально определено в принципе, так как для каждого исследователя оно носит субъективный характер. Важно лишь, что поведение такой системы полностью предсказуемо с точностью до естественных изоморфизмов, входящих в композицию отображений, которые образуют соответствующую коммутативную диаграмму. Если таких изоморфизмов в системе несколько, то среди них должен быть определен главный, который назовем *изоморфизмом-целью*. С точностью до изоморфизма-цели определяются свойства всех других отображений в соответствующей композиции-реализации, то есть в «системе», построенной на изоморфизме-цели. Смысл понятия «изоморфизм-цель» будет пояснен ниже.

Таким образом, основная лемма позволяет дать строгие формально-математические определения всех базовых понятий теории систем и объяснить их формально-алгебраическую и содержательную, мировоззренческую, теоретико-физическую основу, в связи с чем будем называть ее *фундаментальной леммой развиваемой нами теории.*

Особое внимание обратим на то, что *все приведенные определения не являются аксиоматическими, вводящими соответствующие понятия «по определению»*, как часто бывает в науке. По сути, все они *являются следствиями основной леммы и теоремы о реализации* и в этом смысле в *них зафиксированы утверждения*, которые вполне доказуемы и доказаны. Данные нами *определения лишь констатируют названия тех или иных общепринятых смыслов и понятий*, *под которые в данном случае подведена единая строго формализованная математическая основа*. Именно поэтому применительно к зафиксированным в введенных определениях понятиям в рамках общего принципа изоморфизма *нельзя говорить*, *что соответствующие понятия* «*приняты по определению*», как аксиомы.

3.2. Следствия из принципа изоморфизма и определений систем

С л е д с т в и е **1** (о «первосистемах»). *Простейшими «системами» или «первосистемами», неопределимыми через другие системы, являются «естественные» изоморфизмы, рассматриваемые отдельно, вне каких-либо композиций отображений.*

Первоначально к этому следствию нами в работе [62] был дан такой комментарий: «*В качестве примеров таких первосистем-отображений можно рассматривать скаляры, квадратные матрицы полного ранга, а также любые отображения-функции, имеющие обратные. Все свойства* «*первосистем*» *определены изначально вне каких-либо системных образований* (*как у первичных «кирпичиков»*)*, неизменны и не дополняются никакими новыми свойствами при их включении в произвольные и более громоздкие системные образования*.» Однако в процессе дальнейших исследований выяснилось (см. 1-ю главу 2-й части книги), что, например, «*естественные*» *изоморфизмы в форме квадратных матриц полного ранга могут менять свои свойства* (*менять обратные*!) *после включения их в систему*, то есть в композицию отображений и соответствующую коммутативную диаграмму, построенную на еще «более простом изоморфизме» - на изоморфизме-матрице меньшего ранга. Этот парадоксальный для «математической интуиции» результат был во многом неожиданным. В связи с этим скорректируем процитированный комментарий. В качестве примеров первосистем-отображений можно рассматривать скаляры, квадратные матрицы полного ранга, а также любые отображения-функции, имеющие обратные. Все свойства «*первосистем*»-*скаляров* определены изначально вне каких-либо системных образований (как у первичных «кирпичиков»), неизменны и не дополняются никакими новыми свойствами при их включении в произвольные и более громоздкие системные образования. То есть *не меняются свойства только у скаляров*-«*точек*»*, не имеющих изначально никакой* «*внутренней структуры*». *Изоморфизмы-матрицы, отличные от скаляров, то есть имеющие* «*внутреннюю структуру*» (*количество элементов, большее одного*), *могут менять свои свойства после включения в композиции отображений, реализующие системы на других, системообразующих изоморфизмах-целях*. Тем не менее изоморфизмы-матрицы оставим в списке «первосистем», так как любой из таких изоморфизмов потенциально может быть использован в качестве системообразующего изоморфизма, формализующего цель, реализованной на нем системы. Понятие (определение) изоморфизма-цели введено далее в следствии 8.

Более того, *«первосистемы» полностью детерминируют свойства более «широких» систем, в которые они включаются, и всех отображений, образующих композицию, коммутирующую* (*реализующую*) *отображение-изоморфизм, отвечающий «первосистеме» в коммутативной диаграмме, формализующей рассматриваемую систему*.

Вообще говоря, возникает нетривиальный вопрос: а существуют ли «системы» в реальном мире или «системы» являются для человека просто удобной формой абстрагирования-реализации-моделирования, описания, объяснения

объектов, явлений и вообще различных сущностей реальности? С точки зрения теории реализации [1, 2] скорее второе, так как в реальном мире не существует четких границ взаимодействий между объектами (их отношения и взаимодействия, по большому счету, безграничны), а «система», моделирующая («реализующая») объект или «сильные» взаимодействия в группе объектов, в соответствии с композицией включаемых в нее отображений имеет четкие границы, назначаемые исследователем по какому-либо критерию (критерий может быть и «векторным» и даже «матричным»).

Под критерием выделения системы из «бесконечной» и «непрерывной» реальности иногда понимают некоторый «системообразующий фактор». В рамках развиваемой нами парадигмы в теории систем, опирающейся на общий принцип изоморфизма, *в качестве такого системообразующего фактора как раз и можно рассматривать изоморфизм-«первосистему», детерминирующий свойства всех отображений в реализующей его композиции отображений в коммутативной диаграмме, отвечающей рассматриваемой системе*.

В связи с этим при реализации-моделировании реальных объектов и их отношений в форме систем в общем случае можно считать, что *любой реальный объект является либо простейшей первосистемой, либо простой системой, либо сложной системой в зависимости от тех свойств, которыми он обладает и уровня знаний о нем у стороннего наблюдателя. Поэтому в дальнейшем понятия «объект» и «система» условимся рассматривать как синонимы.* Это же относится к понятиям «модели объекта» и «модели системы». Отметим, что отождествление объекта с реализующей его (в смысле [1, 2]) системой часто используется в теории систем с целью выявления и исследования свойств объекта [1, 2, 22-25].

***С л е д с т в и е* 2** (об измеримости систем). *Естественные изоморфизмы* («*первосистемы*») *позволяют «измерить» сложные системы с точностью до самих себя* (*изоморфизмов*)*, то есть позволяют ввести «метрику» на сложных системах.*

Наши знания о системе углубляются концентрически и изначально сложная система постепенно становится простой с точностью до все новых и новых изоморфных объяснений данных о ней (см. рис. 3.3). Границы простой системы определяются границами однозначно известного о ней, то есть границами ее реализуемости, например, с помощью изоморфизмов s_1* и s_2*. *То, что не изоморфно или неопределимо через изоморфное отображение, суть не простая, а сложная система.*

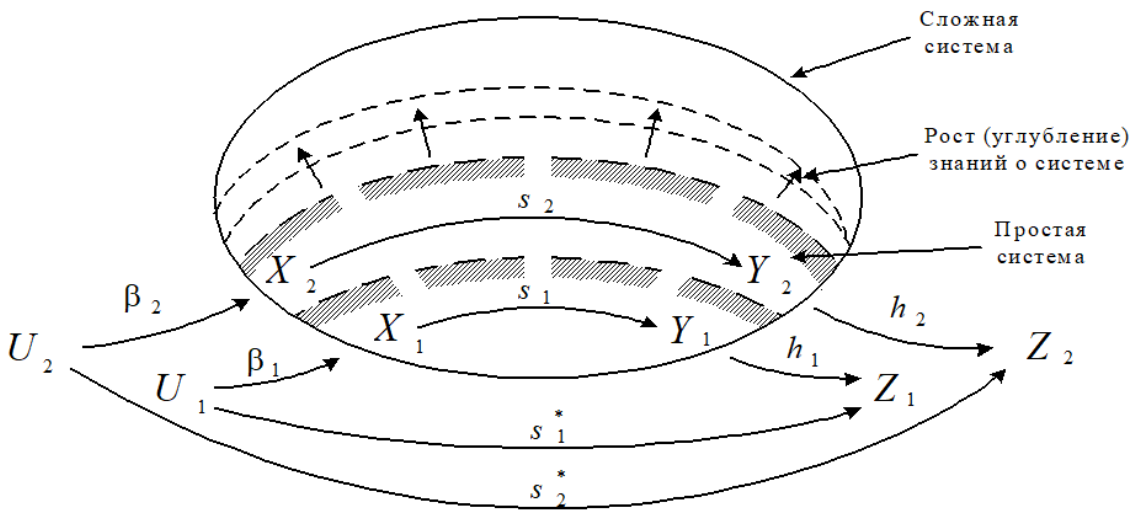


Рис. 3.3. Накопление данных и построение «расширяющихся» изоморфных моделей системы

Таким образом, любую простую абстрактную формально-алгебраическую систему можно рассматривать как часть некоторой глобальной математической и теоретико-физической абстракции реальной действительности - более общей, единой и единственной, сложной метасистемы. При этом *простая система представляет собой «замкнутую», объяснимую посредством* (*и относительно*) *одной или нескольких известных моделей-изоморфизмов, часть этой глобальной сложной системы.* Модели-изоморфизмы, с точностью до которых известны и определены *границы простой системы внутри сложной метасистемы*, включаются в соответствующую этой простой системе коммутативную диаграмму.

Можно привести и еще одну интересную интерпретацию понятий «простая система» и «сложная система», опирающуюся на такие известные понятия как «информация» и «энтропия». Известно, что информация часто рассматривается в качестве меры упорядоченности в какой-либо системе, а энтропия, наоборот, - в качестве меры беспорядка или хаоса. Любая «простая система» как часть некоторой, может быть даже неизвестной, «сложной системы» представляет собой *ограниченную некоторой информацией «модель»* этой «сложной системы». Причем считается, что полученную *информацию, то есть некоторые сведения* о «сложной системе», удалось не просто как-то интерпретировать, объяснить, и, в целом, как-то *упорядочить*, но и строго формализовать или, как говорят, «реализовать» с помощью некоторого изоморфизма, который в дальнейшем и рассматривают как модель изучаемой и исследуемой «сложной системы» или просто как «*простую систему*», *с точностью до которой законы функционирования «сложной системы» установлены однозначно и рассматриваются как «абсолютные»*.

Таким образом, упорядоченные сведения о «сложной системе», заключенные в ее модели, являются информацией, а сама модель есть форма объединения этой информации в единое целое – в «простую систему». *Информация* о «сложной системе», содержащаяся *в модели-изоморфизме*, то есть в «простой системе», является *мерой предельной, абсолютной упорядоченности сведений* о рассматриваемой «сложной системе», содержащихся в границах указанной модели-изоморфизма и в соответствующей «простой системе». Все, что находится в «сложной системе» за границами «простой системы», можно рассматривать как некий «хаос», синонимом которого является понятие «энтропии» и непредсказуемости поведения.

Вместе с тем, исходя из рассмотренного, должно быть понятно, что «*хаос*» *и соответственно* «*энтропия*»*, как мера неупорядоченности* (*хаотичности*) *состояния* «*сложной системы*»*, не являются синонимом* «*случайности*» того, что в ней происходит. Скорее, «*хаос-энтропия*» - *синоним* «*неизвестности*» *происходящего в* «*сложной системе*», причем «неизвестности» вре`менной, так как вполне возможно получение некоторой дополнительной «информации» о происходящем в «сложной системе», например, в процессе проведения специальных экспериментов над ней. Именно в силу неизвестности и непредсказуемости последовательности «мгновенных состояний» «сложной системы» ее поведение описывается в терминах теории вероятностей.

Таким образом, следует полагать, что «*неизвестность*» *происходящего не означает его случайности* и это «происходящее» в «сложной системе» может быть вполне детерминированным. Признаем, что на детерминированность происходящих в «сложной системе» процессов мы обычно интуитивно и полагаемся, планируя и ставя эксперименты по ее исследованию и закреплению их результатов в форме новых, более «широких» моделей-изоморфизмов, то есть «простых систем». Простая логика подсказывает, что без такого признания детерминированности процессов в сложных системах, хотя бы с точностью до законов распределения вероятностей, никакая наука, как сфера человеческой деятельности и одна из форм общественного сознания, главной функцией которой является получение и теоретическое обобщение (упорядочение) объективных знаний о реальной действительности, например, в форме «физических законов», не имела бы смысла.

С л е д с т в и е **3** («постулат» причинности с точностью до изоморфизма). *Общий принцип изоморфизма* (*фундаментальная лемма*) *является математическим выражением известного в физике и в теории систем постулата причинности* (*каузальности*) [28] *или принципа детерминизма,* в соответствии с которым причина однозначно детерминирует конкретное следствие (событие, состояние),

и, наоборот, данному событию предшествует строго определенная причина (в векторном смысле, то есть множество «элементарных» причин).

Это непосредственно следует из основной леммы и теоремы о реализации (см. рис. 2.1): в силу изоморфности отображения f любому событию-причине X в простой системе соответствует строго определенное событие-следствие Y и, наоборот, независимо от того, каким путём осуществляется переход от причины к следствию - напрямую через изоморфное отображение f или через композицию hg коммутирующих изоморфизм f отображений g и h.

Постулат причинности реализуется лишь в простых системах, то есть с точностью до какого-либо изоморфизма, связывающего причины и следствия и коммутируемого композицией любых неизоморфных в обычном смысле отображений. *Таким образом, вводившаяся ранее в качестве «постулата» в различных научных дисциплинах причинность и детерминированность событий, в рамках развиваемой нами теории систем доказывается строго математически на основе фундаментальной леммы и является свойством любой простой системы.*

Возможность всестороннего и все более углубляющегося познавания «системности» и причинности какой-либо метасистемы, как математической абстракции некоторой глобальной системы с неизвестными границами, например, некоторой «Вселенной», определяется наличием в этой метасистеме естественных изоморфизмов-первосистем или «систем-метрик», с точностью до которых устанавливается взаимно однозначная связь между причинами и следствиями. К таким «системам-метрикам» в физическом мире можно отнести, например, скорость света в вакууме и другие физические константы (инварианты).

Во временной области (или, как говорят в технической кибернетике, «в пространстве состояний») каждому «следствию» (см. рис. 2.1), под которым будем понимать состояние системы $Y(t)$ в текущий момент времени t, соответствует строго определенная и единственная «причина», под которой понимается состояние системы $X(t_0)$ в любой известный предшествующий момент времени t_0, и, наоборот, каждая «причина» влечет строго определенное единственное «следствие». Единственность здесь понимается в векторном смысле, то есть события $Y(t)$ и $X(t_0)$ являются векторами состояния системы, включающими совокупность элементарных событий-компонент.

Далее, в алгебраическом смысле понятия «статика» и «динамика» тождественны, так как между ними существует изоморфизм.

Например, при реализации математической модели линейной стационарной динамической системы в форме системы дифференциальных уравнений имеется

возможность посредством прямого преобразования Лапласа (к которому часто прибегают в технической кибернетике и в теории автоматического регулирования и управления - см. рис. 2.3 и комментарии к нему) перейти к записи этой модели в «статичной», алгебраической, операторной форме и посредством обратного преобразования Лапласа вернуться к записи модели во временной области. Все эти преобразования взаимно однозначны. *В этом смысле время как «безусловный» атрибут системы, характеризующий ее динамику, не существует и не является обязательным.* В качестве независимой переменной, относительно которой сравниваются «события» в системах, может рассматриваться некоторый другой, внешний и общий по отношению к ним (например, пройденный системами путь) параметр или внутренний параметр системы, если речь идет об одной системе (например, параметр Лапласа), характеризующий происходящие в самой системе события.

В качестве примера рассмотрим простейшую автономную систему дифференциальных уравнений, характеризующих «движения-изменения» в некоторой динамической системе:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2). \end{cases}$$

При этом будем учитывать, что любая неавтономная система дифференциальных уравнений может быть приведена к виду автономной (инвариантной ко времени) путем введения дополнительной переменной x_{n+1} и замены ею аргумента t там, где он присутствует явно, а также дополнения системы ещё одним уравнением вида $\dfrac{dx_{n+1}}{dt} = 1$. В рассматриваемой системе изменения переменных состояния x_1 и x_2 «синхронизируются» (отсчитываются) относительно одних и тех же значений времени t. Разделив второе уравнение на первое, получим уравнение

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)},$$

в котором изменение переменной состояния x_2 «синхронизируется» уже относительно другой независимой переменной - переменной x_1 - и время, как таковое, отсутствует. Например, пусть x_1 расстояние, которое пролетел самолет по маршруту от некоторого исходного пункта, а x_2 – расход топлива. В этом случае полученное уравнение характеризует расход топлива на единицу пути, например, на километр – километровый расход топлива – и процесс-динамику изменения

остатка топлива на борту в зависимости от расстояния, которое пролетел самолет от начального пункта маршрута. В исходной автономной системе расход топлива относился к единице времени, например, к секунде – секундный расход топлива, - и характеризовал процесс-динамику изменения остатка топлива на борту в зависимости от времени полета от начального пункта.

Таким образом, *в границах одной конкретной системы в качестве независимой может быть выбрана любая переменная состояния, по отношению к которой* (*относительно которой, с точностью до которой*) *мы хотим изучать изменения-движения всех других переменных*, входящих в вектор состояния системы. Эта *независимая переменная является изоморфизмом* (*мерой-инвариантом*), *относительно которого или с точностью до которого рассматриваются изменения* (*«движения»*) *всех других компонент вектора состояния* рассматриваемой системы. Важно: «движения» суть «изменения» по отношению к чему-нибудь. То есть понятие «движения» относительно и в любой системе определяется с точностью до некоторого изоморфизма.

Если же речь идет о сравнительном анализе процессов движения сразу в нескольких системах, векторы состояния которых содержат разные, «непересекающиеся» компоненты, то наиболее удобной независимой переменной часто оказывается именно некоторое единое для систем «время», так как по отношению к нему легче всего «синхронизировать» процессы в системах. Но и здесь, как следует из общей теории относительности, не все просто. Нужно иметь в виду, что «время» это не какая-то «умозрительная» (плод разума) линейная стационарная мера, ассоциируемая со «стрелой времени» и «набрасываемая» на события в разных системах для приведения их «к общему знаменателю». Время вполне осязаемо и материально, если вспомнить, как, например, определяется эталон секунды Международным комитетом мер и весов: секунда есть время, равное 9 192 631 770 периодам излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия-133, не возмущённого внешними полями при температуре 0 К.

Таким образом, «движение» любой системы и изменения компонент ее вектора состояния, либо «движения» группы систем формально могут быть непосредственно соотнесены с вполне материальным, высокостабильным физическим процессом, характеризуемым указанным стабильным периодом или частотой излучения атома цезия-133, который, именно в силу своей стабильности и инвариантности по отношению к любым системам рассматриваемой метасистемы, может рассматриваться в качестве меры-изоморфизма, с точностью до которой будут определяться и сравниваться «движения» (изменения) компонент

вектора состояния в системе или в группе систем. Нужно «лишь» задаться единой для всех систем «точкой отсчета» независимой переменной и синхронизировать с этой точкой начало всех процессов движения в системах, то есть выбрать общее «сечение» всех процессов, проходящее через эту точку. *Под «движением» как раз и будем понимать изменения компонент вектора состояния системы* (*систем*) *в сравнении с изменением общей для компонент вектора состояния независимой переменной и с точностью до введенной на ней меры-изоморфизма. То есть движение всегда заведомо относительно.* Вместе с тем выбор (назначение) единой «точки отсчета» и «синхронизация» относительно нее всех процессов движения в разных системах является, как известно, далеко нетривиальной проблемой.

Таким образом, на наш взгляд, в «мире» взаимодействующих систем и вообще в некоторой метасистеме, в которую этот «мир» погружен, время вряд ли стоит рассматривать как самостоятельный и независимый ни от чего, равноправный с «пространством» метасистемы физический феномен. Мы исходим из того, что это «пространство непустое» и заполнено, пусть и неравномерно, некоторой «материальной» субстанцией. Вполне допустимо, что эта субстанция не обладает свойством непрерывности, является «дискретной» в том смысле, что почти вся содержится в множестве отдельных «элементов», заполняющих, тем не менее, все «пространство» и неким образом взаимодействующих между собой. С определенными стабильными периодическими физическими процессами в некоторых «элементах» этой субстанции, как мы показали, это «время» и соотносится: изменение-«движение» одних процессов в «пространстве системы» может быть охарактеризовано с точностью до темпа изменения других процессов. Например, за один оборот Земли вокруг своей оси происходит определенное количество периодов излучения атома цезия-133. Дополнительным аргументом в пользу материальности, а не умозрительности «времени» является его тесная связь, с учетом постоянства скорости света в вакууме (как мировой константы-изоморфизма), с единицей измерения длины или «мерой пространства»: метр — это расстояние, проходимое светом в вакууме за 1/299 792 458 долю секунды.

С учетом этих рассуждений причинность нужно рассматривать в более широком смысле, так как она не определяется временем, а обусловлена изоморфностью отображения (*оператора-структуры*) *f системы, которое может быть записано не только относительно времени, а и в пространстве некоторой другой внутренней или внешней независимой переменной по отношению к переменным вектора состояния системы. Причинность определяет взаимно-однозначную связь событий* (*состояний*) *в системе относительно* (*с точностью до*) *этой независимой переменной, рассматриваемой в качестве единой,*

«независимой» ни от чего в этой системе, переменной-меры. При этом под «мерой» будем понимать некоторую «часть» этой переменной (*«секунду», «час», «год» и т.д.*), *рассматриваемую в качестве «константы-меры», с точностью до которой или, точнее, с периодичностью которой будем фиксировать все изменения* («*движение*») *других переменных*.

Под событием (*состоянием*) будем понимать совокупность (вектор) конкретных «мгновенных» значений «зависимых» переменных, характеризующих систему при строго определенном значении «независимой» переменной, то есть «событие» или «состояние» определяется совокупностью или «сечением-срезом» всех «мгновенных» значений величин (по отношению к некоторому «замороженному» значению независимой переменной), так или иначе характеризующих любые изменения в системе или в группе систем по отношению к какой-либо единой и общей для них независимой переменной.

Как уже было показано, выбор «независимой» переменной в системе, относительно которой определяются значения («изменение-движение») всех других переменных, может быть достаточно произвольным. При этом «движение» (изменение событий-состояний) системы можно рассматривать с точки зрения внутренней независимой переменной (служащей изоморфизмом-мерой, с точностью до которого «наблюдаются» события внутри системы), либо с точки зрения внешней по отношению к системе независимой переменной (служащей внешним изоморфизмом-мерой, с точностью до которого, например, «наблюдаются» и сравниваются события сразу в нескольких системах). Использованное здесь интуитивно ясное понятие «наблюдения» событий в системе и более фундаментальное понятие «наблюдаемости» систем более детально будет рассмотрено ниже.

Таким образом, принцип («постулат») причинности, как и общий принцип изоморфизма, в общем случае следует рассматривать как «вдоль» соответствующего изоморфного отображения (характеризующего независимую переменную с введенным на ней изоморфизмом-мерой), связывающего события в системе, так и «поперек» - как изоморфизм различных форм-отображений такой взаимно-однозначной связи событий: применительно к динамической системе примером такого изоморфизма форм является взаимно-однозначная связь записей уравнений ее модели в форме стационарной системы дифференциальных уравнений и в операторной форме Лапласа (см. пояснения к рис. 2.3). Взаимно-однозначный переход от одной формы к другой и наоборот осуществляется посредством прямого и обратного преобразования Лапласа.

Во временной области «машина времени», часто понимаемая как нечто, позволяющее переносить (*см. рис.*2.1) *множество* (*событие-следствие*) $Y(t)$

непосредственно в множество (событие-причину) $X(t_0)$ *так, что при* $t \to t_0$ *и в пределе при* $t = t_0$ *выполняется неравенство* $Y(t) \neq X(t_0)$*, не существует, если не рассматривать тривиальный случай, когда, наоборот,* $t_0 \to t$*, то есть* t_0 *является не прошлым, а настоящим моментом времени. Но и в этом случае указанное неравенство не выполняется, так как при* $t_0 = t$ *выполняется именно равенство* $X(t_0{=}t) = Y(t)$*. Под «машиной времени», как физико-математической абстракцией, следует понимать отображение-изоморфизм f, позволяющее взаимно-однозначно пересчитывать* $Y(t)$ *в* $X(t_0)$*, то есть лишь устанавливать между этими событиями взаимно-однозначное соответствие и не более того.*

***Следствие* 4** (о детерминированности «случайностей»). *Любое наблюдаемое в данный момент в простой формальной* (*абстрактно-алгебраической*) *системе «случайное» событие представляет собой многомерный вектор-следствие, детерминированный* (*обусловленный*) *строго определённым многомерным вектором-причиной.* «Случайность» событий в простой системе обусловлена ее субъективной «необозримостью», связанной с тем, что простая система является большой.

Кажущаяся «случайность» наблюдаемого вектора-события и стохастизм, как непрерывная цепь случайных событий, обусловлены, как правило, неочевидностью схождения «в одно и то же время и в одном месте» множества элементарных следствий, детерминированных (обусловленных) множеством «непредсказуемых», на первый взгляд, элементарных причин.

В целом «случайность» есть векторная закономерность, обусловленная «пересечением» (в математическом смысле) в некоторой точке «отображения-пространства» системы сразу множества строго детерминированных локальных процессов. Такое «пересечение», по мнению наблюдателя, часто даже погруженного в «пространство системы», но не имеющего возможности «охватить взором» все процессы в системе, есть «случайное событие», происшедшее «здесь и сейчас».

Таким образом, в большой простой системе «случайность» и стохастизм явления «кажущиеся», обусловленные наличием векторных закономерностей: одновременным либо последовательным результатом воздействия множества локальных закономерностей в одной или многих точках «внутреннего пространства» системы.

В рамках рассматриваемой теории *важны роль и место «наблюдателя». Детерминистский подход* соответствует «внутреннему» (изнутри) описанию системы в части точно известного о ней (с точностью до изоморфной модели). Сто-

хастизм здесь, как уже указывалось, может быть только «кажущимся», «субъективным», связанным с тем, что простая система является большой. *Вероятностный подход* больше соответствует «внешнему» (с точки зрения внешнего *наблюдателя*) подходу к описанию системы как «чёрного ящика» или в наших терминах – как сложной, непредсказуемой для внешнего наблюдателя системы, точная изоморфная модель поведения которой у него отсутствует.

В качестве примера приведем интерпретацию положения в современной физике: в ней детерминистский подход характерен для макромира и соответствующих ему взглядов «изнутри» и моделей-описаний (специальная и общая теория относительности, физические законы и др.), а вероятностный подход – для микромира и соответствующим ему взглядам «извне» и моделей-описаний (квантовая физика). Причем «объединить» эти две «физики» посредством некоторой «теории всего» не удается. Причина в том, что «макромир» человек-наблюдатель изучает, находясь внутри него, с точностью до вполне осязаемых «мер-изоморфизмов», а «микромир» - извне. С помощью известных и доступных наблюдателю мер-изоморфизмов проникнуть внутрь *систем микромира* не удается. Поэтому такие микросистемы изучаются не как целое, а по частям – после разрушения в результате специально организованных столкновений с другими микросистемами (например, с использованием большого адронного коллайдера - БАК). При этом в процессе экспериментов средства измерений (и используемые меры-изоморфизмы) в лучшем случае соизмеримы, а то и много больше измеряемых микросистем. Это приводит к тому, что *сам процесс наблюдений и измерений непосредственно влияет на свойства микросистем, их составных частей и, как следствие, непосредственно на сам результат измерений – возникает так называемый «эффект наблюдателя» в квантовой физике*. Мало того, свойства составных частей после разрушения микросистем в результате исследовательских столкновений могут быть совершенно иными в сравнении со свойствами, которыми они обладают в микросистеме с учетом эффекта эмерджентности – см. определение номер 2 формальной (абстрактно-алгебраической) системы.

Таким образом, исследователь-наблюдатель, во-первых, напрямую влияет на изучаемый объект-микросистему в процессе наблюдения и, во-вторых, как результат, наблюдает у составных частей микросистем не те свойства, которыми они обладают в микросистеме, как целостном объекте микромира. Ясно, что такие эксперименты могут привести как минимум к некорректным, а возможно и вообще к ложным выводам. *Вообще указанная граница между макро- и микромиром, обусловленная местом наблюдателя и его возможностями по использо-*

ванию соответствующих мер-изоморфизмов, остро ставит философско-мировоззренческий вопрос о познаваемости микромира, существовании границ этой познаваемости и т.д.

На практике, в инженерных дисциплинах применительно к макросистемам часто используется *«смешанный» подход*, в рамках которого точно известное о системе содержится в детерминированной части модели, а не до конца изученные внешние факторы, лежащие за пределами детерминированной части (т. е. за пределами простой подсистемы более общей сложной системы), описываются стохастически – посредством моделей некоторых «шумов» и возмущений, воздействующих на детерминированную изоморфную модель. Тем не менее и в этом случае случайность и стохастизм не являются абсолютными: модели «шумов» и возмущений задаются с точностью до некоторых законов распределения. И даже в этом случае «случайные» «шумы» и возмущения не так просто подыграть, так как получить даже «псевдослучайные» величины в инженерной практике достаточно сложно.

Тем не менее, строго говоря, утверждение о детерминированности всех процессов относится только к простым системам, замкнутым относительно известных первосистем-изоморфизмов (например, в физике, относительно скорости света в вакууме и других мировых констант). Можно предположить, что поскольку эти изоморфизмы действуют и в сложной, глобальной, «открытой» формальной абстрактно-алгебраической системе, то утверждение о фактическом отсутствии случайностей (назовем это *«принципом детерминизма»*) справедливо и для нее. Просто границы этой глобальной системы слишком обширны и их замкнутость относительно группы естественных изоморфизмов не до конца очевидна.

Вместе с тем *вопрос существования «глобальной» простой системы с соответствующей коммутативной диаграммой, то есть вопрос о замыкании границ глобальной абстрактной метасистемы совокупностью простых первосистем-изоморфизмов, остается открытым. Если предположить, что метасистема замкнута, то она обязательно будет простой, детерминированной, полностью предсказуемой и познаваемой* (*с точностью до соответствующих изоморфизмов-метрик*) *системой.*

***Следствие* 5** (о принципе относительности в теории систем). *Известный в физике общий принцип относительности в математическом смысле представляет собой прямое следствие общего принципа изоморфизма и фундаментальной леммы. По сути впервые вводится и принцип относительности в математике, в алгебре, в которой, казалось бы, не может быть ничего относительного по определению.*

Действительно, не являющееся «первосистемой»-скаляром отображение может менять свои свойства в зависимости от (относительно) того, какой изоморфной «первосистемой» оно коммутируется в некоторой композиции с другим отображением в той или иной системе, характеризуемой соответствующей коммутативной диаграммой. В теоретической физике это может трактоваться как строгое *алгебраическое обоснование общего принципа относительности. В алгебре, как следует из основной леммы, свойства одних и тех же отображений могут меняться в зависимости от того, рассматриваются они сами по себе, отдельно от других отображений, или в некоторой композиции, замыкающей* (*реализующей*) *какой-либо изоморфизм, то есть в системе*.

Каждая коммутативная диаграмма (рис. 2.1), построенная на каком-либо естественном изоморфизме, по существу определяет «систему отсчёта», в которой все измерения производятся с точностью до этого изоморфизма. Указанный изоморфизм можно рассматривать в качестве внутренней «константы-меры» этой системы отсчета, относительно (с точностью до) которой определяются все процессы в этой системе отсчета.

Таким образом, как следует из сказанного, по сути, *принцип относительности впервые вводится и в математике и обретает ясный математический смысл*: одни и те же неизоморфные вне коммутативных диаграмм отображения-модели объектов в разных коммутативных диаграммах имеют разные обратные относительно (с точностью до) их внутренних «констант»-изоморфизмов и, следовательно, ведут себя по-разному. Более того, как мы отметили в комментариях к следствию 1, *менять свои свойства после включения в систему и соответствующую коммутативную диаграмму могут не только неизоморфные вне коммутативных диаграмм отображения, но и изоморфные, если они не являются* «*системообразующими*» *изоморфизмами-целями*. Сказанное поясняется примером в первом разделе 2-й части книги при рассмотрении задачи о регуляторе. Следовательно, принцип относительности в теории систем и в математике имеет отношение к весьма широким классам соответствующих явлений и объектов исследований.

Такие особенности «системного эффекта» (*эмерджентности*) *можно рассматривать в качестве проявления общего принципа относительности.*

С л е д с т в и е **6** (о фундаментальных свойствах систем). *Контролируемость, наблюдаемость, управляемость, идентифицируемость и другие фундаментальные свойства систем суть частные случаи* (*проявления*) *общего принципа изоморфизма* (*фундаментальной леммы*).

Пояснения данного следствия подробно рассматриваются далее в отдельных главах.

***С л е д с т в и е* 7** (о принципе суперпозиции в теории систем). *Известный в математике, физике и химии применительно к линейным системам принцип суперпозиции, проявляемый в форме свойства аддитивности, справедлив и в более общем случае по отношению к изоморфным системам общего вида и в математическом смысле представляет собой прямое следствие и некоторую локальную «проекцию» общего принципа изоморфизма и фундаментальной леммы.*

Более глубоко указанное более расширенное толкование принципа суперпозиции пояснено ниже в отдельной главе.

***С л е д с т в и е* 8** (о цели системы). *Любая система является средством реализации цели, формализуемой изоморфизмом f.*

Как следует из определения «абстрактной системы» и коммутативной диаграммы, показанной на рис. 2.1 применительно к основной лемме, указанная *диаграмма в* наиболее компактной, *канонической форме отражает суть понятия* «*абстрактная система*. Для удобства дальнейших пояснений повторим указанную диаграмму здесь на рис. 3.4 именно как *каноническую форму коммутативной диаграммы системы*.

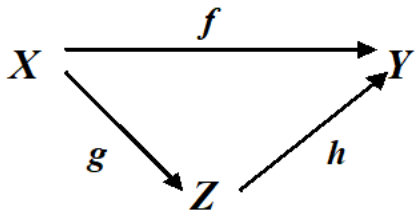


Рис. 3.4. Каноническая форма диаграммы системы

В любой системе отображение *f*, которое должно быть «безусловным» изоморфизмом и вне ее, то есть вне коммутативной диаграммы, является *носителем цели системы* (информации о цели) или, как иногда говорят, *системообразующим фактором*. Этот фактор мы упоминали и в комментариях к следствию 1.

Целью системы *f* на рис. 3.4 является изоморфное преобразование данных (некоторой сущности) *X* в данные (сущность) *Y*. Весьма часто оказывается, что непосредственно, прямо от *X* к *Y*, используя *f*, перейти невозможно. Однако *цель f становится достижимой, если ее удается реализовать посредством композиции hg=f* подходящих отображений *h* и *g, то есть прибегнуть собственно к реализации* (*построению*) *системы*. Таким образом, действительно можно утверждать, что *любая система является средством реализации цели, формализуемой изоморфизмом f*, то есть *любая абстрактная система есть композиция отображений, реализующая* (*коммутирующая*) *изоморфизм-цель*.

Применительно к техническим системам в качестве примера можно привести потребность и соответствующую процедуру создания некоторого объекта *Y*, точно и полностью отвечающего заданному техническому облику *X*. Технический облик представляет собой гипершар, ограничивающий совокупность требований типа «масса не более…», «энергопотребление не более…» и т.п., содержащихся в документе, называемом «Техническое задание». По сути, неявно подразумевается необходимость обеспечения некоторого изоморфизма *f*, отражающего взаимно-однозначное соответствие между обликом (совокупностью требований) *X* и созданным объектом *Y*. Отметим, что в этом случае изоморфизм *f* может быть неединственным, так как любой вариант объекта *Y*, отвечающий некоторому подмножеству требований, лежащему внутри гипершара *X*, устроит заказчика. Однако, как только конкретный вариант требований из *X* и соответствующего объекта *Y* будет выбран и зафиксирован, автоматически неявно фиксируется и отвечающий им экземпляр изоморфизма *f*.

Непосредственно по *f* построить объект *Y* невозможно, так как, во-первых, изоморфизм *f подразумевается, но неизвестен* и, во-вторых, для обеспечения *f* и создания объекта *Y* нужны некоторые, также пока неизвестные, материальные *ресурсы*. *В связи с этим изоморфизм f реализуют* «*физически*» посредством композиции отображений $hg=f$, то есть *создают систему разработки*, показанную на рис. 3.4, реализующую *процесс системного проектирования* путем последовательного выполнения взаимосвязанных (коммутируемых между собой) преобразований *h* и *g*, где под *g* понимается процедура декомпозиции требований *X* до уровня, позволяющего выбрать или создать соответствующие им компоненты ресурсов, реализующие локальные цели, а под *h* – процедура интеграции компонентов ресурсов в создаваемый объект *Y*.

Такой процесс проектирования, как эвристический, давно применяется на практике в форме *так называемого V- процесса*, регламентированного международными нормативными документами – руководствами по проектированию. Таким образом, применительно к системному проектированию введенная нами цель-изоморфизм *f* и реализующая ее композиция $hg=f$ в форме системы проектирования, показанной на рис. 3.4, формально строго описывает процесс проектирования искусственных систем. Для пояснения следствия 8 такой интерпретации процесса системного проектирования достаточно. Более глубоко содержательный аспект и процедура формализации этого процесса рассмотрены во втором разделе 2-й части книги.

Далее интерпретацию следствия 8 рассмотрим применительно к естественным системам на примере биологических объектов. Одним из важнейших признаков живого является *способность к самовоспроизводству, к репликации, к*

многократному самокопированию. Не вдаваясь в тонкости молекулярной биохимии отметим, что, например, процесс репликации «молекулы жизни» ДНК (дезоксирибонуклеиновой кислоты) полностью отвечает формальному описанию с помощью «*системы самовоспроизводства живого*», характеризуемой целью-изоморфизмом f и реализующей эту цель композицией $hg=f$ – см. рис.3.4.

Цель-изоморфизм f в биологии «неявно» подразумевает многократное последовательное точное и полное самовоспроизводство (самокопирование) биологических объектов на всех уровнях проявления феномена жизни *для обеспечения их выживания* как родов, видов и, вообще, различных классов живых объектов в условиях агрессивной внешней среды.

Основной биологический принцип «копирования» живого, часто называемый принципом «ключ-замок» или принципом комплементарности, полностью соответствует рассмотренному здесь формально-математическому описанию с помощью системы-композиции $f=hg$, где f в данном случае тождественный изоморфизм, точно «отображающий в себя» или, более корректно, «копирующий» некий биологический объект в точно такой же объект-клон. В этой «системе самовоспроизводства живого» отображение-«ключ» g «точно подходит» к *обратному* к нему с точностью до изоморфизма-цели f отображению-«замку» h и «открывает дверь» (реализует цель) f, то есть система-композиция $f=hg$ «переносит» объект за «дверь», что равносильно тождественному отображению (точному и полному копированию) объекта X, находящегося перед мнимой «дверью», в полностью идентичный ему объект Y уже за ней. По такому же принципу «работают» ферменты, проникают в клетки хозяина и размножаются в них вирусы и т.д. Подробное описание процессов *воспроизводства* и *эволюции* живого в терминах и в интерпретации рассматриваемой алгебраической теории еще только предстоит, а здесь в качестве примера рассмотрим в самых общих чертах самокопирование молекулы ДНК.

Применительно к ДНК цель-изоморфизм f «неявно» подразумевает создание в процессе репликации новых дочерних молекул ДНК Y, полностью *идентичных* материнской молекуле X, то есть подразумевается, что в данном случае отображение-изоморфизм f *является тождественным*, абсолютно точно и полно преобразующим материнскую молекулу ДНК в себя и в точно такую же дочернюю молекулу. Под преобразованием-отображением g в данном случае подразумевается процесс расплетения с помощью специальных ферментов двойной спирали материнской ДНК на две нити (аналогичный процессу детализации требований в предыдущем «техническом» примере), а под преобразованием-

отображением h – процесс достраивания (опять-таки по принципу комплементарности) *с использованием ресурсов соответствующей материнской клетки* второй нити на каждой из образовавшихся после преобразования g нитей материнской ДНК. В результате образуются две идентичных молекулы ДНК, которые затем скручиваются в отдельные спирали, то есть, по сути, в дополнение к одной материнской молекуле ДНК создается (точно «копируется») полностью идентичная ей вторая - дочерняя.

В ходе последующего деления материнской клетки каждая дочерняя клетка получает по одной копии молекулы ДНК, идентичной ДНК материнской клетки. Этот процесс обеспечивает точную передачу генетической информации из поколения в поколение, а сам процесс деления материнской клетки и последующего точного ее воспроизведения в дочерних клетках также полностью отвечает *математическому описанию в форме рассмотренной* «*системы самовоспроизводства живого*».

Более того, с учетом сказанного *можно утверждать, молекула ДНК потому и содержит двойную спираль, что она является ничем иным, как композицией* $hg=f$, постоянно *хранящей* и каждый раз *воспроизводящей* (*реализующей*) *в новом цикле жизни одну и ту же цель* f, то есть воспроизводящей один и тот же биологический объект *посредством выполнения взаимно обратных отображений-преобразований* g (1-я ветвь) и h (2-я ветвь).

В молекуле ДНК «ключ» g хранится вместе с «замком» h и после их разделения при формировании новых молекул ДНК, как по слепку, по «ключу» g достраивается «замок» h и, наоборот, – по «замку» h достраивается «ключ» g. Сама молекула ДНК, как «молекула жизни», обеспечивает точное самокопирование зашифрованного в ней живого биологического объекта, как это показано на рис. 3.5.

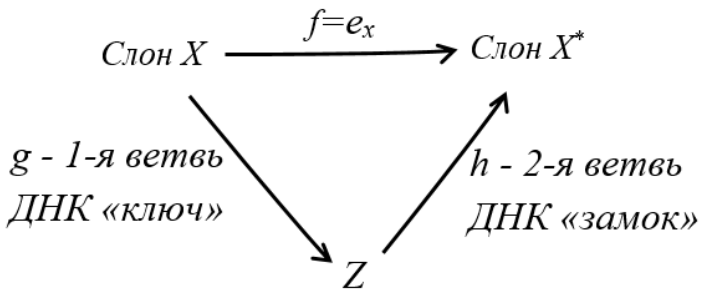


Рис. 3.5. Репликация биологического объекта молекулой ДНК

На этом рисунке *тождественный изоморфизм* $f=e_x$ обеспечивает точное воспроизводство «слонов» посредством молекулы ДНК, в которой две ветви-отображения g и h в силу тождественности изоморфизма $f=e_x$ *являются взаимно*

обратными с точностью до этого изоморфизма («ключ» g точно подходит к «замку» h): *в результате реализации тождественного изоморфизма-цели f программой-композицией $hg=f$ отображений g и h «Слон X» обязательно породит другого, но точно такого же «Слона X^*» и никакое другое существо.*

На самом деле рис. 3.5 иллюстрирует не только сам факт воспроизводства (самокопирования) биологических объектов, но и «систему *развития* живых объектов» в их жизненном цикле. Дело в том, что *гены можно рассматривать в качестве некоторых «элементарных звеньев-операторов»* по аналогии с теорией автоматического регулирования (ТАР) в технической кибернетике и ее типовыми элементарными звеньями (усилительное звено, интегрирующее звено, дифференцирующее звено, колебательное звено), определяющими характер протекания соответствующих «элементарных переходных процессов». Из элементарных звеньев формируется цельная *передаточная функция* динамического объекта и соответствующий ей интегральный переходный процесс.

В случае же генов-операторов, содержащая определенную их совокупность ДНК биологического объекта, как и передаточная функция технического объекта, определяет *операторную программу и зашифрованную в ней динамику развития* живого организма, а также его конечное, финитное состояние (закон эквифинальности по Л. фон Берталанфи [67-70]), соответствующее окончанию программы и выходу организма в некое финишное, наиболее развитое состояние, в котором его дальнейшее развитие невозможно. Причем, как в передаточной функции технического объекта элементарные звенья действуют взаимосвязанно и согласованно фактически все сразу, так и в живом организме гены в динамике его зарождения и развития действуют взаимосвязанно, интегрально, проявляя себя *в общей гармонии и программе развития организма* по-разному в каждый момент времени. Таким образом, ДНК в терминах ТАР можно интерпретировать и как некоторую «операторную передаточную функцию», хранящую программу развития организма, запускаемую в момент его зарождения. Операторами в этой «передаточной функции» являются гены.

Вообще, в этом смысле между техническими и живыми объектами наблюдается почти полная аналогия. Поэтому биологам важно изучать ТАР как весьма упрощенную модель, позволяющую лучше понимать развитие живых организмов.

Во второй главе и здесь в комментарии к следствию 3 на примере из ТАР мы уже показали *полную эквивалентность* (*изоморфность*) *статики и динамики при описании модели объекта* с учетом взаимной обратимости передаточной функции объекта в операторной форме Лапласа и соответствующей ей системы линейных стационарных дифференциальных уравнений.

В данном случае ДНК есть средство хранения наследственной информации о биологическом объекте в операторной форме. Операторами, как мы уже отмечали, являются гены. Операторная форма это «замороженная», «статичная» форма хранения информации о динамике, развитии и вообще изменении («*движении*») *объекта в течение жизненного цикла.* Она удобна именно как форма длительного хранения информации о «*программе движения*», программе изменений во времени, программе развития объекта. Программа активируется при попадании ее носителя в благоприятные условия. «Запуск» динамики развития биологического объекта, то есть переход от *операторной формы хранения* к «*временно`й форме*» *реализации наследственной информации*, осуществляется в момент зарождения живого организма в форме одной «точки»-клетки. Дальнейшее его развитие во времени осуществляется по программе, зашифрованной в ее ДНК с использованием ресурсов сначала материнского организма, а затем внешней среды.

Начальное, «первое предельное состояние» динамики организма, «прошитое в программе» ДНК – единственная клетка X, соответствующая, по сути, максимально «сжатой точке», в которой эта программа «запускается» и начинается развитие – см. рис. 3.5. Конечное, «второе предельное состояние» Z динамики организма также, очевидно, «прошитое в программе» ДНК, соответствует максимально «расширенному», предельно развитому, финитному состоянию организма и окончанию программы его жизненного цикла, приводящему, по сути, к смерти, так как дальнейшее развитие не предусматривается, а действие факторов внешней и внутренней среды только усугубляется.

Таким образом, отображение g является развивающе-«расширяющим». Программа обязательно предусматривает, что в процессе жизни организм посредством обратного «сжимающего» отображения h «переходит в состояние точки-клетки» X^*, то есть порождает полностью идентичный себе биологический объект. Более подробно о предельных состояниях системы, «сжимающих» и «расширяющих» отображениях мы поговорим в конце этой части книги применительно к информационным системам

На каждой ступени эволюции ДНК в ее программе «прошита» одинаковая для всех экземпляров организмов данного типа (класса), предопределенная и ограниченная продолжительность жизни. Однако реализация полной программы, хранящейся в ДНК, не гарантируется: по разным причинам программа может окончиться и досрочно (болезни, неблагоприятные условия внешней среды). Эволюция ДНК, очевидно, продолжается, но зашифрованная в ее «программе» потенциальная продолжительность жизни для каждого вида организмов может быть установлена лишь статистически.

Существуют и другие теории самовоспроизводства, основанные на самокопировании живого. Например, в рамках известной научно-популярной концепции «эгоистичного гена» Ричарда Докинза тела живых существ рассматриваются как своего рода вспомогательные пространства-носители или, в наших терминах, отображения, позволяющие реплицировать, то есть тождественно отображать некоторые множества множеств генов, образующих, например, молекулу ДНК, в самих себя.

Применительно к нашей теории это ничего не меняет и, более того, подтверждает саму возможность и такой ее интерпретации применительно к живому: в этом случае тождественный изоморфизм между множествами множеств генов (множествами молекул ДНК) некоторого класса реализуется посредством композиции отображений в форме множества тел-носителей (живых организмов) соответствующего класса и обратного им множества-отображения, порождающего в процессе размножения новые множества множеств генов того же класса, то есть множество множеств генов копируется само в себя либо непосредственно, напрямую («вегетативно»), либо опосредованно (путем «полового размножения» в форме композиции «мужской» особи-отображения и «женской» особи-отображения).

В заключение иллюстрации следствия 8 рассмотрим еще один пример, относящийся к области естественных систем другого рода. В настоящее время в космологии применительно к Вселенной, по сути, общепринятой является теория Большого взрыва. Здесь и далее не будем цитировать весьма многочисленные источники, характеризующие эту теорию и ее варианты, чтобы не обидеть какого-либо автора, оказавшегося «забытым».

Если взглянуть на процессы эволюции Вселенной «в большом», отвлекаясь от тонких физических явлений, природа которых во многом не ясна и самим физикам, то когда-то Вселенная находилась в состоянии «сингулярности» (или «пришла» в это состояние), то есть представляла собой некую «точку», нечто материальное в которой (вещество, энергия?) в результате неизвестных процессов было сжато до максимально-предельной плотности, а затем произошел Большой взрыв и сейчас, по наблюдениям физиков-экспериментаторов, Вселенная находится в состоянии расширения с ускорением. Существует очень большое число теорий эволюции Вселенной, опирающихся на этот экспериментальный факт. Здесь не место для их анализа. Отметим лишь две группы теорий. Одна предполагает единственный Большой взрыв, а затем последующие расширение и сжатие, а вторая группа в своей основе предполагает возможность эволюции по типу «циклической Вселенной», то есть возможность многократного повторения указанного цикла.

Вполне очевидно, что обе эти группы теорий могут быть строго формально описаны на системном уровне рассмотренной моделью-композицией $f=hg$, проиллюстрированной на рис. 3.4. Здесь, как и в случае «самокопирования» живых объектов, отображение-изоморфизм f *является тождественным*, абсолютно точно и полно переводящим точку «сингулярности» саму в себя посредством композиции «расширяющего» g и «сжимающего» h отображений. Коммутативная диаграмма на рис. 3.4 иллюстрирует полный цикл эволюции Вселенной и является «системой эволюции Вселенной». Некоторый «срез», соответствующий любой точке на линии отображения-стрелки, характеризует «мгновенное» состояние «пространства» Вселенной.

В состоянии Z Вселенная находится в максимально расширенном, «натянутом до предела» состоянии, из которого обязательно начнется ее сжатие. Состояние Z – другое предельное, максимально расширеннное, «сингулярное» состояние Вселенной. Это не значит, что после состояния Z «время повернет вспять». Это значит, что начнется новая «ветвь развития», на которой будет реализовано другое «время», соответствующее «сжимающему» отображению h.

Отметим, что, вообще говоря, математика допускает неединственность композиции $hg=f$, реализующей один и тот же изоморфизм f, переводящий Вселенную саму в себя. Потенциально в новом цикле эволюции может возникнуть композиция $h^*g^*=f$ других отображений g^* и h^*, реализующих тот же самый изоморфизм f, то есть может возникнуть «другая физика» в указанных «пространствах»-отображениях. Но это произойдет в том случае, если «информация» о развитии Вселенной, то есть о композиции hg, нигде не зафиксирована и не хранится, в отличие от биологических объектов. Как уже указывалось, у биологических объектов *молекула ДНК* потому и представляет собой *двойную спираль*, что она *является ничем иным, как композицией* $hg=f$, постоянно *хранящей* и каждый раз *воспроизводящей по одной и той же программе* (жизненному циклу) *одну и ту же цель* f, то есть один и тот же биологический объект от его зарождения до максимально возможного и допустимого программой ДНК развития. Есть ли такая «молекула ДНК у Вселенной», хранящая свою *композицию* $hg=f$, каждый раз реализующую одну и ту же цель f ее развития, нам неизвестно.

Вообще, применительно к развитию и эволюции (не нужно путать эти понятия) Вселенной возникает много и других интересных вопросов, обсуждение которых выходит за рамки этой главы. В качестве примера обозначим вопрос о единственности Вселенной. Второй интересный вопрос: откуда математика «знает», как «действовать» физике, химии, биологии и, вообще, «существовала

и существует ли» математика раньше физики. Представляется, что между математикой и физикой существует некоторый изоморфизм, который «заставляет» их «действовать» «одновременно» и «синхронно». Все термины в кавычках должны быть определены. Эти и другие вопросы применительно к биологии, космологии и физике в целом требуют специального рассмотрения в рамках развиваемой алгебраической теории систем. Важно то, что общепринятые теории в биологии, физике и других естественных науках, опирающиеся на научные факты, полностью «вписываются» в формально-математическую структуру новой научной парадигмы в теории систем, а «механизм» и «движущие силы» развития рассматриваемых в этих дисциплинах объектов хорошо объясняется средствами математического языка новой теории.

Приведенные примеры, в которых под изоморфизмом f подразумевалось тождественное отображение, точно копирующее некоторый объект посредством композиции $hg=f$, позволяют ввести еще одно достаточно очевидное следствие к основной лемме, теореме о реализации и определениям базовых понятий теории систем – следствие 9, приведенное ниже.

***С л е д с т в и е* 9** (об общем принципе изоморфизма в сильной формулировке). *Каждый реальный, либо абстрактный объект самоидентичен, то есть тождественно изоморфен самому себе*.

По сути, *это очевидная и интуитивно понятная аксиома*. Как мы уже убедились на ряде примеров, этой единственной, непротиворечивой самой себе аксиомы вполне достаточно для развития теории, описывающей широкий класс систем, характеризующих преобразования некоторых объектов (сущностей) и процессов. В такой системе, реализованной по определению на тождественном изоморфизме, некоторый объект в целом и каждый его компонент вместе с правилами («законами») взаимодействия компонентов могут абсолютно точно и полно отображаться в себя *тождественным изоморфизмом* f как непосредственно (напрямую), так и опосредованно – с помощью композиции-реализации $hg=f$.

Вместе с тем эта «аксиома» является следствием общего принципа изоморфизма. Казалось бы, это следствие тривиально, так как является *усилением в математическом смысле* общего принципа изоморфизма, который в исходной формулировке не накладывал ограничений на изоморфизм f. Однако из этого следствия, ограничивающего классы рассматриваемых изоморфизмов существенно *более узкими классами тождественных изоморфизмов*, проистекают важные для естествознания и практических приложений теории систем выводы. Некоторые примеры, иллюстрирующие и комментирующие применение общего

принципа изоморфизма в сильном варианте к общезначимым естественным системам, обсуждались выше. Поэтому представляется целесообразным и даже необходимым выделение этого следствия как специального, отдельного. Ссылаться на это следствие мы будем и в дальнейшем. При этом не будем забывать, что все сформулированные следствия, их интерпретации и примеры рассматриваются нами только и строго в границах алгебраической теории систем, опирающейся на общий принцип изоморфизма в исходной, либо в сильной формулировке. Мы не случайно сказали о *более узких классах тождественных изоморфизмов* в множественном числе. Нами уже приводились примеры (см. пример в приложении к первой части), показывающие, что даже для матриц *класс тождественных изоморфизмов не единственен.* Этот факт будет использоваться и в дальнейшем.

С л е д с т в и е **10** (о предельных, финитных состояниях в системах). *Каждый реальный* (*материальный*) *или «виртуальный»* (*абстрактный*) *объект в своей системе развития ограничен предельными состояниями*.

В рамках следствия 10 предполагается, что *в общем случае изоморфизм f может быть любым* и, в частности, тождественным. Как и ранее предполагается также, что существует реализующая его композиция $hg=f$. Хотя следствие 10 носит весьма общий характер и справедливо для любых изоморфизмов, реализуемых в системе указанной композицией, далее более подробно рассмотрим случай тождественного f.

В комментариях к следствию 8 мы уже показали на примерах, что любой объект в системе, реализованной на тождественном изоморфизме и определяющей «жизненный цикл» этого объекта, достигает двух предельных состояний. Одно предельное состояние – некоторая максимально сжатая «точка», второе - предельно расширенное, растянутое состояние, эквивалентное некоторому «гипершару» максимального «объема», характеризующему объект (сущность) в состоянии максимального «развития», предусмотренном его «программой» в системе.

Пример перехода от «точки» к максимально расширенному состоянию мы приводили и в конце главы 2, прямо не говоря об этом. Однако в некоторых системах, наоборот, начальным может быть предельно расширенное, растянутое состояние, из которого система затем переходит («схлопывается») в некоторую «точку». Такой пример приведен в конце приложения к первой части книги в качестве иллюстрации справедливости утверждения основной леммы. Будут приводиться примеры таких систем и в дальнейшем при рассмотрении прикладных аспектов теории в конце первой и во второй части книги.

По сути, следствие 10 содержит формулировку и формализацию строгого доказательства «закона (принципа) эквифинальности» [67-70], ранее введенного Л. фон Берталанфи из эвристических соображений, но в более общем варианте, предписывающем системе иметь не только предельное финальное состояние, но и соответствующее предельное начальное состояние.

Понятно, что предельные состояния в системе жестко между собой взаимосвязаны посредством отображений h и g, композиция которых $f=hg$ реализует тождественный изоморфизм-цель системы $f=e_X$. Таким предельными являются, например, состояния X и Z на рис. 3.5. Состояние Z характеризуется тождественным изоморфизмом e_Z таким, что $Z\equiv Z^*$. Взаимосвязь тождественных отображений-единиц e_X и e_Z показана на рис. 3.6. В соответствии с условиями основной леммы и теоремы о реализации отображения-единицы e_X и e_Z, действующие соответственно на предельных состояниях X и Z системы, должны удовлетворять условиям (см. рис. 3.5 и 3.6):

$$g=h^{-1}e_X=h^{-1},\ h=e_Xg^{-1}=g^{-1}, \tag{3.1}$$

$$e_X=hg,\ e_X^{-1}=g^{-1}h^{-1}=hg=e_X,\ e_X^{\text{лев}}=g^{-1}g=e_X,\ e_X^{\text{прав}}=hh^{-1}=e_X, \tag{3.2}$$

$$e_X=e_X^{-1}=e_X^{\text{лев}}=e_X^{\text{прав}}, \tag{3.3}$$

$$e_Z^{\text{лев}}=gg^{-1}=gh,\ e_Z^{\text{прав}}=h^{-1}h=gh,\ e_Z=gh,\ e_Z^{-1}=gh=e_Z, \tag{3.4}$$

$$e_Z^{\text{лев}}=e_Z^{\text{прав}}=e_Z=e_Z^{-1}, \tag{3.5}$$

$$e_Xe_X^{-1}=hgg^{-1}h^{-1}=he_Z^{\text{лев}}h^{-1}=hh^{-1}=hg=e_X, \tag{3.6}$$

$$e_X^{-1}e_X=g^{-1}h^{-1}hg=g^{-1}e_Z^{\text{прав}}g=g^{-1}g=hg=e_X,\ e_Xe_X=hghg=he_Zg=hg=e_X, \tag{3.7}$$

$$e_Ze_Z^{-1}=ghgh=ge_Xh=gh=e_Z, \tag{3.8}$$

$$e_Z^{-1}e_Z=ghgh=ge_Xh=gh=e_Z,\ e_Ze_Z=ghgh=ge_Xh=gh=e_Z\,. \tag{3.9}$$

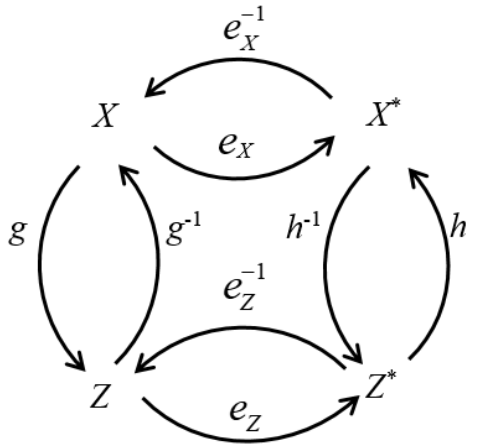


Рис. 3.6. Взаимосвязь предельных состояний в системе

Как видно из условий (3.1) – (3.9), отображения-единицы e_X и e_Z действительно тесно взаимосвязаны и определяют все процессы в рассматриваемой системе. Понятно, что и предельные состояния X и Z между собой жестко взаимосвязаны посредством отображений h и g, так как их композиция $hg=f=e_X$ является тождественным изоморфизмом и на этом изоморфизме реализована вся система.

Отображение-единица e_X, на котором реализована система, является «точечным», так как отображает «точечное» состояние X в себя. В этом случае, наоборот, отображение-единица e_Z, является предельно «расширенным», так как отображает предельно «расширенное» состояние Z в себя.

Как уже указывалось, в общем случае, которому соответствует формулировка следствия 10, *изоморфизм f может быть любым*, не обязательно тождественным. В этом случае $hg=f\neq e_X$ и условия (3.1) – (3.9), как следует из рис. 3.4 и рис. 3.6 с учетом замены на рис. 3.6 e_X на f, приобретут вид

$$g=h^{-1}f,\ h=fg^{-1},\ g^{-1}=f^{-1}h,\ h^{-1}=gf^{-1}, \tag{3.10}$$

$$f=hg,\ f^{-1}=g^{-1}h^{-1},\ e_X^{\,лев}=g^{-1}g=f^{-1}f=e_X,\ e_X^{\,прав}=hh^{-1}=ff^{-1}=e_X, \tag{3.11}$$

$$e_X=e_X^{\,лев}=e_X^{\,прав}, \tag{3.12}$$

$$e_Z^{лев}=gg^{-1}=h^{-1}h=e_Z^{прав},\ e_Z=e_Z^{прав},\ e_Z^{-1}=e_Z^{лев}, \tag{3.13}$$

$$e_Z^{\,лев}=e_Z^{\,прав}=e_Z=e_Z^{-1}, \tag{3.14}$$

$$ff^{-1}=hgg^{-1}h^{-1}=he_Z^{\,лев}h^{-1}=hh^{-1}=e_X^{\,прав}=e_X, \tag{3.15}$$

$$f^{-1}f=g^{-1}h^{-1}hg=g^{-1}e_Z^{\,прав}g=g^{-1}g=e_X^{\,лев}=e_X,\ e_Xe_X=ff^{-1}ff^{-1}=f^{-1}f\,f^{-1}f=e_X, \tag{3.16}$$

$$e_Ze_Z^{\,-1}=h^{-1}fg^{-1}gf^{-1}h=h^{-1}fe_Xf^{-1}h=h^{-1}h=e_Z, \tag{3.17}$$

$$e_Z^{-1}e_Z=gf^{-1}hh^{-1}fg^{-1}=gf^{-1}e_Xfg^{-1}=gg^{-1}=e_Z,$$

$$e_Ze_Z=h^{-1}fg^{-1}h^{-1}fg^{-1}=h^{-1}ff^{-1}fg^{-1}=h^{-1}ff^{-1}h=h^{-1}e_Xh=e_Z. \tag{3.18}$$

На условия (3.1) – (3.9) и (3.10) – (3.18) мы будем неоднократно ссылаться в дальнейшем при рассмотрении различных приложений рассмотренной здесь теории. Например, эти условия позволяют определять обратные g^{-1} и h^{-1} к отображениям g и h в коммутативных диаграммах систем, реализующих заданные изоморфизмы в прикладных задачах.

Вполне очевидно, что в общем случае, когда $f\neq e_X$ и отображение g является «сжимающим», предельное «точечное» состояние X имеет, как правило, меньший «размер пространства» по сравнению с «размером пространства» предельно «расширенного» состояния Z. Конечно в этом общем случае возможен и такой

вариант композиции $hg=f$, в котором размеры указанных пространств будут одинаковыми. Однако, если система строится на изоморфизме f, отображающем состояние X в состояние Y, как на рис. 3.4, то минимальный размер «пространства», соответствующего состоянию Z, не может быть меньше размера изоморфизма f. Это хорошо понятно из примера для матриц, приведенного в конце главы 2, и будет еще не один раз проиллюстрировано в книге при рассмотрении приложений теории.

И, наоборот, в общем случае, когда $f \neq e_X$ и отображение g является «расширяющим», предельно «расширенное» состояние X имеет, как правило, больший «размер пространства» по сравнению с «размером пространства» предельно «сжатого» состояния Z. В этом случае никакой размер «пространства», соответствующего состоянию Z, не может быть больше размера изоморфизма f. Это хорошо иллюстрируется рис. П.8 в конце приложения к первой части книги и приведенным там примером для матриц. Встретятся нам такие примеры и в дальнейшем при рассмотрении приложений теории.

Вообще, как мы установили, *изоморфизмы бывают обыкновенными* (*для матриц – определитель не равен нулю*) *и* «*вырожденными*» *или* «*необыкновенными*» (*для матриц – определитель равен нулю*).

В реализации обыкновенного изоморфизма композицией отображений, то есть в коммутативной диаграмме, в случае матриц ни один из размеров любого отображения, входящего в композицию, не может быть меньше размера обыкновенного изоморфизма. Первое «действующее» отображение в такой композиции является «расширяющим».

В реализации «вырожденного» изоморфизма композицией отображений, то есть в коммутативной диаграмме, ни один из размеров любого отображения, входящего в композицию, не может быть больше размера такого «необыкновенного» изоморфизма. Первое «действующее» отображение в такой композиции является «сжимающим».

Общим является то, что, независимо, обладает изоморфизм f «сжимающим» или «расширяющим» свойством, построенная (реализованная) на нем система «зажата» между двумя предельными состояниями, как это и утверждается в следствии 10.

Возникает вопрос, а что же происходит в системе между предельными состояниями? Ответ такой: в системе происходит процесс преобразования одного состояния в другое по «правилам», «зашитым» в структуре отображений, образующих композицию, реализующую обыкновенный, либо необыкновенный

изоморфизм в соответствующей системе. Отображение и есть правило преобразования чего-то одного во что-то другое. В силу отмеченной жесткой взаимосвязи предельных состояний в системе *между изоморфизмами, отвечающими этим состояниям, также существует взаимно однозначное соответствие*. Это видно и из соотношений (3.1) - (3.9), (3.10) - (3.18) и рис. 3.6. То есть, если изначально задан обыкновенный изоморфизм и реализующая его композиция, то соответствующий необыкновенный изоморфизм может быть легко вычислен с помощью указанных соотношений и наоборот. Более того, оба изоморфизма, по сути, реализуются одной и той же композицией отображений, имея в виду ее обратимость внутри коммутативной диаграммы на рис. 3.6.

Вообще применительно к абстрактной системе можно сформулировать *общий закон сохранения*.

Общий закон сохранения абстрактной субстанции в системе: *любая субстанция (данные, информация, вещество, энергия и др.), поступившая на вход* (*находящаяся на входе*) *системы, реализующей некоторый безусловный изоморфизм* (*обыкновенный, либо необыкновенный*), *проходит в системе полный цикл преобразований, в процессе которых достигает предельных состояний, сохраняется при всех этих преобразованиях и поступает с абсолютной точностью и полнотой на выход системы.*

Слова «*сохраняется при всех этих преобразованиях*» не означают, что, например, в предельно сжатом состоянии хранится вся «субстанция»: часть ее «хранится» или «размыта» в структуре сжимающего отображения-преобразования, в результате действия которого субстанция перешла в указанное состояние

Субстанция может характеризоваться некоторым «вектором состояния» в этой системе. Вообще «вход» и «выход» могут рассматриваться как некоторые условные понятия, характеризующие одно из предельных состояний системы и находящиеся между собой в отношении изоморфизма (обыкновенного, либо необыкновенного). На такой «вход» системы может ничего и не поступать и с такого «выхода» может ничего не выдаваться. Тогда *система будет замкнутой* и *субстанция будет в ней циркулировать* «*вечно*» *между предельными состояниями, сохраняясь в каждом* «*мгновенном*» *сечении соответствующего отображения*, производящего с ней «здесь и сейчас» отвечающие этому отображению преобразования. *В открытой системе* субстанция, поступившая на вход, далее в системе сохраняется и после преобразований, предписанных изоморфизмом-целью, на котором система реализована, с абсолютной точностью и полнотой выдается на выход системы.

Применительно к физическим, химическим, техническим и другим системам это означает, что *в системе осуществляется непрекращающаяся «перекачка» вещества, энергии, информации между предельными состояниями по правилам, диктуемым структурой отображений, образующих композицию, реализующую изоморфизм-цель этой системы*.

Учитывая взаимно однозначное соответствие между статикой и динамикой в системе, на что обращалось внимание в комментариях к следствию 3, например, каноническую коммутативную диаграмму системы на рис. 3.4 можно считать наиболее общей операторной или «статичной» формой системы. Если записать отображения, фигурирующие в этой диаграмме, в форме соответствующих дифференциальных уравнений, то получим взаимосвязанные «блоки» уравнений, отражающие динамику процессов в рассматриваемой системе и тогда можно говорить о «мгновенных» «сечениях» этих процессов по отношению к независимой переменной, относительно которой мы хотим рассматривать или «синхронизировать» все процессы в системе. «Мгновенность» здесь рассматривается в смысле конкретного значения независимой переменной, при котором вычисляются и сравниваются между собой значения всех других переменных.

С л е д с т в и е **11** (об эмерджентности или системном эффекте). *Эмерджентность или «системный эффект», как проявление новых свойств у отображений, включенных в систему, по сравнению со свойствами, которыми эти отображения обладали по отдельности, до их вхождения в систему, обусловлены тем, что эти отображения образуют композицию, реализующую изоморфизм-цель, на котором система построена*.

Несмотря на то, что применительно к другим следствиям и определениям уже говорилось (см. определение 2 и следствие 5), что основная лемма и теорема о реализации фактически формализуют понятие системы и дают строго формализованные, однозначно понимаемые интерпретации соответствующих явлений эмерджентности и «системного эффекта», которые в ней возникают, мы посчитали необходимым выделить это следствие как отдельное, чтобы отметить его особую важность и для того, чтобы специально подчеркнуть, что указанные явления, возникающие в системах обязательно и повсеместно, в рамках общего принципа изоморфизма объясняются и доказываются формально строго, так как непосредственно вытекают из доказательства основной леммы.

Очевидно, что рассматриваемое следствие тесно связано с следствием 5. Оба следствия фиксируют две стороны одного явления, связанного с определяющим и обусловливающим влиянием изоморфизма, на котором построена система, на отображения, составляющие композицию, реализующую указанный

изоморфизм: первая сторона явления, отмеченная в следствии 11, фиксирует сам факт и эффект, называемый эмерджентностью, появления новых свойств у отображений в композиции, замкнутой изоморфизмом; вторая сторона явления, отмеченная в следствии 5, является даже более глубокой, так как фиксирует вариативность (относительность) свойств у одного и того же отображения в зависимости от того, в какие системы это отображение входит.

Главным является то, что отображения, неизоморфные по отдельности, до включения в коммутативную диаграмму, моделирующую систему, становятся в коммутативной диаграмме и в соответствующей системе изоморфными с точностью до изоморфизма-цели, которую они реализуют в составе композиции, замыкающей диаграмму. То есть отображения в системе приобретают новые свойства, что и означает проявление эффекта эмерджентности или, как иногда говорят, «системного эффекта». Причем одни и те же отображения при их включении в разные системы, то есть при реализации разных целей или в разных «системах отсчета» могут иметь разные свойства, что и подчеркивается следствием 5 о принципе относительности. Примеры таких отображений будут приведены далее.

Таким образом, в главах 1, 2 и 3 нами обоснована новая формулировка принципа единственности в форме общего принципа изоморфизма в задаче реализации и предложена формулировка его сильного варианта применительно к более узкому классу систем, а также дана строгая формально-математическая интерпретация указанного принципа в весьма общей алгебраической постановке, позволившая сформулировать и доказать основную (фундаментальную) лемму и теорему о реализации. На основе леммы и теоремы осуществлена общая алгебраическая формализация всех базовых понятий теории систем, а также сформулированы и доказаны важные следствия из принципа изоморфизма и определений систем, относящиеся к понятиям простейших систем или «первосистем», к «измеримости» систем, к познаваемости и причинности (каузальности) систем и более крупных системных образований - метасистем как математических абстракций, а также к общему принципу относительности в теории систем, физике и математике и к свойству эмерджентности, как его проявлению. Следствия, относящиеся к формализации таких фундаментальных свойств систем, как наблюдаемость, управляемость, контролируемость, идентифицируемость, комплексируемость, а также к принципу суперпозиции, подробно анализируются и доказываются ниже. Вернемся мы и к обсуждению следствий о принципе относительности, о цели системы и о ее предельных состояниях.

Глава 4

Алгебраический формализм общих свойств систем. Наблюдаемость системы с точностью до изоморфизма

В математической и общей теории систем, а также в теории автоматического управления к наиболее общим свойствам динамических систем, создаваемых человеком, относят *наблюдаемость, управляемость и адаптируемость* [2, 28, 29, 40]. Весьма важным для реализации указанных свойств, подразумевающих наличие известной модели системы, является *свойство идентифицируемости* этой модели, то есть возможности установления (или по терминологии работ [1, 2] - «реализации») структуры и параметров модели по некоторым данным о системе. В связи с возрастанием требований к надежности и отказобезопасности систем, создаваемых человеком, весьма важным стало *свойство контролируемости* систем. Для решения широкого круга задач в различных сферах человеческой деятельности все чаще стали создаваться *«системы систем»* или, как их часто называют, *комплексные, интегрированные системы*. В связи с этим высокую актуальность приобрело *свойство комплексируемости* или возможности объединения (комплексирования, интеграции) систем в системы-комплексы.

Все эти свойства, с одной стороны, характеризуют и отражают *фундаментальные качества систем* и, с другой стороны, имеют важное практическое значение. В связи с этим изучение указанных *фундаментальных свойств и качеств систем*, а также способов обеспечения их реализуемости в системах имеет как чисто научное, так и большое практическое значение.

Математический формализм принципа изоморфизма позволяет, во-первых, обосновать новую алгебраическую интерпретацию свойств наблюдаемости и управляемости, определения которых даны, например, в [2, 28, 29], а также всех других, указанных выше свойств систем – контролируемости, идентифицируемости, адаптируемости, комплексируемости – и, во-вторых, предложить новые весьма практичные и эффективные способы обеспечения реализуемости этих свойств в создаваемых системах. И, кроме того, новая формально-математическая парадигма в теории систем, основанная на общем принципе изоморфизма, позволяет выявить общие свойства систем искусственного и естественного происхождения и дать новые интерпретации свойствам и закономерностям есте-

ственных систем, согласующиеся как с прежними научными теориями их объяснения, так и с новыми появляющимися опытными, экспериментальными данными.

Далее с использованием математического формализма принципа изоморфизма проанализируем свойство наблюдаемости систем – наблюдаемость системы с точностью до изоморфизма.

Применительно к задаче наблюдаемости будем рассматривать систему $\Sigma=(X_0, s, X)$, где X_0 - начальное состояние, подлежащее восстановлению (наблюдению), X – текущее состояние, s – модель (структура) системы Σ. Введем также множество Z – непосредственное измерение, связанное с X отображением h. Тогда соответствующие преобразования множеств X_0, X, Z можно представить в виде композиции отображений $X_0 \xrightarrow{s} X \xrightarrow{h} Z$.

Классическое определение наблюдаемости характеризует внутренние свойства отображений s и h безотносительно того, существует ли некоторая дополнительная, внешняя система (например, некоторый «наблюдатель»), определенная каким-либо образом на множествах X_0, X, Z, осуществляющая процесс наблюдения за X_0, то есть классическое определение подразумевает анализ самой возможности восстановления-наблюдения начального состояния X_0 по непосредственно доступному измерению Z, исходя из особенностей отображений s и h и их композиции, если она существует.

Полная непосредственная наблюдаемость имеет место, когда по измерениям Z в текущий момент времени t может быть мгновенно определено текущее (в тот же момент t) состояние X системы. В этом случае отображение $h: X \to Z$ должно быть изоморфным, то есть при $Z=hX$, где X – n-вектор, Z – m-вектор, должно выполняться условие $m = n$ и отображение h должно быть обычным изоморфизмом.

Наблюдаемость на интервале времени или наблюдаемость по Р. Калману [2, 28, 29] отвечает более практичному случаю $m < n$ (число измерителей меньше числа компонент вектора состояния) и характеризует возможность восстановления вектора X_0, действовавшего на входе системы в момент t_0, в том числе и в момент $t_0 \to t$, что обеспечивает восстановление X в момент t. Систему, удовлетворяющую требованиям наблюдаемости на интервале времени или наблюдаемости по Р. Калману, называют *вполне наблюдаемой.* Определение наблюдаемости по Р. Калману не дает метода построения наблюдателя, разработка которого рассматривается как отдельная проблема.

Таким образом, наблюдаемость на интервале времени отличается от полной непосредственной наблюдаемости тем, что неизоморфность отображения h, его

«недостаточность» для мгновенного определения X компенсируется возможностью наблюдения некоторых компонент множества X на определённом интервале времени.

Пусть существует изоморфная модель $s \cong s^*$ для системы $\Sigma=(X_0, s, X)$, характеризующая ее структуру. Для изоморфизма s^* существует обратное отображение $(s^*)^{-1}$. Тогда с использованием основной леммы можно обобщить понятие наблюдаемости и ввести *понятие наблюдаемости с точностью до изоморфизма* s^*. Соответствующая композиция отображений показана на рис. 4.1.

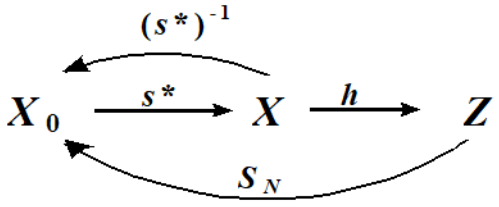


Рис. 4.1. К понятию наблюдаемости с точностью до изоморфизма

Возникает вопрос о существовании отображения S_N, называемого *наблюдателем*, коммутирующего рассматриваемую диаграмму отображений и позволяющего восстановить состояние X_0 в момент t_0 и, соответственно, состояние X в момент t. Точнее, должна существовать композиция $S_N h=(s^*)^{-1}$, коммутирующая отображение $(s^*)^{-1}$, обратное к изоморфизму s^*. Ответ на вопрос о существовании такой композиции дает теорема 1 о наблюдаемости.

Т е о р е м а 1. *Пусть дана* (*см. рис.* 4.1) *простая с точностью до изоморфизма* s^* *система* $\Sigma=(X_0, s^*, X)$, *на множестве выходов* X *которой действует отображение* $h:X \to Z$, *преобразующее какие-либо или все элементы* n*-вектора* X *в* m*-вектор* Z *непосредственно воспринимаемых «сигналов датчиков». Причём для каждого из* n *элементов вектора* X *и каждого из* m *элементов вектора* Z *при* $m \le n$ *заданы множества отсчётов значений этих элементов в дискретные моменты времени*

$$t_0,\ t_0+\Delta,\ t_0+2\Delta, \ldots,\ t_0+(k-1)\Delta=t, \tag{4.1}$$

где Δ *– некоторый малый интервал* (*дискрет*) *времени. При этом отображение* $h:X \to Z$ *является мономорфизмом на указанных множествах отсчётов и общая мощность множеств отсчётов элементов из* Z *равна*

$$mk \ge n. \tag{4.2}$$

Число отсчетов k *зависит от размера* m *вектора* Z *и пробегает значения от* 1 *до такого* k, *при котором выполняются* (4.1), (4.2). *Тогда существует эпиморфизм* S_N, *коммутирующий рассматриваемую диаграмму отображений, то*

есть отображающий всё множество «сигналов» Z мощности (*размера*) (4.2) *на множество* X_0 *и обеспечивающий однозначное, точное и полное наблюдение* (*восстановление*) *всех элементов n-вектора* X_0 *в момент* t_0 *и, соответственно, всех элементов n-вектора X в момент t по «сигналам» Z с точностью до изоморфизма s* и такой, что*

$$S_N=(s^*)^{-1}h^{-1} \quad \textit{или} \quad S_N^{-1}=hs^*. \tag{4.3}$$

Доказательство теоремы опирается на основную лемму и достаточно очевидно. Действительно, условия теоремы позволяют выбрать (зафиксировать) в сформированном множестве отсчетов элементов m-вектора Z мощности (4.2) ровно n любых отсчетов, позволяющих построить систему из n независимых уравнений для вычисления всех неизвестных компонент n-вектора X_0, а затем, в силу изоморфности отображения s^*, вычислить и n-вектор X. Указанная система уравнений образует искомый изоморфный наблюдатель, отвечающий формуле (4.3). В силу неединственности такого выбора, существует некоторое множество изоморфных наблюдателей, удовлетворяющих условиям теоремы. Это множество определяется числом сочетаний по n независимых уравнений из числа (4.2) условий. Сказанное означает также, что отображение S_N является эпиморфизмом. Таким образом, теорема доказана.

Несмотря на то, что по условию теоремы отображение $h{:}X\to Z$ является мономорфизмом, при замыкании диаграммы, представленной на рис. 4.1, наблюдателем S_N, если он существует, это отображение приобретает свойство изоморфности. То есть в рассматриваемой коммутативной диаграмме имеется обратное к h с точностью до изоморфизма s^* отображение h^{-1}, позволяющее вычислить наблюдатель S_N по формуле (4.3). Точность и полнота трактуются в соответствии с новой формулировкой принципа единственности, то есть с точностью до известного изоморфизма s^*. Однозначность означает, что внутри коммутативной диаграммы отображения h и S_N становятся изоморфизмами с точностью до изоморфизма s^*, то есть $S_N \cong S_N^*$ и $h \cong h^*$, где $\cong$ - знак изоморфизма отображений, S_N^* - изоморфный в коммутативной диаграмме наблюдатель, h^* - изоморфный в коммутативной диаграмме измеритель.

По сути существование наблюдателя S_N и возможность замыкания им композиции hs^* в коммутативную диаграмму на рис. 4.1 *означает возникновение системы наблюдения* за состоянием X_0, в которой у отображений h и S_N появляется новое свойство («системный эффект» или «эффект эмерджентности») – свойство изоморфности, отсутствующее у них вне системы наблюдения, так как вне коммутативной диаграммы h является обычным мономорфизмом, а S_N -эпиморфизмом.

Таким образом, теорема обусловливает *необходимость и достаточность* для наблюдаемости системы Σ существования изоморфной модели s^* и композиции hs^*, в которой $h{:}X\to Z$ – мономорфизм. Требование существования композиции hs^* пары отображений (s^*, h) означает, что, независимо от того, какие элементы из X напрямую отображаются в Z, на самом деле, в множество Z отображается *все множество X в том смысле, что все элементы из X связаны между собой посредством изоморфного отображения s**.

В этом случае обязательно существует наблюдатель S_N, коммутирующий композицию отображений h и s^* так, что у отображений $h{:}X\to Z$ и $S_N{:}\ Z\to X_0$ множество Z является общим, а отображение $S_N{:}\ Z\to X_0$ обязательно представляет собой эпиморфизм, отображающий всё множество Z на множество X_0 и позволяющий восстановить значения всех элементов множества X_0 в момент времени t_0.

Если такая композиция пары отображений (s^*, h) существует, то система $\Sigma=(X_0, s^*, X)$ наблюдаема с точностью до изоморфизма s^*. *Пару отображений* (s^*, h)*, удовлетворяющих условиям наблюдаемости, назовём наблюдаемой с точностью до изоморфизма* s^*. Наблюдаемость пары (s^*, h) с точностью до изоморфизма s^* означает, что наблюдатель, определяемый по формулам (4.3), коммутирует (замыкает) соответствующую этой паре диаграмму отображений на рис. 4.1 и позволяет восстановить состояние X_0.

Следовательно, *необходимые и достаточные условия наблюдаемости системы с точностью до изоморфизма* обусловливают требование одновременного выполнения следующих критериев:

a) *изоморфность в обычном смысле отображения* $s \cong s^*$, характеризующего модель наблюдаемой системы (наблюдаемая система должна быть простой);

b) *мономорфность отображения* h, действующего на множестве выходных сигналов системы, характеризующего модель измерений *и обеспечивающего существование композиции* $S_N^{-1}=hs^*$*, то есть* h *должно коммутировать отображение* s^* *в целом, а не какое-либо его сужение*. Мономорфность отображения h означает, что структура h применяющегося множества датчиков должна быть такой, чтобы каждому отсчёту любого непосредственно доступного для измерений элемента из X (или их некоторой комбинации, определяемой структурой отображения h) в данный момент времени взаимно однозначно отвечал один и только один отсчёт соответствующего элемента из множества Z;

c) *должна быть сформирована реализация* (*множество отсчётов*) *сигналов датчиков достаточной длины.* Достаточность длины реализации, определяемой числом k в условии (4.2), зависит от числа m элементов (датчиков) в множестве Z.

При увеличении числа m вплоть до $m=n$, когда число датчиков сравнивается с числом элементов в множестве X, необходимое число отсчётов значений элементов в множестве Z соответственно уменьшается до единственного отсчёта при $m=n$, что соответствует полной непосредственной наблюдаемости. Выполнение условия (4.2) обеспечивает возможность формирования необходимого и достаточного числа независимых условий (уравнений), позволяющих по известным отсчётам элементов из Z в моменты времени (4.1) восстановить значения всех элементов множества X_0 в момент времени t_0, что, в свою очередь, обеспечивает возможность восстановления и всего множества выходов X за счёт наличия изоморфной взаимосвязи между множествами X и X_0 в структуре наблюдаемой простой системы $\Sigma=(X_0, s^*, X)$.

Из сказанного следует недопустимость иногда встречающихся на практике случаев, когда структура h множества датчиков такова, что при изменении во времени значений компонент множества X, значения каких-либо или всех компонент множества Z на выходе датчиков не изменяются, то есть отображение h не является мономорфизмом. Следует иметь в виду, что *мономорфизм определяется по отношению к значениям компонент множества Z, а не по отношению к моментам времени, в которые формируются их отсчёты* (это ещё раз говорит о второстепенности и некоторой «необязательности» независимой переменной, относительно которой фиксируются изменения в системе (см. комментарии к следствию 3 в пункте 3.2) – важны собственно изменения, часто называемые «движением» системы). Моменты времени всегда разные, но отсчёты значений компонент могут быть одинаковыми и соответствующие элементы множества отсчётов нужно считать совпадающими, то есть принимать за один элемент множества. Это означает, что отображение h не является мономорфным. В случае немономорфности отображения h могут иметь место «ненаблюдаемые траектории движения» системы $\Sigma=(X_0, s^*, X)$.

Например, ненаблюдаемой является траектория летательного аппарата при его движении по окружности относительно точки, из которой измеряется только дальность до него. В этом случае отсчёты координат места летательного аппарата изменяются, а соответствующие отсчёты дальности остаются неизменными, то есть, по сути, разные отсчёты элементов из X посредством отображе-

ния h преобразуются в один и тот же отсчёт сигнала дальности в Z, хотя формально отсчёты дальности разные, так как принадлежат разным моментам времени. Следствием является то, что при начале движения из некоторой произвольной неизвестной точки на окружности (множество координат X_0) по измерениям дальности на неограниченном интервале времени (множество сигналов Z) нельзя определить координаты этой начальной точки (множество координат X_0) и, соответственно, текущие координаты точки (множество координат X), даже если известна точная, взаимно однозначная связь между начальной и текущей точкой при её движении по окружности – состояние X_0 ненаблюдаемо.

Рассмотренный пример, наряду с иллюстрацией наблюдаемости, показывает относительность понятия «движение»: при изменении положения точки на окружности относительно начальной точки X_0 движение присутствует и, вместе с тем, движение отсутствует относительно центра окружности при измерении дальности до текущей точки.

Таким образом, общим законом является то, что *наблюдаемо только движение, отражающееся в непрерывном изменении непосредственных (прямых) измерений, взаимно-однозначно связанных с его параметрами. Неизменность чего-либо и «покой», в широком смысле, ненаблюдаемы.*

В целом, отсутствие (или, что чаще, нецелесообразность наличия) для полной непосредственной наблюдаемости полного комплекта датчиков компенсируется возможностью получения информации от имеющегося небольшого множества датчиков на необходимом интервале времени (точнее, необходимого числа изменений состояния системы за счет ее движения) при условии удовлетворения структурой наблюдаемой системы и структурой измерителей критериям, определённым теоремой 1.

Вместе с тем, следует иметь в виду, что условие $m \leq n$ является излишне сильным. Теорема справедлива и при $m>n$. На практике встречаются случаи, когда некоторый элемент из множества X измеряется двумя и более датчиками разной физической природы в то время, как другие элементы вообще не измеряются.

Ясно, что при известной и фиксированной структуре h измерителей наблюдатель S_N, если он существует, определяется по формуле (4.3). Вообще говоря, при фиксированном $h{:}X\rightarrow Z$ в силу эпиморфности отображения S_N возможно существование и подбор бесконечного множества наблюдателей S_N, коммутирующих диаграмму, приведённую на рис. 4.1. Выбор S_N будет определяться мощ-

ностью множества отсчётов измерений Z, которое, например, при наличии одного датчика, может содержать произвольное, но не меньшее n число отсчётов сигналов этого датчика: из всего множества отсчётов для построения конкретного наблюдателя S_N можно выбрать произвольное подмножество отсчётов мощности не меньше n. Вполне очевидно, что при увеличении числа независимых датчиков (непосредственно воспринимающих разные сигналы-элементы из X) и, следовательно, элементов-компонент в множестве Z, можно соответственно уменьшать число отсчётов их значений но так, чтобы выполнялось условие (4.2). Однако, *при фиксации конкретного экземпляра наблюдателя* S_N *из множества возможных, обратное отображение* S_N^{-1} (*и все другие обратные*) *в рамках рассматриваемой коммутативной диаграммы будет единственно, что отвечает основной лемме и принципу единственности.*

При выборе другого измерителя h для системы с фиксированной структурой s^* необходимо определять и другое множество наблюдателей S_N. Возможность существования множества наблюдателей, построенных на множестве непосредственно доступных отсчётов измерений, коммутирующих диаграмму, приведённую на рис. 4.1, создаёт предпосылки оптимизации наблюдателя по другим критериям, например, по критерию простоты вычислительных процедур или аппаратной реализации. Приведенные рассуждения доказывают следствие №6 из пункта 2.2 в части наблюдаемости.

Если в коммутативной диаграмме на рис. 4.1 композицию hs^* считать «передаточной функцией» или структурой «обобщенной системы (объекта)», подлежащей наблюдению, то *наблюдатель* S_N *в* (4.3) *есть обратное отображение к указанной передаточной функции* (*структуре*). Если S_N существует, то система наблюдаема, то есть существование наблюдателя S_N в форме (4.3) является простым критерием наблюдаемости для систем весьма общего вида, ведь требование линейности на отображения h и s^* не накладывается.

Указанные выше критерии наблюдаемости являются наиболее общими, алгебраическими критериями наблюдаемости системы $\Sigma = (X_0, s^*, X)$ с точностью до изоморфной модели s^*, *позволяющими определить и структуру наблюдателя*.

Очевидно, что *наблюдаемость по Р. Калману является частным случаем наблюдаемости с точностью до изоморфизма*. Кроме того, критерий наблюдаемости по Калману известен лишь для линейных систем [2, 29] и не содержит алгоритма вычисления наблюдателя. Наблюдаемость по Калману, на самом деле, при фиксированных модели системы s^* и измерителе h, не оговаривая

условий на h и s^* поотдельности, позволяет установить, что отображение h измерителя коммутирует (система наблюдаема по Калману) или не коммутирует (система не наблюдаема по Калману) отображение s^* в целом, а не некоторое его сужение – см. критерий b) наблюдаемости с точностью до изоморфизма. При отсутствии наблюдаемости по Калману в изоморфной структуре s^* системы Σ возможно наличие некоторого изоморфного сужения $(s^*)^*$, коммутируемого отображением h измерителя: в этом случае система в целом не наблюдаема по Калману, но наблюдаема с точностью до изоморфизма-сужения $(s^*)^*$. Такая *система называется не вполне наблюдаемой* [29].

Например, линейная система с изоморфной структурой s^* может быть «составной» не вполне наблюдаемой системой, то есть системой $\Sigma=\Sigma_1 \oplus \Sigma_2$, являющейся прямой суммой систем Σ_1 и Σ_2, никакие компоненты которых «не пересекаются» (не пересекаются соответствующие входные и выходные множества, а также отображения-структуры). Отображение h измерителя в этом случае может являться мономорфизмом, действующим лишь на множестве выходов какой-либо одной системы Σ_1 или Σ_2 и, следовательно, не действующим на множестве выходов составной системы Σ в целом. Возможен и случай, когда система $\Sigma=\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ является таким объединением систем Σ_1 и Σ_2, когда одна из систем Σ_1 или Σ_2 является полностью автономной от влияния другой системы и отображение h действует на множестве её выходов. В этом случае система Σ также не вполне наблюдаема в смысле [29] и, соответственно, не наблюдаема по Калману, но наблюдаема с точностью до некоторого изоморфного сужения $(s^*)^*$ общей модели s^* системы Σ.

Таким образом, если отображение h измерителя коммутирует отображение s^* в целом (*композиция hs^* существует*)*, то система наблюдаема с точностью до изоморфной модели s^*, что влечёт и наблюдаемость по Р. Калману.*

В соответствии с определением *полной непосредственной наблюдаемости* множества X отображение h является изоморфизмом в обычном смысле (вне коммутативной диаграммы), то есть $h \cong h^*$. В рамках введённого нами общего принципа изоморфизма в этом случае наблюдатель S_N существует и по отношению к множеству входов X_0, даже если структура s системы, *удовлетворяющая композиции отображений*, представленной на рис. 4.2, не является изоморфизмом в обычном смысле.

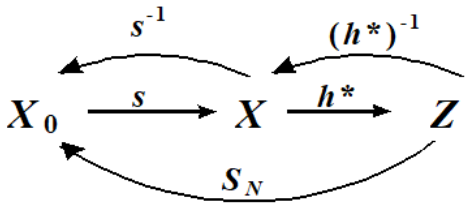


Рис. 4.2. Композиция отображений в случае полной непосредственной наблюдаемости

Структура наблюдателя определяется выражением $S_N=s^{-1}(h^*)^{-1}$. Наблюдатель S_N является изоморфизмом с точностью до изоморфизма h^*, а не с точностью до изоморфизма s^*, который в данном случае вне коммутативной диаграммы не существует. Более того, сама неизоморфная в обычном смысле структура s системы внутри коммутативной диаграммы становится изоморфной с точностью до изоморфизма h^*.

Таким образом, если существует указанная коммутативная диаграмма, то *пара* (s, h^*) *полностью непосредственно наблюдаема по выходам X и наблюдаема по входам X_0 с точностью до изоморфизма h^**. Этот случай не имеет аналогии в смысле наблюдаемости по Калману. По существу, нами доказана теорема 2 о наблюдаемости, формулировка которой приведена ниже.

Т е о р е м а 2. *Пусть дана* (*см. рис.* 4.2) *имеющая эпиморфную структуру s система $\Sigma=(X_0, s, X)$, на множестве выходов X которой действует изоморфизм $h^*:X\to Z$, отображающий множество X на множество Z непосредственно воспринимаемых «сигналов» датчиков. Тогда существует мономорфный наблюдатель S_N, коммутирующий изоморфизм $(h^*)^{-1}$ и рассматриваемую диаграмму отображений и обеспечивающий однозначное, точное и полное непосредственное наблюдение* (*восстановление*) *множества выходов X и наблюдение множества входов X_0 по «сигналам» Z с точностью до изоморфизма h^* такой, что*

$$(h^*)^{-1} = sS_N,\ \ S_N = s^{-1}(h^*)^{-1},\ (S_N)^{-1}= h^*s.$$

В соответствии с теоремой 2 критериями полной непосредственной наблюдаемости системы $\Sigma=(X_0, s, X)$ по выходам X и наблюдаемости по входам X_0 с точностью до изоморфизма h^* являются:

a) изоморфность отображения h^*, характеризующего структуру датчиков;

b) эпиморфность структуры s наблюдаемой системы в композиции h^*s.

Теорема 1 и дополняющая её теорема 2 вместе составляют *общую теорему о наблюдаемости*. Она определяет условия, при которых наблюдатель существует, но, возможно, не единственен. Например, эпиморфность отображения s означает, что мощность (число элементов) множества входных сигналов X_0 может быть большей мощности множества выходных сигналов X. В этом случае теорема позволяет наблюдать лишь те элементы из множества входных сигналов X_0, которые «замыкаются» в коммутативной диаграмме (см. рис. 4.2) мономорфным наблюдателем S_N в общей цепочке с изоморфным отображением h^*, то есть с точностью до изоморфизма h^*. Таким образом, несмотря на выполнение условия полной непосредственной наблюдаемости для множества выходов X, для некоторых элементов множества входов X_0 рассматриваемой системы наблюдаемость существует лишь при определённых условиях. В случае равенства мощностей множеств X_0 и X (в смысле числа компонент и числа отсчётов их значений в соответствующие моменты времени) наблюдатель единственен. В этом случае эпиморфное отображение s становится и мономорфным, а значит изоморфным отображением, обеспечивающим полную непосредственную наблюдаемость как выходов X, так и входов X_0 системы. В противном случае, когда мощность множества входных сигналов X_0 больше мощности множества выходных сигналов X, возможно существование множества наблюдателей, замыкающих в совокупности с изоморфизмом h^* разные подмножества элементов из X_0. В этом случае в множестве входных сигналов X_0 посредством наблюдателя S_N может быть однозначно, полно и точно восстановлено лишь подмножество входных сигналов $X_0' \subset X_0$, коммутируемое («охватываемое») изоморфизмом-измерителем h^*.

Возможен и тривиальный случай, когда изоморфны в обычном смысле (вне коммутативной диаграммы) оба отображения s и h, то есть $s \cong s^*$ и $h \cong h^*$. Тогда, если существует композиция h^*s^*, то обязательно существует коммутирующее её изоморфное в обычном смысле *единственное в данном случае отображение* S_N такое, что $S_N = (s^*)^{-1}(h^*)^{-1}$, обеспечивающее полную непосредственную наблюдаемость как выходов X, так и входов X_0 системы. Это утверждение является следствием теорем 1 и 2. Все три рассмотренных случая используются на практике при синтезе наблюдателей.

Таким образом, *критерии наблюдаемости с точностью до изоморфизма* $s \cong s^*$, *либо с точностью до изоморфизма* $h \cong h^*$, *являются наиболее общими, алгебраическими критериями, устанавливающими не только факт наблюдаемости системы любой заданной структуры* (*а не только изоморфной*), *но и структуру наблюдателя.*

В качестве примера рассмотрим наблюдаемость линейной стационарной динамической системы

$$\begin{cases} \dot{X} = aX, \\ Z = hX, \end{cases} \tag{4.4}$$

коммутативная диаграмма которой представлена на рис. 4.3. В общем случае требуется по измерениям Z на некотором интервале времени восстановить (наблюдать) векторное начальное условие $X_0 = X(t_0)$. Решение для системы (4.4) имеет вид $X(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)X(t_0)$ или $X(t) = \Phi^* X(t_0)$, где $\Phi^*=\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)$ – матрица Коши [29, 30], $\Phi(t)$ – некоторая фундаментальная матрица [29-31]. Матрица Коши также является фундаментальной матрицей для системы (4.4) и в силу этого – изоморфизмом.

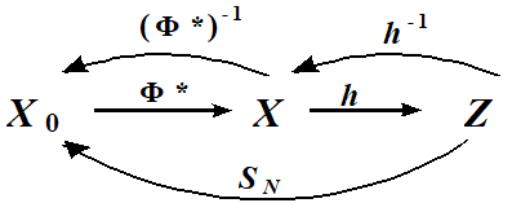


Рис. 4.3. К определению наблюдаемости линейной системы с точностью до изоморфизма

То есть, для линейных систем всегда существует изоморфизм Ф. Здесь по аналогии с (4.3) $S_N \cong S_N^*$ - изоморфный с точностью до изоморфизма Ф* наблюдатель такой, что

$$S_N^* = (\Phi^*)^{-1}h^{-1} \text{ или } (S_N^*)^{-1} = h\,\Phi^*. \tag{4.5}$$

Выражение (4.5) позволяет сразу определить структуру изоморфного наблюдателя S_N^* для линейной динамической системы. Безусловное наличие изоморфизма Ф* для линейной системы (4.4) определяется известной теоремой о существовании и единственности решения дифференциального уравнения: фундаментальная матрица Ф*, входящая в структуру такого решения всегда обратима. Следовательно, *для линейных систем* критерий изоморфизма отображения-структуры Ф* всегда выполняется и их *наблюдаемость определяется лишь выбором структуры измерителей*, то есть отображения h, которое должно коммутировать отображение-структуру Ф* и обеспечивать мономорфное отображение множества X выходных сигналов в множество непосредственно считываемых сигналов Z. При этом, как и в случае нелинейной системы, изоморфная структура Ф* линейной системы должна быть такой, чтобы мономорфизм h коммутировал отображение Ф* в целом, а не какую-либо его часть – например, изоморфное сужение (Ф*)*, относящееся к некоторой автономной подсистеме.

Как видно из (4.5), наблюдатель S_N* *является обратным отображением для передаточной функции* (*композиции*) $h\Phi^*$ «*обобщенного линейного динамического объекта*» (4.4), включающего как собственно объект, характеризуемый фундаментальной матрицей $\Phi(t)$, так и измеритель со структурой (передаточной функцией) h. Если S_N* существует, то объект (4.4) наблюдаем, то есть *существование* S_N* *в форме* (4.5) *является наиболее общим критерием наблюдаемости линейных динамических систем* (*объектов*).

Свойство наблюдаемости имеет непосредственное отношение к проявлению «постулата» причинности, отражённого в пункте 3.2 в форме следствия 3 к фундаментальной лемме. Для линейных систем «постулат» причинности удовлетворяется всегда и доказывается тривиально. Действительно, в силу того, что отображение Φ^* всегда изоморфизм, систему (4.4) можно однозначно решать как в прямом времени от t_0 к t, так и в обратном времени от t к t_0, что математически строго формализует и доказывает «постулат» причинности, то есть строгую детерминированность динамических процессов.

Для нелинейных систем случай, когда структура $s{:}X(t) \to X(t_0)$ не только известна, но и изоморфна, а её состояние-«следствие» $X(t)$ непосредственно доступно для наблюдения, ничем не отличается от рассмотрения линейных систем и удовлетворение постулату причинности непосредственно следует из изоморфности отображения $s \cong s^*$.

Вместе с тем, как для линейных, так и для нелинейных систем часто вектор состояния $X(t)$ системы с известной структурой s недоступен для непосредственного наблюдения. В этом случае применительно к линейным системам, в силу изоморфности (по определению) отображения $s \cong s^* \cong \Phi^*$, для удовлетворения условиям «постулата причинности» важно лишь подобрать систему измерителей с такой структурой $h{:}\ X(t) \to Z(t)$, чтобы пара отображений (Φ^*, h) была наблюдаемой в соответствии с условиями теоремы 1 о наблюдаемости. То же касается и нелинейных систем, если структура системы $s \cong s^*$ известна и изоморфна.

В отличие от линейных систем, для нелинейных систем может иметь место случай, когда структура s известна, но неизоморфна - эпиморфна. Ясно, что в данном случае причина (полное множество элементов) $X(t_0)$ текущего недоступного для непосредственных наблюдений состояния $X(t)$ может быть однозначно, полно и точно установлена лишь с точностью до подмножества $X_0' \subset X_0$ элементов-причин, коммутируемых («охватываемых») изоморфной структурой измерителей $h \cong h^*{:}\ X(t) \to Z(t)$ в совокупности со структурой s и наблюдателем S_N , если

такую структуру измерителей $h \cong h^*$ для рассматриваемой системы удалось подобрать и она удовлетворяет условиям теоремы 2 о наблюдаемости.

В целом, удовлетворение парой отображений (s, h) условиям общей теоремы о наблюдаемости обеспечивает полное и точное восстановление «причины» $X(t_0)$ возникновения в момент t любых непосредственно наблюдаемых показаний датчиков $Z(t)$, отражающих соответствующее им состояние-«следствие» $X(t)$ системы и, наоборот, при известной «причине» $X(t_0)$ - обеспечивает точное и полное предсказание соответствующих ей показаний $Z(t)$ датчиков и «состояния-следствия» $X(t)$ системы.

Таким образом, удовлетворение системой постулату причинности является следствием её удовлетворения условиям наблюдаемости и, наоборот, *система, удовлетворяющая постулату причинности, всегда наблюдаема с точностью до соответствующего изоморфизма*.

Более детально теоретические и прикладные проблемы наблюдаемости динамических систем рассмотрены во второй части книги.

Глава 5

Управляемость системы с точностью до изоморфизма

Систему называют вполне управляемой [2, 29] на интервале $[t_0, t]$, если для любой пары точек $(X_0, X) \subset R^n$ существует допустимое управление $U \subset R^r$, переводящее ее из состояния X_0 в заданное состояние X за конечный промежуток времени $[t_0, t_к] \in [t_0, t]$. Здесь $X \subset R^n$ и $U \subset R^r$ являются функциями времени на интервале $[t_0, t]$. То есть в соответствии с определением *система управляема, если возможно изменение её состояния в соответствии с заданной извне целью*, носителем информации о которой является заданное состояние X. Таким образом, целью управления является достижение заданного состояния X за конечное время.

Вообще говоря, приведенное «классическое определение» управляемости неполно. Управляемость, особенно в векторном, многомерном случае, нужно рассматривать не вообще, а в привязке к математической модели системы – «в силу этой модели», как говорят в теории оптимального управления. Дело в том, что ни начальное состояние X_0, ни конечное состояние X нельзя назначать произвольно в смысле произвольного и независимого назначения компонент соответствующих векторов, так как компоненты этих векторов тесно взаимосвязаны посредством модели системы. Соответственно степени их свободы ограничены рамками определенной *области достижимости*, детерминированной указанной моделью, даже для допустимых управлений. Это замечание, как будет показано ниже, является важным в рамках развиваемой здесь теории. Здесь и далее будем полагать, что требование достижимости начального и заданного состояний системы удовлетворяется. Применительно к анализу управляемости композиция отображений показана на рис.5.1.

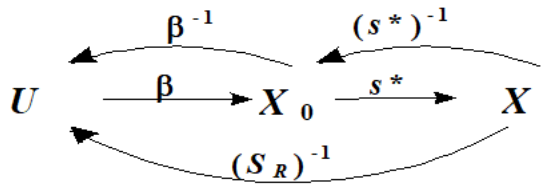


Рис. 5.1. К определению управляемости системы с точностью до изоморфизма

Т е о р е м а 3. *Пусть выполняется композиция* $s\beta$ *пары отображений* (s, β), *где* s *– изоморфизм, то есть* $s \cong s^*$, *а отображение* $\beta: U \to X_0$ *является эпиморфным отображением множества управлений* U *на множество входов* X_0

системы. Причём для каждого из элементов множества (*n-вектора*) X_0 *и каждого из элементов множества* (*r-вектора*) U *при* $r < n$ *заданы множества отсчётов значений этих элементов в дискретные моменты времени* (4.1). *При этом отображение* $\beta: U \to X_0$ *является эпиморфизмом на указанных множествах отсчётов и общая мощность множеств отсчётов элементов из* U *равна*

$$rk \geq n. \tag{5.1}$$

Тогда существует эпиморфное отображение-регулятор S_R *, коммутирующее рассматриваемую диаграмму отображений, то есть отображающее всё множество управляющих «сигналов»* U *мощности* (*размера*) (5.1) *на множество выходов* X *и обеспечивающее однозначное, точное и полное управление всеми элементами множества* X *с точностью до изоморфизма* s^*. *В этом случае система* $\Sigma=(X_0, s^*, X)$ *управляема с точностью до изоморфизма* s^* *и пара отображений* (s^*,β) *называется управляемой с точностью до изоморфизма* s^*. Регулятор S_R , удовлетворяющий условиям теоремы, может быть вычислен из равенств

$$S_R = s^*\beta, \quad S_R^{-1} = \beta^{-1}(s^*)^{-1}, \tag{5.2}$$

где β^{-1} и S_R^{-1} - обратные к β и S_R с точностью до изоморфизма s^* отображения.

Доказательство теоремы 3 полностью аналогично доказательству теоремы 1, рассмотренной при исследовании свойства наблюдаемости, и «двойственно» к нему в том смысле, что n независимых условий для вычисления n-вектора X_0 (и, соответственно, для управления им) выбираются из множества отсчетов мощности (5.1) r-вектора U, а не m-вектора Z. Ясно, что критериями управляемости динамических систем, то есть необходимыми и достаточными условиями существования регулятора S_R, является изоморфность отображения $s \cong s^*$, характеризующего структуру системы, и эпиморфность отображения β в их композиции, обеспечивающая получение множества отсчётов управляющих сигналов U достаточной длины. При этом возможность управления всем множеством выходов X обеспечивается тем, что в композиции $s^*\beta$ отображение β коммутирует всё отображение s^*, а не какое-либо его сужение, а также наличием изоморфной взаимосвязи посредством отображения s^* между множествами X и X_0 в структуре управляемой системы $\Sigma=(X_0, s^*, X)$. Композицию $s^*\beta$ можно рассматривать как «передаточную функцию» или структуру «обобщенного объекта» («обобщенной системы»). Тогда в соответствии с (5.2) регулятор есть обратное отображение для отображения, характеризующего структуру «обобщенного объекта». *Если такое обратное существует, то объект управляем*. Это и

есть *наиболее общий и вместе с тем простой критерий управляемости объектов* (*систем*) весьма общего вида – на отображение s^* *требование линейности не накладывается*.

Таким образом, если структура отображений β и s^* такова, что при реализации управляющих воздействий U длины (5.1) обеспечивается перевод системы $\Sigma=(X_0, s^*, X)$ из состояния X_0 в состояние X за конечный промежуток времени $[t_0,t_к]\in [t_0,t]$, то система управляема с точностью до изоморфизма s^*. *Пара отображений* (s^*, β) в этом случае *называется управляемой с точностью до изоморфизма* s^*.

Иначе говоря, *система управляема тогда и только тогда, когда существует обратная связь от множества выходов X к множеству управляющих* (*задающих*) *воздействий U в форме изоморфного* (*с точностью до изоморфной модели* s^* *системы*) *регулятора* S_R^{-1}, *удовлетворяющего соотношениям* (5.2). По сути, нами доказана *необходимость существования обратной связи* в форме идеального изоморфного регулятора S_R^{-1} для управляемости системы, *ранее, как правило, постулировавшаяся в качестве аксиомы*. Сразу определена и структура обратной связи в форме регулятора S_R^{-1}.

Таким образом, для обеспечения управляемости системы, характеризуемой парой отображений (s, β), *необходимо и достаточно существование обратной связи в форме регулятора* S_R^{-1}, *определяемого по формуле* (5.2).

Известно, что до настоящего времени в кибернетике [26] и в теории управления [29] необходимость обратной связи для управления системой постулировалась, рассматривалась как инженерный прием или даже как открытие. Например, в известной работе [32] Р. Беллман указывает на «остроумнейший инженерный прием, известный под названием *управления с обратной связью*», а в работе [2] Р. Калман, характеризуя принцип оптимальности Р. Беллмана, называет этот принцип *«…научной интерпретацией великого открытия, известного под названием «обратной связи» и составляющего основу всей автоматики»*.

Отметим также, что *изоморфный регулятор* S_R^{-1} (5.2), по сути формализует известный в общей теории систем и в кибернетике «*закон необходимого разнообразия*» Эшби [73] в том смысле, что все известное нам «разнообразие» управляемой системы (вся информация о системе) заключено в ее модели s^* и для управления этой системой всю эту информацию, то есть модель, нужно обязательно использовать, что и отражают формулы (5.2), характеризующие структуру изоморфного регулятора. В связи со сказанным «закон необходимого разнообразия» можно переформулировать несколько иначе: *объект управляем*

только в той части и с точностью до той информации, которая нам о нем известна и заключена в его модели. Или еще иначе: *объект управляем с точностью до разнообразия, заключенного в его модели.*

Кроме того, структура обратной связи до сих пор рассматривалась в отрыве от критерия управляемости и никак с ним не была увязана. Например, процедура определения управляемости по Калману и вычисления соответствующего критерия управляемости [29] не дает метода синтеза регулятора, то есть не дает метода синтеза структуры обратной связи.

Вообще говоря, при фиксированном $\beta{:}U\to X_0$ возможно существование бесконечного множества регуляторов S_R , удовлетворяющих условиям теоремы и коммутирующих диаграмму, приведённую на рис. 5.1. Однако, *при фиксации конкретного* регулятора S_R *из множества возможных, обратное отображение* S_R^{-1} (*и все другие обратные*) *в рамках рассматриваемой коммутативной диаграммы будет единственно, что отвечает основной лемме и принципу единственности.* При выборе другого отображения β для системы с фиксированной структурой s^* необходимо определять и другое множество регуляторов S_R. Приведенные рассуждения доказывают следствие №6 к основной лемме из параграфа 3.2 в части управляемости.

Т е о р е м а 4. *Необходимым и достаточным условием полной непосредственной управляемости системы* $\Sigma=(X_0, s, X)$ *со структурой* $s{:}X_0\to X$ *по всему множеству входов* X_0 *и управляемости по множеству выходов* X *с точностью до изоморфного в обычном смысле отображения* $\beta^*{:}U\to X_0$ *является существование композиции* $s\beta^*$ *отображений* s *и* β^**, где* s *– мономорфизм,* β^* *- изоморфное в обычном смысле отображение* $\beta^*{:}U\to X_0$ *множества управлений* U *на множество входов* X_0 *системы.*

Пара отображений (s, β^*) в этом случае называется *полностью непосредственно управляемой по входам и управляемой по выходам с точностью до изоморфизма* β^*. Регулятор S_R , удовлетворяющий условиям теоремы 4, может быть вычислен из равенств

$$S_R=s\beta^*,\ S_R^{-1}=(\beta^*)^{-1}s^{-1}.$$

Доказательство теоремы 4 аналогично доказательству теоремы 2. Следует иметь в виду, что в силу мономорфности отображения s и эпиморфности отображения S_R^{-1} среди элементов множества выходов X в данном случае могут найтись такие, которые не коммутируются (не «охватываются») изоморфизмом β^* в соответствующей коммутативной диаграмме и в этом смысле не являются управляемыми. Управляемым с точностью до изоморфизма β^* является некоторое

подмножество элементов-выходов $X' \subset X$, коммутируемое в рамках композиции отображений $\beta^* = s^{-1} S_R$.

Теорема 3 *и дополняющая её теорема* 4 *вместе составляют общую теорему об управляемости.* Возможен и тривиальный случай, когда изоморфны в обычном смысле (вне коммутативной диаграммы) оба отображения s и β, то есть $s \cong s^*$ и $\beta \cong \beta^*$. Тогда, если существует композиция $s^*\beta^*$, то обязательно существует коммутирующее её изоморфное в обычном смысле и в данном случае единственное отображение-регулятор S_R^* такое, что $S_R \cong S_R^* = s^*\beta^*$. Все три рассмотренных случая могут иметь место на практике и используются при синтезе регуляторов.

Как и в случае исследования свойства наблюдаемости, совершенно аналогично могут быть установлены соотношения между управляемостью с точностью до изоморфизма и управляемостью по Калману, а также условия существования не вполне управляемых систем в случае, когда отображение β коммутирует не отображение s^* в целом, а лишь какое-либо его изоморфное сужение $(s^*)^*$, относящееся к некоторой автономной части общей модели s^* системы Σ. В качестве примера проанализируем управляемость линейных стационарных динамических систем. Рассматривается система

$$\dot{X}(t) = aX(t) + bU(t),\ X(t) \subset R^n, U(t) \subset R^r, \tag{5.3}$$

которая в форме Лапласа при нулевых начальных условиях преобразуется из аддитивной к мультипликативной форме $X(p)=(pI-a)^{-1}bU(p) = \Phi(p)Y(p)$, или

$$\begin{cases} Y(p) = bU(p) \\ X(p) = \Phi Y(p) \end{cases}, \tag{5.4}$$

где оригиналы $X(t)$, $U(t)$, изображения $X(p)$, $U(p)$, $Y(p)$ и переменная p отвечают известным условиям [31, 33], $\Phi(p)=(pI-a)^{-1}$ – фундаментальная матрица системы (5.3), I – единичная матрица, $Y(p)= bU(p)$ - некоторая переменная (n-вектор), характеризующая «внутреннее» состояние системы. Для упрощения обозначений оригиналы и изображения будем отличать по независимой переменной, указанной в скобках. Если из контекста однозначно ясно, о какой независимой переменной идет речь, будем ее опускать. Композиция соответствующих отображений в форме Лапласа представлена на рис. 5.2.

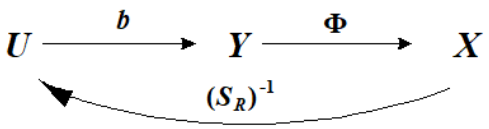


Рис. 5.2. К определению управляемости линейной системы

Здесь S_R^{-1} - изоморфный с точностью до изоморфизма $s^* = \Phi(p)$ регулятор такой, что

$$S_R^{-1} = b^{-1}\Phi^{-1}(p) = b^{-1}(pI\text{-}a). \qquad (5.5)$$

Выражение (5.5) позволяет определить изоморфный регулятор в форме Лапласа. В силу того, что для линейной системы фундаментальная матрица Ф всегда является изоморфизмом, критерием управляемости линейной динамической системы является эпиморфность отображения b в композиции $\Phi b = S_R$, удовлетворяющая условию формирования на входе системы реализации управляющих сигналов U достаточной длины, то есть такой, что выполняется (5.1). Здесь S_R – регулятор, обратный с точностью до изоморфизма Ф к отображению, определяемому выражением (5.5). В соответствии с (5.5) отображение, характеризующее структуру изоморфного регулятора для линейного объекта (5.3), (5.4), является обратным для передаточной функции этого объекта в коммутативной диаграмме на рис. 5.2. Если это обратное существует, то линейный объект управляем. Следовательно, *выражение* (5.5) *является критерием управляемости линейной динамической системы* (*объекта*) (5.4).

Как и в случае наблюдаемости, *совершенно аналогичным следствием теоремы об управляемости является постулат причинности с точностью до изоморфизма* s^*. Более детально теоретические и прикладные аспекты и примеры синтеза и исследования изоморфных регуляторов и наблюдателей для динамических систем рассмотрены, например, в работах [20, 21, 34-38], а также во второй части книги.

Мы убедились, что *между свойствами наблюдаемости и управляемости систем, как в наиболее общем формально-математическом, алгебраическом смысле, так и в практическом смысле существует полная аналогия в части формулировок соответствующих теорем и форм получаемых математических выражений*.

Эта аналогия как раз и соответствует глубокому философскому содержанию понятия «изоморфизм» (от греч. ἴσος – равный, одинаковый и μορφή – форма): взаимно-однозначное *отношение* (*отображение*) между какими-либо объектами, выражающее *тождество* форм соответствующих математических моделей и их *структуры* (*строения*). Часто такое тождество форм соотносят и с *общим принципом двойственности* [39], рассматриваемым ниже.

Глава 6

Двойственность управляемости и наблюдаемости системы

Общий принцип двойственности, характерный для многих явлений природы и описывающих их математических моделей [39], имеет важное значение в теории систем. В терминах развиваемой нами теории, по сути, имеет место изоморфизм между моделями, описывающими различные, на первый взгляд, свойства систем, то есть, *имеет место изоморфизм свойств системы с точностью до изоморфной модели самой системы*, на которой свойства этой системы исследуются. И этот изоморфизм в формально-математическом плане позволяет, например, существенно сократить количество доказываемых теорем на основе глубокой связи соответствующих математических моделей.

Таким образом, *принцип двойственности, по сути, является следствием введённого нами общего принципа изоморфизма*. Применительно к задаче об управляемости и наблюдаемости линейных систем принцип двойственности был установлен Калманом [2, 40] и состоит в том, что если заданы две системы, одна из которых описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= aX(t) + bu(t) \\ Z(t) &= hX(t) + du(t), \end{aligned} \tag{6.1}$$

а другая - уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{\eta}(t) &= a^T\eta(t) + h^T\nu(t) \\ \xi(t) &= b^T\eta(t) + d^T\nu(t), \end{aligned} \tag{6.2}$$

то такие *системы называются двойственными или сопряжёнными*, так как условие

$$rank\left[b \vdots ab \vdots \ldots \vdots a^{n-1}b\right] = n$$

является условием управляемости системы (6.1) и одновременно условием наблюдаемости системы (6.2), а условие

$$rank\left[h^T \vdots a^T h^T \vdots (a^T)^2 h^T \vdots \ldots \vdots (a^T)^{n-1} h^T\right] = n$$

является условием наблюдаемости системы (6.1) и одновременно условием управляемости системы (6.2). То есть система (6.1) управляема тогда и только

тогда, когда наблюдаема система (6.2) и наоборот, что прямо говорит об *изоморфизме свойств управляемости и наблюдаемости* для сопряжённых (то есть, по сути, изоморфных) систем.

Нетрудно убедиться, что после простых преобразований уравнения (4.4) и (5.4), использованные нами по отдельности, при исследовании свойств наблюдаемости и управляемости, можно объединить в общую систему уравнений вида

$$Y(p)=bU(p)$$

$$X(p)=\Phi(p)Y(p) \qquad (6.3)$$

$$Z(p)=hX(p),$$

где Ф - фундаментальная матрица систем дифференциальных уравнений вида (4.4), (5.4) и (6.1), (6.2). Уравнение (6.3) записано в операторной форме Лапласа. Как видно из этого уравнения, в смысле свойств управляемости и наблюдаемости оно абсолютно «симметрично» относительно изоморфизма Ф, что является дополнительным и очевидным подтверждением «двойственности» этих свойств, принимая во внимание перестановки матриц b и h в соответствующих сопряжённых системах

$$Y^*(p)=h^TU(p)$$

$$X^*(p)=\Phi^{-1}(p)Y^*(p) \qquad (6.4)$$

$$Z^*(p)=b^TX^*(p).$$

Двойственность свойств наблюдаемости и управляемости означает также соответствующую трансформацию коммутативных диаграмм. Например, для диаграммы, показанной на рис. 4.3, «сопряжённая» диаграмма имеет вид, представленный на рис. 6.1.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "h^{\mathrm{T}}"] & Y^* \arrow[r, "\Phi^{-1}"] & X^* \arrow[ll, bend left, "(S_R)^{-1}"] \end{tikzcd}$$

Рис. 6.1. Коммутативная диаграмма для сопряжённой системы

Для сопряжённых коммутативных диаграмм справедливы утверждения: система, представленная на рис. 4.3 наблюдаема тогда и только тогда, когда управляема сопряжённая ей система, показанная на рис. 6.1 и наоборот. Объединённые диаграммы для сопряжённых систем (6.3) и (6.4) представлены на рисунках 6.2 и 6.3. Суть их взаимных преобразований понятна из рисунков. Ясно также, что

«зеркально» справедливы и соответствующие утверждения об управляемости и наблюдаемости.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "b"] \arrow[rrr, bend left, "s_R"] & Y \arrow[r, "\Phi"] \arrow[rr, bend left, "s_N"] & X \arrow[r, "h"] & Z \end{tikzcd}$$

Рис. 6.2. Коммутативная диаграмма объединённой системы

$$\begin{tikzcd} Z^* & X^* \arrow[l, "b^{\mathrm{T}}"'] & Y^* \arrow[l, "\Phi^{-1}"'] \arrow[ll, bend right, "s_N"'] & U \arrow[l, "h^{\mathrm{T}}"'] \arrow[lll, bend right, "s_R"'] \end{tikzcd}$$

Рис. 6.3. Коммутативная диаграмма сопряжённой объединённой системы

Указанные утверждения, доказанные для линейных систем, справедливы и в общем случае - для любых систем, - так как являются следствиями из рассмотренных выше общих условий управляемости и наблюдаемости с точностью до изоморфизма. Для систем общего вида коммутативные диаграммы сопряжённых систем, представленные на рис. 6.2 и 6.3, совершенно не изменяют формы (в этом и заключается изоморфизм!), с тем лишь учётом, что вместо изображённых на них матриц нужно подразумевать соответствующие отображения более общего вида.

Глава 7

Контролируемость систем с точностью до изоморфизма

Ранее уже было отмечено, что в связи с возрастанием требований к надежности и отказобезопасности систем, создаваемых человеком, весьма важным стало свойство контролируемости систем. *Под контролируемостью системы будем понимать возможность установления факта ее работоспособности, зная структуру системы и состав датчиков, позволяющих осуществлять прямые измерения некоторых компонент ее вектора состояния.* Определения других специфических понятий, используемых в этой главе, будут даны ниже.

Рассмотрим *контролируемость систем на основе общего принципа изоморфизма*. Этот принцип является более общим и более «практически ориентированным» в сравнении с принципом сопоставления изоморфизмов [4, 5], на основе которого это свойство анализировалось ранее, например, в работе [5]. Коммутативная диаграмма системы $\Sigma=(X_0,s,X)$ с контролирующим устройством S_K показана на рис.7.1.

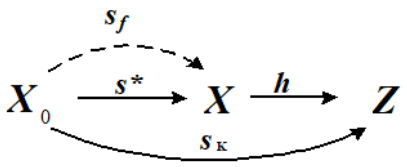


Рис. 7.1. К определению контролируемости системы

Следует отметить, что проблемы контроля систем являются весьма актуальными как в теоретическом, так и в прикладном аспектах решения [41].

Под *работоспособным* будем понимать состояние системы, при котором значения всех параметров, характеризующих выполнение системой заданных функций, соответствуют установленным требованиям. Множество функций, выполняемых системой в работоспособном состоянии, описывается «идеальным» изоморфным отображением s^*, характеризующим структуру системы. Под *отказом* понимается событие, заключающееся в нарушении работоспособного состояния системы, являющееся следствием *искажений в структуре системы* под воздействием различных факторов.

Контролируемость системы означает возможность установления в процессе функционирования факта точного соответствия фактической структуры s_f

желаемой «идеальной» структуре s^* системы, то есть факта ее работоспособности, при котором выполняется тождество $s_f \equiv s^*$ – система работоспособна – «да», либо несоответствия, то есть факта отказа, при котором фактическая и эталонная (идеальная) структуры не тождественны: $s_f \neq s^*$ – система неработоспособна – «нет». Таким образом, результатом контроля системы является *бинарный ответ* на вопрос о работоспособности системы.

При этом характер и локализация отказов не имеют значения и являются предметом анализа в другой задаче – *в задаче диагностики*, – которая здесь не рассматривается. Пусть структура s^* системы изоморфна. Тогда, в случае недоступности состояния X системы для непосредственного наблюдения, как и в задаче построения наблюдателя, требуется введение в систему датчиков, характеризуемых отображением h (см. рис.7.1). В этом случае *задача анализа контролируемости системы тождественна задаче анализа её наблюдаемости с точностью до изоморфизма s^* с тем отличием, что акцент делается не на наблюдение вектора X_0, а на контроль выполнения тождества $s_f \equiv s^*$.*

Т е о р е м а 5. *Пусть дана* (*см. рис.*7.1) *простая с точностью до изоморфизма s^* система $\Sigma=(X_0, s^*, X)$, на множестве выходов X которой действует отображение $h{:}X \to Z$ множества X в множество Z непосредственно воспринимаемых «сигналов датчиков». Причём для каждого из элементов n-вектора X и каждого из элементов m-вектора Z при $m < n$ заданы множества отсчётов значений этих элементов в дискретные моменты времени* (4.1). *При этом отображение $h{:}X \to Z$ является мономорфизмом на указанных множествах отсчётов и общая мощность множеств отсчётов элементов из Z равна* (4.2). *Тогда существует контролирующее отображение $s_к$, коммутирующее рассматриваемую диаграмму отображений и обеспечивающее однозначный, точный и полный контроль работоспособности системы Σ, то есть установление факта выполнения или не выполнения тождества $s_f \equiv s^*$ с точностью до «эталонного» изоморфизма s^* и такое, что*

$$s_к = hs^*, \quad s^* = h^{-1}s_к. \tag{7.1}$$

Пара отображений (s^*, h) *в этом случае называется контролируемой с точностью до изоморфизма s^*.*

Доказательство теоремы 5 полностью аналогично доказательству теоремы 1 о наблюдаемости с той лишь разницей, что выбираемые нами n отсчетов элементов из Z для построения системы n независимых уравнений, характеризующих в данном случае *контролирующее отображение* $s_к$, позволяют не только восстановить n-векторы X_0 и X для работоспособного состояния системы (при s_f

$\equiv s^*$), но и выявить ее отказ при $s_f \neq s^*$ путем сличения фактических показаний (отсчетов) Z_f датчиков с прогнозируемыми показаниями Z (см. рис. 7.2), считываемыми на выходе *заранее сформированного контролирующего отображения* $s_к$, определяемого по формуле (7.1) для известной структуры s^* работоспособной системы и известной структуры h датчиков.

Необходимые и достаточные условия, а также критерии контролируемости системы с точностью до изоморфизма полностью аналогичны соответствующим условиям и критериям наблюдаемости. *Точность и полнота контроля трактуются в соответствии с новой формулировкой принципа единственности в форме общего принципа изоморфизма, то есть с точностью до известного изоморфизма s*, характеризующего структуру системы*. Однозначность означает, что внутри коммутативной диаграммы отображения h и $s_к$ становятся изоморфизмами (имеют соответствующие обратные) с точностью до изоморфизма s^*, то есть $s_к \cong s_к^*$ и $h \cong h^*$, где $s_к^*$- изоморфное контролирующее устройство – наблюдатель, h^* – изоморфный измеритель.

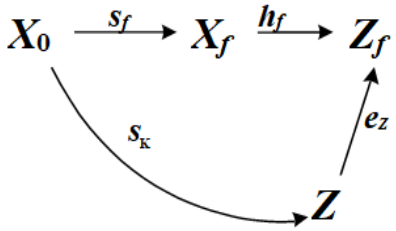


Рис.7.2. Композиция отображений для самоконтроля системы

При фиксированной структуре измерителей h контролирующее отображение (устройство) $s_к$, если оно существует, определяется по формуле (7.1). Систему Σ, удовлетворяющую условиям теоремы о контролируемости, назовем *контролируемой с точностью до изоморфизма s**.

Существование отображений, удовлетворяющих коммутативной диаграмме, представленной на рис. 7.1, и композиции (7.1), может рассматриваться как наиболее общий *алгебраический необходимый и достаточный критерий контролируемости* системы Σ, аналогичный критерию наблюдаемости (4.3). Необходимость накопления множеств отсчётов элементов из Z мощности (4.2) обусловлена требованием обеспечения *абсолютной достоверности (полноты) контроля: при реализации отсчётов такой длины система проявит все свойства отображения s**.

Контролируемость эквивалентна наблюдаемости: если система наблюдаема с точностью до изоморфизма s^*, то с точностью до этого изоморфизма она

контролируема. И, наоборот, если система контролируема с точностью до изоморфизма s^*, то с точностью до этого изоморфизма она наблюдаема. При этом отображения s_N и $s_к$, решающие разные задачи (задачи наблюдения каждого из компонентов вектора X и контроля работоспособности системы), могут как совпадать, так и отличаться даже при одинаковой структуре h датчиков. В частном случае, наблюдатель s_N может одновременно выполнять и функцию контролирующего устройства $s_к$ и тогда $s_N = s_к$. В задаче контроля композиция (7.1) является *функциональным условием проверки работоспособности* системы: если в какой-либо момент функционирования системы при неизменном, фиксированном («замороженном») в процессе контроля отображении $s_к$ равенство (7.1) не выполняется, то есть

$$s_к = hs^* \neq h_f s_f, \tag{7.2}$$

то фактическая структура s_f не тождественна идеальной структуре s^*, т.е. $s_f \neq s^*$ и констатируется переход системы в состояние отказа. На практике (см. рис. 7.2), в процессе функционирования системы задача диагностики и/или идентификации, то есть определения фактической структуры системы, часто не решается: структура s_f остаётся неизвестной и важно лишь при возникновении отказа установить факт её несоответствия идеальной, эталонной, «модельной» структуре s^*. При этом известны лишь фактические показания Z_f, снимаемые с датчиков h_f фактической структуры s_f, а также прогнозируемые с помощью «замороженного» в процессе контроля «эталонного» отображения $s_к$ показания Z на выходе датчиков (отображения) h идеальной системы s^*, которые сравниваются между собой с использованием единичного изоморфного «отображения сличения» e_Z такого, что в работоспособном состоянии выполняются условия $Z_f \equiv e_Z Z$, $Z \equiv e_Z^{-1} Z_f$.

Если в результате сличения выявлена «невязка» хотя бы некоторых отсчётов элементов из реализаций сигналов (множеств отсчётов) Z и Z_f, то есть неполное совпадение множеств Z и Z_f , что соответствует условию (7.2), то констатируется переход системы в отказное состояние.

На практике, с учётом характеристик шумов датчиков и грубости идеальной модели s^* структуры системы, на величину невязки вводятся определённые допуски. Кроме того, следует учитывать, что в данном случае к возникновению недопустимой невязки может привести и отказ датчиков ($h_f \neq h$) и самого устройства контроля ($s_{кf} \neq s_к$). Поэтому стремятся обеспечить существенно более высокую надёжность устройства контроля и датчиков путём упрощения их структур (и соответствующих отображений) в сравнении со структурой s^* контролируемой системы.

Рассмотренный вариант контроля, при котором устройство контроля $s_к$ конструктивно «встраивается» в контролируемую систему, *называют самоконтролем*.

На практике часто структура s контролируемой системы не является изоморфизмом в обычном смысле (вне коммутативных диаграмм) или, по крайней мере, это трудно доказать. Более того, структура s контролируемой системы может быть и вовсе неизвестна. Очевидно, в этих случаях схему контроля необходимо организовывать по-другому. Рассмотрим достаточно общий случай, когда структура контролируемой системы s неизвестна и неизоморфна. Коммутативная диаграмма в этом случае имеет вид, представленный на рис. 7.3.

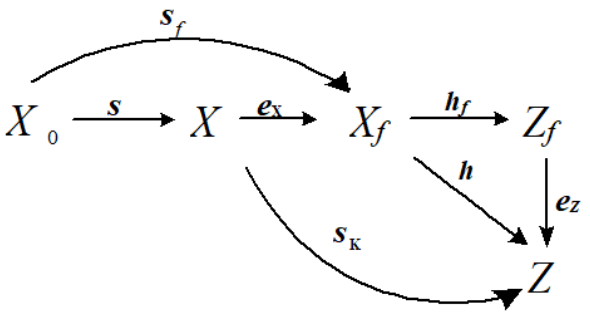


Рис.7.3. Композиция отображений для контроля неизоморфных систем с неизвестной структурой

При отсутствии отказов в системе в каждый момент времени в процессе функционирования выполняются условия

$$X_f \equiv X, \;\; e_x : X \to X_f ,$$

где X – эталонный выходной сигнал работоспособной системы с «идеальной» структурой s, X_f - выходной сигнал системы с фактической структурой s_f , e_x – единичное изоморфное (для работоспособного состояния системы) отображение. С точностью до изоморфизма e_x для работоспособной системы структура устройства контроля определяется отображением

$$s_к = he_x = h ,$$

где h – «идеальная» (без отказов) структура датчиков, являющаяся эпиморфным отображением сигналов X работоспособной системы на «идеальные», эталонные выходные сигналы Z, полученные заранее, до начала эксплуатации и наперёд известные (например, по результатам проверки реальной заведомо работоспособной системы на стенде полунатурного моделирования) для всех моментов времени функционирования системы. В процессе рабочего функционирования и контроля системы сигнал Z_f снимается с выхода датчиков с неизвестной фактической структурой h_f и с использованием единичного отображения сличения

$e_Z{:}Z_f \to Z$ сравнивается с заранее запомненным эталонным сигналом Z. При несовпадении сигналов Z_f и Z формируется признак отказа системы.

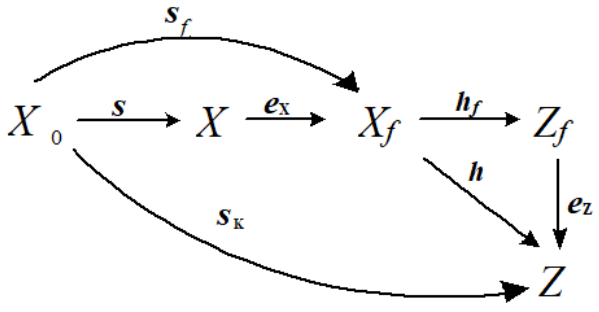


Рис. 7.4. Композиция отображений для контроля неизоморфных систем с известной структурой.

Более практичным является случай, когда структура (модель) системы s известна, хотя, может быть, и неизоморфна. Коммутативная диаграмма для контроля системы в этом случае приведена на рис. 7.4. В этом случае на стадии разработки системы в предположении её работоспособности ($X_f \equiv X$) с точностью до изоморфного отображения $e_x{:}X \to X_f$ синтезируется устройство контроля со структурой

$$s_к = he_x s = hs. \tag{7.3}$$

На стадии эксплуатации (в процессе рабочего функционирования системы) входной сигнал X_0 одновременно подаётся на «канал модели» со структурой $s_к$, являющийся устройством контроля, и на канал реально функционирующей системы, имеющей фактическую структуру s_f. Коммутативная диаграмма отображений для контроля системы, представленной на рис. 7.4, на стадии эксплуатации имеет вид, показанный на рис. 7.5.

При этом, как и ранее, фактический сигнал

$$Z_f = h_f s_f X_0 ,$$

снимаемый с выхода датчиков, имеющих фактическую структуру h_f, с использованием отображения сличения $e_Z{:}Z_f \to Z$ сравнивается с формируемым в реальном времени на выходе «канала модели» эталонным сигналом $Z = s_к X_0$.

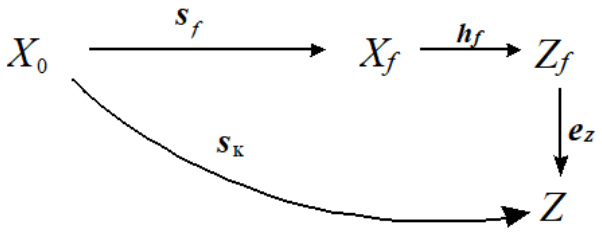


Рис.7.5. Композиция отображений для контроля неизоморфных систем на стадии эксплуатации

При несовпадении сигналов Z_f и Z формируется признак отказа системы. Как видно из (7.3), устройство контроля $s_к$ содержит в своей структуре эталонную модель s работоспособной системы и эталонную модель h датчиков. Такой способ контроля, при котором сравниваются сигналы, формируемые на выходах «канала модели» и канала с реально функционирующей («фактической») системой, часто называют способом контроля «канал-модель». Способ контроля «канал-модель» часто используется на практике. При этом устройство контроля со структурой $s_к$ либо встраивается в систему («встроенный контроль»), либо используется как независимое по всем видам ресурсов (аппаратных, программных и др.) устройство.

На практике часто встречаются случаи, когда для повышения *надёжности* и *отказобезопасности* системы её резервируют, то есть реализуют одновременную параллельную работу двух и более одинаковых по структуре систем. *Резервирование* применяют для наиболее ответственных в плане безопасности функционирования систем. Процедура контроля резервированных систем поясняется с помощью коммутативной диаграммы, представленной на рис. 7.6.

В качестве примера в состав обобщённой структуры резервированной системы, представленной на рис. 7.6, включены три одинаковых по структуре подсистемы-резерва $s_1 \equiv s_2 \equiv s_3$ с соответствующими структурами датчиков $h_1 \equiv h_2 \equiv h_3$. Каждый резерв может содержать в своей структуре встроенную систему контроля, синтезированную по принципам, изложенным выше и, кроме того, контроль работоспособности резервов осуществляется путём сравнения выходных сигналов их датчиков Z_1, Z_2, Z_3 с использованием единичных отображений сличения e_{12}: $Z_1 \to Z_2$, e_{13}: $Z_1 \to Z_3$, e_{23}: $Z_2 \to Z_3$, а также их обратных отображений e_{21}: $Z_2 \to Z_1$, e_{31}: $Z_3 \to Z_1$, e_{32}: $Z_3 \to Z_2$, которые на рис. 7.6 не показаны.

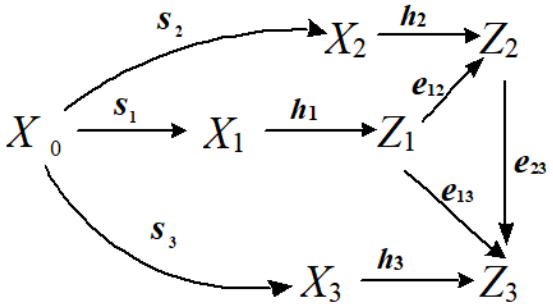


Рис.7.6 Композиция отображений для контроля резервированных систем

В этом случае на выходе каждой подсистемы её собственный выходной сигнал сличается с выходными сигналами двух других подсистем-резервов, что позволяет сразу выявить отказавший резерв без использования дополнительного «надсистемного» устройства контроля. Причём это обеспечивается даже тогда,

когда собственное устройство встроенного контроля какого-либо резерва признак отказа не сформировало (например, в случае отказа самого устройства самоконтроля).

На практике, как правило, в каждом из резервов при сличении и обработке всех трёх выходных сигналов с учётом шумов не только выявляются отказы и сбои (на основе принципа мажорирования сигналов), но и, дополнительно, выходные сигналы осредняются («стягиваются» на основе кворумирования) для передачи одинаковых значений сигналов со всех трёх резервов на последующие стадии обработки. Вполне очевидно, что в такой трёхкратно резервированной системе в каждый данный момент выявляется отказ одного конкретного резерва, который исключается из работы, а остальные резервы продолжают работать без потери функций. Это обеспечивает отказобезопасность системы до одного отказа, то есть полностью парируется один отказ без потери системой функций. Второй последовательный отказ в такой системе не может быть выявлен – точнее, факт отказа может быть установлен, но выявить в каком из двух остававшихся резервов он произошёл невозможно (если в резервах дополнительно не используется самоконтроль), что может привести к отключению двух оставшихся резервов и к передаче выполнявшихся ими функций другим системам, то есть приходится прибегнуть к *функциональному резервированию*, если это возможно. Если требуется обеспечить отказобезопасность более высокого порядка, то степень резервирования должна быть повышена путём включения в систему дополнительных подсистем-резервов.

В целом, управляемую в соответствии с предопределённым алгоритмом (то есть предусмотренную заранее) перестройку обобщённой структуры резервированной системы при выявлении устройством контроля отказа какого-либо резерва называют *реконфигурацией*. Как правило, реконфигурация осуществляется автоматически и является средством обеспечения *управляемой деградации ресурсов* и структуры системы, позволяющим сохранить выполнение наиболее важных и критичных функций системы при необратимой потере части ресурсов. Под располагаемыми *ресурсами* здесь понимаются имеющиеся в системе подсистемы-резервы, являющиеся средством и потенциалом обеспечения заданных уровней надёжности и отказобезопасности. *В отличие от надёжности, являющейся свойством как любого единичного неделимого элемента системы, так и системы в целом, свойство отказобезопасности является только системным, характерным для системы в целом.*

Очевидно, что возможности реконфигурации ограничены, так как мощность множества структур системы, соответствующая мощности множества возможных отказов, конечна. Возможности реконфигурации создаваемой системы

должны определяться требованиями к надёжности и отказобезопасности системы в течение заданного времени её рабочего функционирования. Предусматривается, что в перспективе системы, наряду с функцией *автоматической реконфигурации,* будут обладать и функцией *самоорганизации структуры*, удовлетворяющей двум условиям:

- плавное и непрерывное (по сути, на множестве структур бесконечной мощности) изменение обобщённой структуры системы в зависимости от внутренних и внешних по отношению к ней условий;

- отсутствие заранее предопределённого алгоритма перестройки структуры и использование для этого лишь заранее накопленного множества методов, средств и, может быть даже, нечётких правил, замкнутого относительно целей более высокого уровня, например, таких, как обеспечение *гомеостаза* состояния системы в широком спектре условий функционирования.

С контролем, реконфигурацией и самоорганизацией напрямую связаны *свойства робастности и адаптивности* (приспособляемости) системы к изменению условий работы. *Робастность* обеспечивает слабую чувствительность («грубость») системы по отношению к малым вариациям параметров её структуры, лежащим в пределах порогов срабатывания устройств контроля, а также к относительно небольшим изменениям внешних условий работы системы.

Робастность обеспечивает приемлемое качество функционирования системы и возможность невмешательства в процесс её работы при некотором допустимом уровне параметрических шумов в самой структуре системы и внешних помех путём их естественной «фильтрации». Превышение порогов срабатывания устройств контроля означает выход системы за границы робастности, фиксацию отказа и *необходимость реконфигурации структуры, обеспечивающей адаптацию* (*приспособляемость*) *системы к новым условиям.* Реконфигурация осуществляется и при отсутствии отказов, когда изменения параметров внешней среды вызывают выход за пределы границ нечувствительности (то есть за допустимые пределы) некоторых показателей качества функционирования системы. Примером может служить ухудшение точности стабилизации заданных переменных состояния системы при существенном изменении внешних факторов, что требует коррекции законов регулирования, то есть их *адаптации* к новым внешним условиям.

По сути *робастность и адаптация являются двумя уровнями приспособляемости системы к изменению внутренних и внешних условий.* При незначительном отклонении условий от «номинальных» вполне достаточно робастности.

При выходе системы за границы робастности необходима адаптация посредством реконфигурации или самоорганизации её структуры, так как в противном случае возможно резкое ухудшение показателей качества функционирования.

В отличие от реконфигурации, при которой мощность множества допустимых, заранее известных работоспособных структур ограничена, *самоорганизация* предусматривает *непрерывное* (по сути, на множестве структур бесконечной мощности) *изменение структуры системы* в зависимости от внутренних и внешних условий. Решение задачи самоорганизации невозможно без осуществления непрерывной, или, как иногда говорят, «текущей» *идентификации модели системы в темпе её, системы, функционирования*.

В целом реализация, например, в технической или человеко-машинной (эргатической) системе *свойств самоконтролируемости*, *автоматической реконфигурации*, *самоорганизации структуры, робастности*, *адаптации и, в целом, обеспечения гомеостаза состояния* системы в широком диапазоне условий функционирования обобщается понятием и свойством *организмичности системы*, подчеркивающим аналогию внутренней организации системы с «устройством» живых организмов. Вполне очевидно, что это свойство предполагает и реализацию в рассматриваемой системе рассмотренных ранее свойств *наблюдаемости и управляемости*.

Таким образом, определённые нами условия контролируемости системы доказывают следствие №6 к основной лемме. Ниже проанализированы условия реализуемости свойств идентифицируемости и адаптируемости систем.

Глава 8

Идентифицируемость и адаптируемость систем

Под идентификацией системы в формулировке [1, 2] понимается ее «реализация» в форме некоторой модели, то есть задача построения модели по имеющимся о системе данным, сформулированная в виде принципа единственности. Указанная задача отчасти нами проанализирована во введении к первой части и в первой главе книги, где предложена новая формулировка принципа единственности в форме общего принципа изоморфизма, а также доказаны основная лемма и теорема о реализации. *Теорема не даёт способа построения модели. Если же изоморфную модель удаётся построить, то есть решить задачу идентификации, то наличие такой модели является фундаментальной основой разрешимости с точностью до этой изоморфной модели всех других классических задач теории систем применительно к объекту*: *синтез наблюдателя, регулятора, контролирующего устройства и, в целом,* объединение (интеграцию) *всех этих устройств в единую* интегрированную информационно-управляющую систему.

Таким образом, *идентифицируемость системы определяется возможностью построения её модели по имеющимся данным*. Если удаётся построить изоморфную модель, то систему можно считать простой с точностью до этой модели. Коммутативная диаграмма идентифицируемой системы $\Sigma = (X_0, s^*, X)$ представлена на рис. 8.1.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\beta"] \arrow[rrr, bend right, "s_{Id}"'] & X_0 \arrow[r, "s^*"] & X \arrow[r, "h"] & Z \end{tikzcd}$$

Рис. 8.1. Коммутативная диаграмма идентифицируемой системы

В общем случае [1, 2], при решении задачи идентификации система Σ рассматривается как «чёрный ящик», недоступный для непосредственного воздействия на входы X_0 и непосредственного наблюдения выходов X. На рис. 8.1 U - множество специальных воздействий-стимулов на входы X_0 посредством отображения β, имеющего известную структуру и обеспечивающего существование композиции $s^*\beta$, Z – множество выходов-реакций датчиков, имеющих известную структуру h и таких, что существует композиция hs^*. Задача состоит в построении такой модели системы, которая позволяет взаимно однозначно, полно и точно объяснить соответствие множества входов X_0 множеству выходов X или

соответствие стимулов и реакций. По существу, с учетом возможности организации специальных воздействий-стимулов U и считывания выходов-реакций Z, доказанные нами основная лемма и теорема о реализации как раз и содержат утверждение об идентифицируемости системы. При этом, в зависимости от того, какой изоморфизм, замыкающий коммутативную диаграмму, изображённую на рис. 8.1, удаётся получить, возможны различные формулировки теоремы об идентифицируемости системы.

Т е о р е м а 6. *Если существует каким-либо способом полученная изоморфная модель системы s^* и отображения β и h подобраны так, что выполняются композиции $s^*\beta$ и hs^*, то существует такая изоморфная с точностью до изоморфизма s^* модель-идентификатор S_{Id}, которая позволяет коммутировать* (*то есть замкнуть*) *группу отображений, представленных на рис.* 8.1*, и найти взаимно однозначное соответствие между стимулами U и реакциями Z.*

Доказательство теоремы 6 аналогично доказательству теоремы о реализации (основной леммы). Допускается, что такой идентификатор не единственен, но если выбран конкретный его экземпляр, то в рассматриваемой диаграмме он имеет единственное обратное отображение, то есть является изоморфизмом с точностью до изоморфизма s^* и позволяет взаимно однозначно сопоставлять стимулы и реакции системы по принципу «стимул-реакция»-«реакция-стимул».

Т е о р е м а 7. *Если существует каким-либо способом полученная изоморфная модель-идентификатор $S_{Id} \cong S_{Id}^*$, построенная на непосредственно доступных данных U и Z и соответствующих известных отображениях β и h, позволяющая взаимно однозначно отображать данные U и Z друг в друга, то существует и изоморфная с точностью до изоморфизма $S_{Id} \cong S_{Id}^*$ модель системы $s \cong s^*$, замыкающая коммутативную диаграмму на рис.* 8.1*, такая, что с точностью до изоморфизма $S_{Id} \cong S_{Id}^*$ обеспечивается взаимно однозначное соответствие между входами X_0 и выходами X системы.*

Доказательство теоремы 7 аналогично доказательству теоремы о реализации (основной леммы) и теоремы 6 с той разницей, что в качестве изначально известного рассматривается другой изоморфизм. В этом случае может существовать не единственная модель s, обеспечивающая замыкание диаграммы, но при выборе конкретного экземпляра модели s обратное отображение s^{-1} будет единственным с точностью до изоморфизма $S_{Id} \cong S_{Id}^*$.

Независимо от того, относительно какого изоморфизма построена замкнутая коммутативная диаграмма, в ней будут существовать композиции $s\beta$ и hs, означающие удовлетворение парами отображений (s,β) и (s,h), соответствующим условиям управляемости и наблюдаемости с точностью до этого изоморфизма.

Например, изначально изоморфными могут быть отображение $\beta \cong \beta^*$, либо отображение $h \cong h^*$, либо оба этих отображения одновременно. Исходя из этого можно дать третий вариант формулировки теоремы об идентифицируемости системы:

Т е о р е м а 8. *Если система управляема, либо наблюдаема, либо управляема и наблюдаема с точностью до некоторого изоморфизма в коммутативной диаграмме на рис.* 4.3*, то с точностью до этого изоморфизма она и идентифицируема.*

Верно и обратное (двойственное) утверждение.

Т е о р е м а 9, д в о й с т в е н н а я к т е о р е м е 8. *Если система идентифицируема с точностью до некоторого изоморфизма в коммутативной диаграмме на рис.* 8.1*, то с точностью до этого изоморфизма она управляема и наблюдаема.*

Здесь учитывается управляемость и наблюдаемость системы и в тривиальном случае, когда отображения β и h являются единичными отображениями, действующими на входе и выходе системы (см. рис. 8.2), то есть в случае, когда система является непосредственно управляемой по входам и непосредственно наблюдаемой по выходам. В целом, доказательства всех четырёх теорем 6-9 достаточно очевидны и аналогичны доказательству основной леммы.

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r, "e"] \arrow[rrr, bend right, "s_{Id}"'] & X_0 \arrow[r, "s^*"] & X \arrow[r, "e"] & X \end{tikzcd}$$

Рис. 8.2. Идентификация в тривиальном случае

Важным и часто используемым на практике является вывод о том, что идентифицируемость системы зависит от её управляемости и наблюдаемости: *выбирая структуру органов управления* β*, траектории и модели управляемого движения* s*, либо состав* (*структуру*) *датчиков* h*, можно существенно улучшить идентифицируемость системы.*

В общем случае, существуют исключающие простой перебор способы идентификации модели системы. Например, в случае *непараметрической идентификации*, когда вообще неизвестна структура модели, для её построения могут использоваться, обучаемые на основе экспериментов с системой, искусственные нейронные сети и другие средства и методы интерполяции и аппроксимации зависимостей. Если же структура модели известна и требуется лишь определить её

параметры (*«параметрическая идентификация»*), то могут, например, использоваться способы, основанные на фильтре Калмана или на методе наименьших квадратов (МНК) [29]. Непосредственно из коммутативной диаграммы, представленной на рис. 8.1, следует, что подбираемая изоморфная модель s^* системы и соответствующий ей идентификатор S_{Id} должны удовлетворять соотношениям:

$$
\begin{aligned}
&S_{Id} = hs^*\beta,\\
&s^* = h^{-1}S_{Id}\,\beta^{-1},\ (s^*)^{-1} = \beta(S_{Id})^{-1}h,\\
&e_{x0}^{прав} = (s^*)^{-1}s^*,\ \ e_{x0}^{лев} = \beta\beta^{-1},\ \ e_x^{прав} = h^{-1}h,\ e_x^{лев} = s^*(s^*)^{-1},\\
&e_{x0}^{прав} = e_{x0}^{лев} = e_x^{прав} = e_x^{лев} = e_x\,,\\
&e_U^{прав} = \beta^{-1}\beta\,,\ \ e_U^{лев} = (S_{Id})^{-1}S_{Id}\,,\ \ e_U^{прав} = e_U^{лев} = e_U\,,\\
&e_Z^{прав} = S_{Id}(S_{Id})^{-1},\ \ e_Z^{лев} = hh^{-1},\ \ e_Z^{прав} = e_Z^{лев} = e_Z\,.
\end{aligned}
\tag{8.1}
$$

Учёт соотношений (8.1) позволяет упростить процедуру подбора изоморфной модели s^*. Кроме того, подбором «рабочих» воздействий-стимулов U и отображения β часто удаётся повысить наблюдаемость компонент вектора состояния системы и, соответственно, повысить её идентифицируемость. На практике возможны случаи, когда изоморфным в обычном смысле является инструмент исследования системы – измеритель с известной изоморфной структурой h^*, - а требование изоморфности в обычном смысле на саму модель s не накладывается (см. рис. 8.3).

$$
\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "\beta"] & X_0 \arrow[r, "s"] \arrow[rr, bend right, "s_{Id}"'] & X \arrow[r, "h^*"] & Z
\end{tikzcd}
$$

Рис. 8.3. Идентификация непосредственно наблюдаемой системы

Здесь модель s системы и модель-идентификатор S_{Id} обобщённой системы строятся с точностью до инструмента – с точностью до изоморфной модели датчиков h^*. Как и ранее, использование специально организованных управляющих воздействий U через отображение β на входы X_0 может повысить наблюдаемость (то есть «видимость» движения системы) и идентифицируемость модели s системы и необходимых компонент её вектора состояния X за счёт более полного проявления связей между ними на специально организованных движениях. Достоинство такого способа идентификации, основанного, по сути, на принципе относительности, связанном с выбором «точки зрения на систему», то есть с выбором «наблюдателя» и соответствующей ему «системы координат», состоит в упрощении процедур построения модели системы. Изоморфный наблюдатель

h^*, обеспечивающий полную непосредственную наблюдаемость выходов X системы, является простой мерой на неизоморфной в обычном смысле модели s системы, обеспечивающей полное, точное и однозначное предсказание её поведения в обобщённой системе, замкнутой (коммутируемой) идентификатором S_{Id}. Если выполняется композиция h^*s, то идентификатор S_{Id} , коммутирующий рассматриваемую диаграмму, всегда существует.

Идентифицируемость системы означает *возможность периодической корректировки* изоморфной модели s^* и соответствующей ей обобщённой модели-идентификатора S_{Id} при изменении из-за различных факторов любого из отображений s^*, β или h. *Следствием идентифицируемости является адаптируемость системы к новым условиям, позволяющая реализовать непрерывную подстройку отображений* s^*, β *и* h *в темпе их изменения для непрерывного обеспечения условий управляемости и наблюдаемости и удовлетворения критериям качества управления системой и наблюдения за её поведением. Адаптируемость с точностью до изоморфизма* s^* *эквивалентна идентифицируемости с точностью до того же изоморфизма.*

Более детально теоретические и прикладные аспекты свойства идентифицируемости, в том числе и применительно к нелинейным системам, анализируются во второй части книги при исследовании процедур калибровки датчиков и принципов построения интеллектуальных датчиков.

Приведённые рассуждения доказывают следствие №6 к основной лемме в части идентифицируемости и адаптируемости систем. Очевидна эквивалентность с точностью до какого-либо изоморфизма в коммутативной диаграмме всех четырех понятий: наблюдаемости, контролируемости, идентифицируемости и адаптируемости системы.

Глава 9

Интеграция систем с точностью до изоморфизма. Принцип суперпозиции

До сих пор мы рассматривали какую-либо систему вне связи с другими системами. На практике часто имеют дело с объединениями систем в более крупные образования-системы или метасистемы – «системы систем», называемые также комплексами (комплексными системами) или интегрированными системами. Задачи синтеза или интеграции систем в такие комплексы весьма актуальны [42, 43] и поэтому являются предметом последующего анализа.

Задачу интеграции рассмотрим на примере объединения системы наблюдения и системы управления некоторым объектом в единую *информационно-управляющую систему* (ИУС). Эта задача имеет важное самостоятельное значение, так как весьма часто встречается при синтезе интегрированных ИУС, предназначенных для управления самыми разными динамическими объектами.

Даны системы: $\sum_1 = (U, s_R, X)$ – система управления, $\sum_2 = (X_0, s_N, Z)$ – система наблюдения (оценивания), $\sum = (X_0, s^*, X)$ – управляемая система (процесс или объект), s^* - изоморфная структура системы. *Необходимо объединить объект управления, систему оценивания и систему управления в единую интегрированную информационно-управляющую систему, обеспечивающую целенаправленное управление объектом* $\sum$ *в реальном времени его функционирования.*

При фиксированной структуре s^* объекта коммутативная диаграмма интегрированной системы, объединяющей систему наблюдения (оценивания) и систему управления, имеет вид, представленный на рис. 9.1.

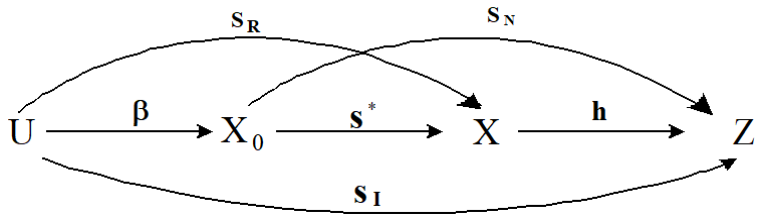


Рис. 9.1. Коммутативная диаграмма интегрированной системы

Т е о р е м а 10 (*об интеграции* (*комплексируемости*) *систем*). *Необходимыми и достаточными условиями интеграции системы наблюдения* $\sum_2 = (X_0, s_N, Z)$ *и системы управления* $\sum_1 = (U, s_R, X)$ *в единую интегрированную информационно-управляющую систему (комплекс), обеспечивающую целенаправленное*

управление объектом $\sum = (X_0, s^*, X)$ *в реальном времени его функционирования, являются:*

1) *условие наблюдаемости* $s_N = hs^*$ *с точностью до изоморфизма* s^**;*

2) *условие управляемости* $s_R = s^*\beta$ *с точностью до того же изоморфизма* s^*,

удовлетворяющие общему условию изоморфного детерминизма функционирования системы, определяемому существованием композиции-комплекса отображений или «интегранта»

$$s_I = hs^*\beta = h(s^*\beta) = hs_R = (hs^*)\beta = s_N\beta\,, \qquad (9.1)$$
$$s_I = hs_R = s_N\beta.$$

То есть, системы наблюдения и управления могут быть объединены в систему-комплекс (в интегрированную систему) тогда и только тогда, когда существует интегрант (9.1). *Условие* (9.1) *«интегрирует», то есть объединяет оба условия - условие наблюдаемости и условие управляемости системы с точностью до одной и той же модели-изоморфизма, характеризующей структуру системы.*

Таким образом, при объединении рассматриваемых систем в *комплекс* под введённым нами понятием *«интегранта»* будем подразумевать одновременное удовлетворение системы условиям наблюдаемости и управляемости с точностью до одного и того же изоморфизма.

Доказательство теоремы 10 о комплексируемости (об интеграции) систем, то есть доказательство существования интегранта s_I при указанных условиях, непосредственно следует из коммутативной диаграммы, представленной на рис. 9.1 и фундаментальной леммы. Действительно, условия наблюдаемости и управляемости подразумевают изоморфность отображения (структуры системы) s^* и удовлетворение отображениями h и β таким требованиям, при которых обеспечивается существование отображений s_N и s_R, характеризующих структуры наблюдателя и регулятора. Наличие единого для наблюдателя и регулятора изоморфизма s^* обеспечивает возможность их объединения («склейки») в единую интегрированную систему-комплекс, то есть обеспечивает существование соответствующей замкнутой относительно изоморфизма s^* композиции отображений - интегранта со структурой (9.1). Комплексируемость (интеграция) систем наблюдения и управления с точностью до общего изоморфизма s^* обеспечивает возможность точного, полного и однозначного, с точностью до изоморфизма s^*, предсказания показаний Z датчиков по значениям управляющих воздействий U и, наоборот, такого же точного, полного и однозначного, с точностью до изомор-

физма s^*, определения по показаниям Z датчиков, управлений U, воздействовавших на систему. Невыполнение хотя бы одного из условий теоремы не обеспечивает возможность интеграции, что доказывает их необходимость. При этом никакие дополнительные условия не нужны для реализации указанной возможности, что доказывает их достаточность и теорему в целом.

Вполне очевидно, что теорема 10 об интеграции вместо системы управления (регулятора) и системы наблюдения (наблюдателя) позволяет объединять в интегрированную систему-комплекс любые другие системы, имеющие в своей структуре общую изоморфную модель s^* какого-либо объекта-подсистемы. Кроме того, теорема об интеграции в определённом смысле «двойственна» теореме об идентифицируемости систем (во всех 4-х вариантах), доказанной ранее: если система идентифицируема, то она и комплексируема (является объединением-комплексом) и наоборот. Это касается и простейшего случая, показанного на рис. 8.2, когда рассматривается «свободная» система, не обременённая какими-либо устройствами управления и наблюдения за её поведением, так как даже такая свободная система уже является объединением-комплексом некоторых отображений, удовлетворяющих строго определённым условиям. Это означает, что *за исключением первосистем-изоморфизмов, все остальные системы являются интегрированными.* При этом, говоря об интегрированной системе-комплексе, нужно каждый раз оговаривать, какие отображения и по каким правилам в ней объединены.

Теорема об интеграции в определённом смысле обобщает и известное ранее «дуальное управление» [44], подразумевающее формирование таких управляющих воздействий, которые одновременно служат для изучения управляемого объекта (то есть для идентификации его модели в темпе функционирования) и для приведения его к оптимальному целевому состоянию.

Действительно, удовлетворение условиям теоремы об интеграции автоматически обусловливает возможность формирования управлений, одновременно решающих задачи приведения объекта к требуемому целевому состоянию (то есть, собственно, управляемость системы) и наблюдения за его поведением, включая «текущую идентификацию» его модели: множество управляющих воздействий U может содержать непересекающиеся подмножества аддитивных управлений, позволяющих решить как задачу целенаправленного управления, так и задачу изучения управляемого объекта, причём каждому подмножеству из U будет строго соответствовать своё подмножество в показаниях Z датчиков (обеспечивается разделимость показаний на два подмножества с точностью до изоморфизма s^*), что и обеспечивает решение общей задачи «дуального управления». Понятно, что «дуальные управления» не должны конфликтовать.

В целом возможность решения задачи «дуального управления», опирающаяся на изоморфность отображения s^*, характеризующего структуру системы, позволяет сделать и более *общий вывод – вывод о справедливости для изоморфных систем общего вида*, в том числе и для нелинейных изоморфных (а значит, простых) систем, ранее известного в математике, физике и химии применительно к линейным системам [45], *принципа суперпозиции,* подразумевающего *свойство аддитивности* (*суммирования*) [46] воздействий на систему и соответствующих им эффектов (суммирования результатов воздействий). Верен и обратный вывод: *возможность реализации «дуального управления» прямо следует из справедливости принципа суперпозиции для изоморфных, в том числе и нелинейных, систем. Ранее свойство суперпозиции рассматривалось применительно к линейным системам и считалось свойством только таких систем.*

Таким образом, принцип суперпозиции, известный ранее применительно к линейным системам, нами обобщен применительно к изоморфным системам достаточно произвольного вида. Например, изоморфные системы могут быть и нелинейными.

Вообще изоморфные системы или, точнее, системы, построенные на изоморфизмах, по сути, эквивалентны линейным системам. Линейные системы являются частным случаем изоморфных систем учитывая, что они являются простыми в смысле рассматриваемой здесь теории. По сути вся теория, разработанная для линейных систем, при условии соответствующего «масштабирования», например, теория автоматического регулирования, применима и для изоморфных систем существенно более общего вида. Можно ожидать, что в обозримой перспективе такое «масштабирование», то есть обобщение теории линейных систем в разных областях ее использования на произвольные изоморфные системы будет выполнено. Определенная часть работы в этом направлении проведена в рамках настоящего исследования.

Доказательство применимости принципа суперпозиции к изоморфным системам опирается на основную лемму, теоремы о наблюдаемости и управляемости и вполне очевидно. Например, в соответствии с теоремой об управляемости можно с разделением во времени формировать разные управляющие воздействия: одни для реализации собственно цели управления, а другие – для улучшения наблюдения за его поведением. Их результат в виде откликов может быть однозначно выявлен в соответствующих сигналах датчиков. Можно и в одни те же моменты времени формировать некоторые добавки к «целевым» управлениям, позволяющие повысить наблюдаемость и идентифицируемость объекта управления, отклики на которые также однозначно можно выявить в сигналах

датчиков. Именно применимость принципа суперпозиции позволяет одновременно решать задачи оценивания состояния изоморфного объекта, формирования тестовых сигналов для идентификации его модели, целенаправленного управления объектом (сказанное объединяется термином «дуальное управление»), контроля состояния и другие задачи.

В этом смысле *принцип суперпозиции обеспечивает не только свойство аддитивности воздействий на систему и результатов этих воздействий, но и аддитивность* (*независимость проявления*) *самих свойств системы – наблюдаемости, управляемости, контролируемости, идентифицируемости*. Принципом суперпозиции (принципом наложения) обусловлена и сама возможность интеграции изоморфных систем. Такая трактовка принципа суперпозиции и её доказательство, а, следовательно, и доказательство следствия №7 (см. пункт 3.2) к основной лемме и теореме о реализации, позволяют ввести понятие *общего фундаментального принципа суперпозиции* для изоморфных (простых) систем. Таким образом, *одно из достоинств таких систем – возможность работы с ними, как с линейными системами*.

Глава 10

Теорема (принцип) разделения. Принцип модульности

В содержательном смысле теорема (или, как иногда говорят, принцип) разделения утверждает, что применительно к одному и тому же объекту можно раздельно синтезировать систему оценивания (наблюдения) состояния объекта и далее, считая оценки состояния известными, - собственно систему управления объектом. Теорема разделения рассматривается как в приложении к современной теории оптимального управления, где она строго доказана для линейно-квадратичной задачи [29], так и применительно к задачам синтеза наблюдателей и регуляторов традиционными методами теории автоматического управления. Например, в работах [47-51] показано, что теорема разделения справедлива при синтезе регуляторов и наблюдателей методами, не требующими привлечения теории оптимального управления.

В общем случае формулировка и доказательство теоремы разделения соответствуют теореме 10 *об интеграции наблюдателя и регулятора в интегрированную информационно-управляющую систему.* Рассмотрим процедуру интеграции наблюдателя и регулятора на примере линейного объекта управления. При нулевых начальных условиях для линейного объекта

$$\dot{X} = aX + bU,$$
$$Z = hX,$$

или в операторной форме

$$X(p) = \Phi(p)Y(p), Y(p) = bU(p),$$
$$Z(p) = hX(p),$$

указанные в теореме 10 об интеграции условия поясняются коммутативной диаграммой, представленной на рис. 10.1.

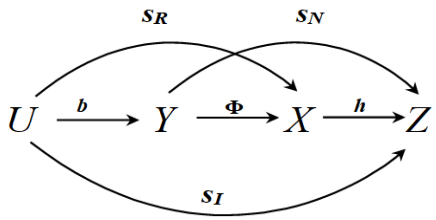


Рис. 10.1. Коммутативная диаграмма линейной интегрированной системы

Т е о р е м а 11 *(теорема разделения). Для линейной динамической системы с изоморфной структурой, определяемой фундаментальной матрицей* Ф*, интегрант* s_I *является композицией (то есть произведением) вида:*

$s_I = h\Phi b = h(\Phi b) = hs_R = (h\Phi)b = s_N b$,

$s_I = hs_R = s_N b$.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 10. Удовлетворение линейной системой условиям теорем 10 и 11 с точностью до изоморфизма Ф обусловливает выполнение необходимых и достаточных условий интеграции системы, то есть существование интегранта s_I.

Так как интегрант s_I является изоморфизмом с точностью до изоморфизма Ф, то при подаче на его вход множества известных управлений U обеспечивается однозначное, полное и точное предсказание множества наблюдений Z (показаний датчиков) и, наоборот, показания Z датчиков можно однозначно интерпретировать в значениях текущих управлений U и вычислять отличия этих значений от требуемых в соответствии с целью управления объектом. Сказанное доказывает необходимость и достаточность общего *условия изоморфного детерминизма функционирования*, являющегося общим условием интеграции, для целенаправленного управления объединённой системой.

Теорема разделения позволяет корректно и строго декомпозировать общую задачу синтеза управления любым линейным объектом на две «независимые» задачи: задачу синтеза изоморфного наблюдателя, обеспечивающего наблюдение состояния Y и соответственно выхода X объекта, и задачу синтеза изоморфного регулятора, представляющего собой обратную связь от выхода X объекта к управляющим воздействиям U и обеспечивающего управление объектом в соответствии с заданной извне целью. Слово «независимые» взято в кавычки в связи с тем, что у этих задач, решаемых по отдельности, должен иметься обязательный общий компонент – одна и та же изоморфная модель объекта, посредством которой эти задачи связываются в единую задачу целенаправленного управления. Таким образом, если быть точными, задачи синтеза наблюдателя и синтеза регулятора на самом деле не разделяются абсолютно – они связаны между собой посредством единой модели управляемого объекта.

Следует отметить, что, по существу, необходимость и достаточность существования интегранта s_I означает и *доказательство необходимости и достаточности существования обратной связи* со структурой s_I для однозначного, полного и точного целенаправленного управления объектом. Кроме того, *приведённое доказательство определяет и структуру обратной связи для управления ин-*

тегрированной системой, которая не ограничивается лишь структурой регулятора, а является суперпозицией (*«наложением»*) *регулятора и наблюдателя, что удовлетворяет и формальным условиям «дуальности управления»* [44]. *Существование такой суперпозиции для линейных систем обеспечивает возможность независимой, раздельной разработки регулятора и наблюдателя и последующего их объединения в интегрированную систему, что и составляет суть теоремы разделения и её практическое значение.*

Как следует из новой, более общей формулировки теоремы разделения, поведение линейной интегрированной системы, в которой объединены в изоморфный с точностью до изоморфизма Ф интегрант s_I изоморфные с точностью до этого же изоморфизма регулятор s_N и наблюдатель s_R, полностью предсказуемо, то есть *линейная интегрированная система является простой системой.*

Важным практическим следствием из теоремы разделения для линейных систем является *возможность объединения в интегрированную систему любого количества линейных подсистем, в том числе и построенных на разных изоморфизмах, но согласованных по входам и выходам*. Необходимость «согласования по входам и выходам» объединяемых в интегрированную систему-комплекс линейных систем связана с необходимостью обеспечения условий существования композиций соответствующих отображений для замыкания коммутативной диаграммы объединённой системы. Объединяемые в систему-комплекс (то есть в «систему систем») подсистемы могут разрабатываться и испытываться раздельно и автономно друг от друга (при соблюдении указанных выше условий). Теорема разделения обеспечивает возможность их последующей интеграции (суперпозиции или «склейки») в единую комплексную систему.

При этом не требуется проводить повторные испытания для проверки частных свойств линейных подсистем до включения их в состав интегрированной системы, поскольку эти частные свойства уже известны. Вместе с тем *необходимо иметь в виду, что после включения локальных линейных, изначально изоморфных подсистем, в интегрированную систему, свойства этих подсистем в интегрированной системе, охваченной «системным изоморфизмом-целью», могут измениться, так как у этих локальных линейных подсистем-изоморфизмов в интегрированной системе появляются новые обратные, не равные обратным отображениям, имевшимся у них до включения в интегрированную систему*. Это показано на примере во второй части книги в параграфе 1.6 первой главы первого раздела при анализе прикладной задачи о регуляторе. Сказанное лишний раз подчеркивает, что даже при объединении линейных подсистем в систему ее свойства не сводятся к сумме известных свойств подсистем – *в линейной интегрированной*

системе возникает эффект эмерджентности, характеризующийся появлением у подсистем в интегрированной системе новых свойств.

В связи с этим в процессе испытаний *необходимо проверить новые системные свойства, характеризующие интегрированную систему в целом*, а также убедиться в предсказуемости поведения подсистем, так их свойства могли измениться. К системным свойствам относятся, например, свойства наблюдаемости и управляемости, а свойства отображений, характеризующих датчики и органы управления системой, должны быть проверены заранее – до включения соответствующих подсистем в систему, – а также в необходимом объеме в составе системы при проверке системных свойств. Таким образом, *сказанное доказывает и обосновывает возможность рационального разделения труда* при проектировании и изготовлении *линейных интегрированных систем*.

Кроме того, выход из строя (отказ) какой-либо линейной подсистемы может быть купирован её заменой на точно такую же без дополнительных испытаний системы в целом, что *доказывает и обусловливает возможность взаимозаменяемости линейных подсистем* в структуре линейной интегрированной системы-комплекса. Удовлетворение проектируемой системой *принципу взаимозаменяемости* образующих её простых подсистем, является одним из важнейших требований к проектируемым системам.

Далее отметим, что простые в указанном выше смысле, условно неделимые, *функционально и аппаратно полные, автономные подсистемы*, объединяемые в линейную интегрированную систему, в практике проектирования *часто называют модулями*. *Принцип проектирования интегрированных систем с использованием простых по структуре* (*в алгебраическом и в прикладном смысле*) *модулей называют принципом модульности.* Необходимость и возможность использования принципа модульности при проектировании интегрированных систем обычно постулируется из эвристических сугубо практических соображений, основанных на успешном опыте его использования. Исходя из результатов нашей теории следует, что один и тот же «модуль» (даже характеризуемый отображением-изоморфизмом) в разных интегрированных системах может обладать несколько отличающимися свойствами и, соответственно, вести себя по-разному. Это следует учитывать при организации и назначении объема испытаний интегрированной системы. В любом случае *интегрированная система, реализованная на каком-либо изоморфизме-цели, является простой, детерминированной, полностью предсказуемой системой, то есть свойства всех входящих в нее подсистем могут быть «вычислены» с точностью до указанного системного изоморфизма-цели.*

Таким образом, математически строго показана и теоретически обоснована необходимость и достаточность удовлетворения принципу модульности (*функционально-аппаратной законченности и простоты*) *подсистем для обеспечения возможности их объединения в интегрированную систему, а также собственно возможность создания систем-комплексов из подсистем-модулей.* Удобство использования простых подсистем-модулей заключается также в том, что однажды созданный *модуль с чётко определёнными границами и интерфейсами* может быть использован многократно при создании различных интегрированных систем, но с учетом указанных выше особенностей.

Глава 11

Свойства интегрированных систем. Общий принцип относительности в алгебре

При анализе свойств таких «составных», интегрированных систем, о которых шла речь в главах 9 и 10, возникает вопрос: насколько предсказуемо их поведение, если не выполняется *условие изоморфного детерминизма функционирования*, то есть если интегрант системы s_I не является изоморфизмом внутри коммутативной диаграммы (см. рис. 9.1 и 10.1)? Вообще, возможен ли *парадокс интеграции*, когда интеграция (объединение) простых (изоморфных, полностью предсказуемых) систем может привести к появлению сложной (неизоморфной, непредсказуемой) интегрированной системы?

Применительно к линейным системам ответ дает теорема разделения. Очевидно, что в случае объединения в интегрированную систему любого количества линейных систем, которые являются простыми по природе, парадокс интеграции отсутствует. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

У т в е р ж д е н и е 11.1. *Интеграция простых линейных систем всегда приводит к появлению простой интегрированной системы, то есть при объединении простых линейных систем парадокс интеграции отсутствует.*

Доказательство утверждения очевидно и останавливаться на нём не будем. Вместе с тем нужно иметь в виду, и мы на это обращали внимание в предыдущей главе, что в интегрированной системе, объединяющей простые линейные системы и являющейся в целом простой и предсказуемой, сами изначально простые линейные подсистемы («модули») в интегрированной системе будут вести себя предсказуемо, но несколько иначе, чем вне интегрированной системы, по отдельности, так как свойства (обратные отображения) любых подсистем, и изначально изоморфных в том числе, меняются в зависимости от того, в какие интегрированные системы они включаются. Это продемонстрировано на примерах в следующей, 12-й главе, а применительно к изоморфизмам-подсистемам – во второй части книги в параграфе 1.6 первого раздела, на что мы уже указывали.

Достаточно важным является случай, когда интегрированную систему образуют нелинейные системы. Известно, что большинство систем по природе нелинейны, но для упрощения процедур синтеза регуляторов и наблюдателей, си-

стемы, а точнее их нелинейные модели, линеаризуются в пределах малых окрестностей некоторых *опорных «режимов»* их функционирования, характеризуемых определёнными значениями параметров моделей соответствующих систем. На практике после объединения таких простых линеаризованных систем в интегрированную систему вполне вероятны случаи выхода параметров их линеаризованных моделей на границы областей линеаризации или даже за их пределы. Это может быть, например, в случае выхода системы за пределы ожидаемых (то есть допустимых) условий эксплуатации и при отказах. В этом случае может нарушиться условие простоты системы – система может стать сложной, а значит и непредсказуемой, так как может стать нелинейным и неизоморфным отображение s, характеризующее объект управления и наблюдения. Кроме того, при отказах может нарушаться структура отображений h и β, характеризующих, соответственно датчики и управляющие устройства (например, исполнительные приводы органов управления объектом). При этом указанные отображения могут, например, перестать удовлетворять требованиям наблюдаемости и управляемости, а соответствующие им подсистемы могут стать нелинейными. Проанализируем суть явлений, которые могут возникать в этих случаях (см. рис. 11.1, а также рис. 9.1).

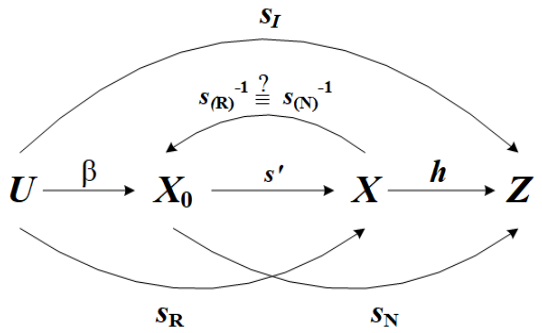


Рис. 11.1. К пояснению парадокса интеграции

Пусть нарушена структура отображения s^* так, что $s' \neq s^*$, где s' – фактическая структура системы. Тогда могут наблюдаться следующие явления:

а) неожидаемый или «иллюзорный» сигнал Z' на выходе датчиков при вполне конкретном допустимом сигнале U на входе системы.

Ожидаемым будет сигнал $X=s_R U$ на выходе объекта управления и, соответственно, сигнал $Z=hX=hs_R U=s_N X_0$ на выходе датчиков. Фактически же, на выходе объекта управления будет присутствовать сигнал $X'=s'\beta U \Rightarrow Z'=hX' \neq s_N X_0=Z$. В этом случае «иллюзорный» сигнал Z' на выходе датчиков может наблюдаться даже при фактическом отсутствии сигнала U на входе системы. Это можно трактовать как «сновидение» или «иллюзорное видение» в интегрированной системе и найти другие биологические и технические аналогии;

б) неожиданный, «фантомный» вход U' при конкретном наблюдаемом допустимом сигнале Z на выходе системы или даже при фактически отсутствующем (нулевом) сигнале на выходе, когда и фактический сигнал U на входе должен отсутствовать (должен быть равен нулю).

В этом случае имеется в виду, что ожидаемый (прогнозируемый) вход $U=s_I^{-1}Z=\beta^{-1}s^{-1}h^{-1}Z$ не совпадает с фактически «ощущаемым», «фантомным» входом $U'=\beta^{-1}(s')^{-1}h^{-1}Z$, то есть $U\neq U'$. Может иметь место и случай, когда фактически «ощущаемый» системой сигнал U' на самом деле отсутствует (является нулевым) при наблюдении на выходе датчиков некоторого допустимого сигнала Z, что опять-таки можно трактовать как «сновидение» системы. «Фантомный» же вход U' при фактически отсутствующем (нулевом) сигнале на входе можно трактовать как «фантомные ощущения» интегрированной системы. Этот случай также можно рассматривать в качестве математической модели достаточно распространенных в биологии и технике явлений. Как видно из рис. 11.1, фактически вопрос состоит в том, существуют и совпадают ли обратные

$$s_{(R)}^{-1}\overset{?}{=}s_{(N)}^{-1}\overset{?}{=}s^{-1}, \qquad (11.1)$$

где $s_{(R)}^{-1}$ – отображение, обратное к отображению s' в коммутативном треугольнике, замыкаемом регулятором s_R; $s_{(N)}^{-1}$ – отображение, обратное к отображению s' в коммутативном треугольнике, замыкаемом наблюдателем s_N; s^{-1} – отображение, обратное к отображению s, характеризующему «номинальную» структуру системы и учитываемому при её проектировании как изоморфизм $s\cong s^*$, s_I – изначально изоморфный с точностью до изоморфизма s^* интегрант системы. Ясно, что если отображение s' по каким-либо причинам стало нелинейным и неизоморфным отображением в процессе эксплуатационного функционирования, то есть $s'\neq s^*$, то обратные (11.1) не только не равны между собой, но могут и не существовать, что и обусловливает отмеченные явления.

Очевидно, похожие явления могут наблюдаться и при отличии отображений β' и h' от номинальных структур β и h. Сказанное позволяет сформулировать утверждение 11.2:

У т в е р ж д е н и е 11.2. *Объединение в интегрированную систему неизоморных (а, следовательно, сложных) по структуре модели s подсистем, а также подсистем, не удовлетворяющих условиям наблюдаемости и управляемости, приводит к возникновению сложных интегрированных систем, поведение которых непредсказуемо.*

Доказательство утверждения, по сути, приведено выше. Как уже отмечалось, в таких системах могут наблюдаться «фантомные» или «иллюзорные» явления. Следует также иметь в виду, что указанные явления могут наблюдаться и

в правильно синтезированных, изначально изоморфных, интегрированных нелинейных и линейных системах из-за возникших отказов, вследствие которых параметры структур систем по каким-либо причинам стали отличаться от номинальных.

У т в е р ж д е н и е 11.3. *Если структура модели s объекта изоморфна в обычном смысле и существуют с точностью до изоморфизма s изоморфизмы* s_R* *и* s_N* *такие, что* s_R* = sβ *и* s_N* = *hs* (*рис.* 11.1)*, то всегда существует интегрант (композиция)* s_I = *hs*β = *h*s_R* = s_N*β*, позволяющий объединить построенные на основе модели s объекта изоморфный регулятор* s_R* *и изоморфный наблюдатель* s_N* *в простую интегрированную систему, поведение которой полностью предсказуемо.*

Иными словами, если объект управления является нелинейным, но простым и управляем и наблюдаем с точностью до изоморфизма $s \cong s^*$, то есть существуют регулятор s_R* и наблюдатель s_N*, то интегрированная система полностью предсказуема.

Очевидно, что в формулировке утверждения предполагается, что отображения *h* и β удовлетворяют, соответственно, условиям наблюдаемости и управляемости. *По сути, утверждение* 11.3 *является более общей формулировкой теоремы разделения, позволяющей раздельно синтезировать наблюдатель и регулятор для нелинейного, но изоморфного объекта управления. Это также означает полную реализуемость и предсказуемость «дуального управления» таким объектом.*

По сути, теорема разделения позволила формально строго определить условия разрешимости задачи дуального управления в наиболее общем случае. Доказательство очевидно. Действительно, так как справедливы равенства $X=s_R^*U=s\beta U$, $Z=s_N^*X_0=hsX_0$ и $X_0=s^{-1}X$, то $Z=hss^{-1}X=hX$ и $Z=hs_R^*U=hs\beta U=s_N^*\beta U$. То есть $Z=hs_R^*U=s_IU=s_N^*\beta U$ и $s_I=hs_R^*=s_N^*\beta$, где $s_I=hs\beta$, а s_R* и s_N* - изоморфные с точностью до изоморфизма s^* регулятор и наблюдатель.

Таким образом, в общем случае, теорема разделения доказывает существование изоморфного (простого по структуре) интегранта, являющегося композицией датчиков с мономорфной структурой *h* и изоморфного регулятора s_R*, либо композицией изоморфного наблюдателя s_N* и органов управления объектом с эпиморфной структурой β. Любая из этих композиций гарантирует существование изоморфного интегранта, обеспечивающего простоту и, следовательно, полную предсказуемость поведения интегрированной системы. Следствием утверждения 11.3 являются утверждения 11.4 и 11.5, доказательства которых тривиальны.

У т в е р ж д е н и е 11.4. *Вполне управляемая с точностью до изоморфизма s^*, непосредственно наблюдаемая интегрированная система полностью предсказуема* (*рис.* 11.2)*, то есть является простой системой.*

Действительно, так как s_R^* – изоморфизм с точностью до изоморфизма s^* и $h \cong h^*$ – обычный изоморфизм, то по теореме 2 из главы 4 справедливо равенство $s_I \cong s_I^*$, то есть s_I – изоморфизм с точностью до изоморфизма h^*, а значит и с точностью до изоморфной композиции h^*s^*, имеющей с изоморфизмом h^* одинаковый размер.

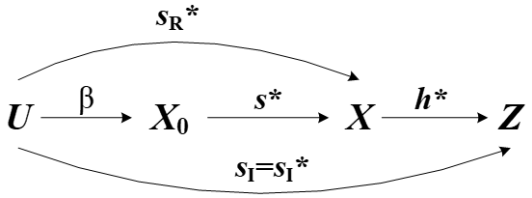


Рис. 11.2. К пояснению утверждения 11.4

У т в е р ж д е н и е 11.5. *Непосредственно управляемая по входам и вполне наблюдаемая с точностью до изоморфизма s^* интегрированная система является простой и полностью предсказуемой* (*рис.* 11.3).

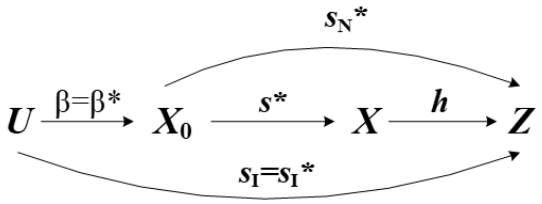


Рис. 11.3. К пояснению утверждения 11.5

Доказательство аналогично предыдущему с учетом изоморфности β^* и s_N^*. Следует отметить, что в условиях утверждений 11.3, 11.4 и 11.5 обратные $s_{(R)}^{-1}$ и $s_{(N)}^{-1}$ совпадают и равны обычному обратному s^{*-1} к изоморфизму s^*, с точностью до которого определяются все обратные в коммутативной диаграмме, так как на этом изоморфизме в данном случае реализована интегрированная система, то есть парадокс интеграции не возникает - поведение интегрированной системы полностью предсказуемо с точностью до изоморфизма s^*.

Это также означает, что обычный изоморфизм, если он является системообразующим (с точностью до него определяются все обратные в коммутативной диаграмме), *имеет единственное обратное вне зависимости от того, погружен он в какой-либо коммутативный треугольник или нет.* То есть справедливо утверждение 11.6.

У т в е р ж д е н и е 11.6. *Замкнутая композиция любого количества любых по структуре отображений, если она существует и выполняется, не изменяет*

свойств («не портит») обычного изоморфизма, погружённого в эту композицию, если он является системообразующим.

Ясно, что во всех случаях *обычный системообразующий изоморфизм, на котором реализована система, является «мерой» всех других отображений, коммутируемых им в соответствующей композиции* (*системе*) *и определяет их свойства*. Под свойствами отображений, коммутируемых обычным изоморфизмом в замкнутой диаграмме и соответствующей системе, понимаются отвечающие этим коммутируемым отображениям единственные обратные отображения, детерминируемые изоморфизмом.

По сути мы получили, что *в композиции с другими обычными системообразующими изоморфизмами у одного и того же отображения, в том числе изначально* (*до включения в систему*) *изоморфного, в разных коммутативных диаграммах* (*системах*) *могут быть другие обратные отображения, а значит и другие свойства.* Этот простой формально-математический, но интуитивно не очевидный, вывод на самом деле является очень важным не только для теории систем, но и для алгебры и, следовательно, имеет весьма общий, фундаментальный характер. По существу, этот вывод можно интерпретировать как введение и дополнительное к следствию 5, обсуждавшемуся в главе 3 применительно к основной лемме и базовым определениям теории систем, формально-математическое доказательство *принципа относительности в алгебре*.

Особое внимание следует обратить на то, что даже *изначально изоморфное в обычном смысле* (*до включения в систему*) *отображение, реализующее после включения в систему в композиции с другими отображениями какой-либо системообразующий изоморфизм-цель, приобретает в соответствующей системе другие свойства* (*имеет другое обратное*), *определяемые изоморфизмом-целью*. Применительно к линейным системам доказательство этого утверждения приведено, как мы указывали, во второй части книги в параграфе 1.6 первого раздела.

Таким образом, справедливо утверждение 11.7.

У т в е р ж д е н и е 11.7. *Если хотя бы одно из отображений* β, s *или* h *является изоморфизмом в обычном смысле* (*вне коммутативной диаграммы*), *то интегрированная система, построенная на этом изоморфизме, полностью предсказуема с точностью до этого изоморфизма.*

В отличие от случаев 11.4 и 11.5 (см. рис. 11.2 и 11.3), для интегрированных систем с неизоморфной в обычном смысле структурой s объекта, при условии выполнения всех композиций отображений в соответствующей замкнутой коммутативной диаграмме, можно сделать вывод: для обеспечения предсказуемости

поведения интегрированной информационно-управляющей системы, используемой для управления таким объектом *s*, существуют две альтернативы - либо нужно больше получать информации, то есть обеспечить полную непосредственную наблюдаемость посредством естественного изоморфизма h^* для управления системой с точностью до этого изоморфизма h^* (что позволит реализовать интегрированную систему, управляемую по выходам с точностью до полной непосредственной наблюдаемости объекта), либо нужно развивать систему управления и обеспечить полную непосредственную управляемость по входам посредством изоморфизма β^* для наблюдения за объектом с точностью до этого изоморфизма β^* (что обеспечит реализацию интегрированной системы, наблюдаемой с точностью до полной непосредственной управляемости объекта по входам).

В принципе возможен и третий вариант – попытаться одновременно обеспечить изоморфность каждого из отображений β и h при соблюдении соответствующих условий управляемости и наблюдаемости. Тогда становится справедливым утверждение (см. рис. 11.4).

У т в е р ж д е н и е 11.8. *Непосредственно управляемая по входам и непосредственно наблюдаемая по выходам интегрированная система полностью предсказуема с точностью до изоморфизмов* β^* *и* h^**, даже если объект управления s по структуре неизоморфен.*

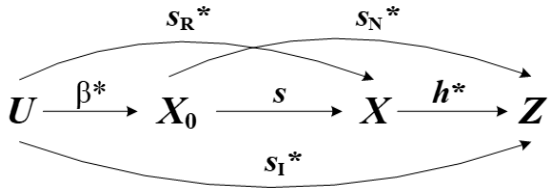


Рис. 11.4. К пояснению утверждения 11.8

Доказательство этого утверждения сводится к доказательству тождественности отображений $s_{(R)}^{-1} \equiv s_{(N)}^{-1} \equiv s^{-1}$, обратных для отображения *s* и коммутируемых внутри разных диаграмм общей коммутативной диаграммы отображениями $(s_R^*)^{-1}$, $(s_N^*)^{-1}$ и $(s_I^*)^{-1}$ (см. рис. 11.4 и рис. 11.1). Нетрудно показать, что это условие выполняется. Действительно, для интегрированной системы из коммутативных диаграмм, представленных на рис. 11.4 и рис. 11.1, следует:

$$s^{-1} = \beta^*(s_I^*)^{-1}h^* = \langle\ (s_I^*)^{-1}h^* = (s_R^*)^{-1}\ \rangle = \beta^*(s_R^*)^{-1} = s_{(R)}^{-1} \Rightarrow s^{-1} \equiv s_{(R)}^{-1}$$

и

$$s^{-1} = \beta^*(s_I^*)^{-1}h^* = \langle\ \beta^*(s_I^*)^{-1} = (s_N^*)^{-1}\ \rangle = (s_N^*)^{-1}h^* = s_{(N)}^{-1} \Rightarrow s^{-1} \equiv s_{(N)}^{-1}.$$

Следовательно, $s^{-1} \equiv s_{(R)}^{-1} \equiv s_{(N)}^{-1}$, что и требовалось доказать.

Таким образом, нами определены условия предсказуемости поведения (условия простоты) интегрированной системы в различных случаях объединения в такую систему объекта управления, органов управления, датчиков и, в целом, наблюдателей и регуляторов.

Отметим также, что все проанализированные основные свойства систем и критерии их реализуемости относятся по существу не к «свободной», а к интегрированной системе, в которой должна фигурировать не только модель, характеризующая собственную структуру «свободной» системы, но и модель некоторой другой системы, позволяющей, например, наблюдать за поведением «свободной» системы (модель датчиков и модель наблюдателя) или целенаправленно управлять её поведением – модель органов управления и модель регулятора в форме обратной связи, – а также другие модели, например, модель контролирующего устройства и др. «Свободная» система является тривиальным, «вырожденным» случаем интегрированной системы, при котором все другие отображения являются обычными единичными отображениями-изоморфизмами.

В целом, с учетом алгебраизации теории систем [4, 7, 8, 14, 17, 52, 53], полученные результаты в области теории интеграции систем, отраженные в главах 9-11, являются важными, так как позволяют проанализировать многие наиболее значимые проблемы интеграции систем с качественных, формально-математических и мировоззренческих теоретико-физических позиций и дают возможность на основе разработанной теории сформулировать рекомендации проектировщикам интегрированных систем или строго обосновать приемы и принципы проектирования, использующиеся до настоящего времени в качестве аксиоматических и постулируемые на основе опыта. Прикладные аспекты и примеры применения рассмотренной теории интеграции систем в комплексы (или, как ее иногда называют, теории *системного проектирования* или *системной интеграции*), разработанной на основе общего принципа изоморфизма, изложены в работах [10, 54-60] и во второй части книги.

В качестве наиболее важного вывода, который следует из материалов этой главы, отметим дополнительное к следствию 5, обсуждавшемуся в главе 3 применительно к основной лемме и базовым определениям теории систем, подтверждение *открытия* и формально-математического обоснования *принципа относительности в алгебре*, который, как мы надеемся, позволит по-новому переосмыслить мировоззренческие, теоретико-физические основания известных теорий относительности, не сомневаясь в правильности их базовых положений, и многие, на первый взгляд парадоксальные, явления в квантовой физике, биоло-

гии и других научных дисциплинах, а также придаст импульс исследованиям феномена «относительности» собственно в алгебре и вообще в математике, в которых ранее свойства соответствующих объектов исследования трактовались строго однозначно. Обсуждение *принципа относительности в алгебре* будет продолжено в главе 12 с демонстрацией примеров, подтверждающих его достоверность.

Глава 12

Определение обратных для отображений в типовых коммутативных диаграммах задач теории систем

Как следует из материалов исследований, изложенных в предыдущих главах книги, в алгебраической теории систем, основанной на общем принципе изоморфизма, часто возникает задача определения обратных для отображений, образующих коммутативные диаграммы, характеризующие изоморфные преобразования групп и других множеств с операциями. К построению и анализу таких коммутативных диаграмм в рамках рассматриваемой нами теории сводятся практически все классические задачи: моделирование (реализация) систем и идентификация моделей, синтез регуляторов и наблюдателей, контроль и интеграция систем и, как будет показано в главе 13, обработка информации в системах.

С чисто математической, алгебраической точки зрения рассматривается типичная для теории групп задача определения изоморфных преобразований. Задача часто встречается в теории групп симметрии и в других приложениях и разделах алгебры. Однако в рамках алгебраической теории систем, основанной на новом аксиоматическом принципе – общем принципе изоморфизма, – эта задача имеет существенные особенности, вытекающие из сформулированных и доказанных в главе 2 *основной леммы и теоремы о реализации изоморфизма композицией отображений*, утверждающих существование обратных у отображений, образующих эту композицию. *Проблема заключается в определении этих обратных* и требует специального обсуждения. Это обсуждение было начато в статье [62], в предыдущих главах книги и в статье [61], основное содержание которой приводится здесь с некоторыми дополнениями и комментариями.

Дело в том, что отображения, составляющие композицию, в общем случае, вне коммутативной диаграммы не являются изоморфизмами в обычном смысле. В связи с этим *задача определения обратных* становится нетривиальной. Нами было показано, что теорема о реализации позволяет эту задачу решить: обратные к отображениям, составляющим композицию, можно определить *с точностью до изоморфизма*, замыкающего композицию в коммутативную диаграмму. Здесь продолжим изложение метода решения задачи определения обратных.

Ранее было показано, что основная лемма и теорема о реализации используются в качестве основных опорных теоретических положений в рассматриваемой нами алгебраической теории систем. Вместе с тем, как нам представляется, теорема имеет более высокую общность и является самостоятельным математическим результатом, который может быть востребован в других разделах алгебры, оперирующих различными алгебраическими категориями, в том числе в теории групп симметрии, изучающей специфические для нее изоморфные преобразования. Само понятие изоморфизма предполагает симметрию свойств соответствующих алгебраических категорий. Исходя из этого, демонстрация применения теоремы в задаче определения обратных может оказаться полезной в теории групп симметрии. Кроме того, будет продолжено обсуждение общего принципа относительности в алгебре, введенного следствием 5 в главе 3, ранее прокомментированного в главе 11 применительно к интегрированным системам.

Будем рассматривать коммутативную диаграмму, показанную на рис. 12.1, использовавшуюся при формулировке и доказательстве основной леммы и теоремы о реализации в главе 2. К такой типовой, по сути, канонической диаграмме приводятся коммутативные диаграммы практически во всех задачах алгебраической теории систем. Здесь, как и ранее в рамках указанных утверждений, если отображение $f{:}X\to Y$ обычный изоморфизм и существуют отображения $g{:}X\to Z$ и $h{:}Z\to Y$, образующие композицию $f=hg$, то отображения g и h являются изоморфизмами *с точностью до изоморфизма* f.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & Y \\ & Z \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

Рис. 12.1. Типовая коммутативная диаграмма задач теории систем

Про композицию hg можно сказать, что она *реализует, моделирует* отображение-изоморфизм f, то есть делает тоже самое, что и изоморфизм f напрямую, но путем последовательного выполнения отображений g и h. Отображение f должно быть изоморфным вне коммутативной диаграммы, то есть должно быть обыкновенным, «безусловным» изоморфизмом. Относительно отображений g и h основная лемма и теорема утверждают, что даже если эти отображения по отдельности, вне композиции и коммутативной диаграммы, не являются изоморфизмами, то в составе композиции $f=hg$, замкнутой изоморфизмом f в коммутативную диаграмму, становятся *изоморфизмами с точностью до изоморфизма* f, то есть становятся некоторыми «условными изоморфизмами» или «относитель-

ными изоморфизмами» - изоморфизмами относительно (с точностью до) изоморфизма f. Это означает, что каждое из отображений g и h является изоморфизмом только и строго в рамках коммутативной диаграммы отображений, показанной на рис. 12.1. При этих условиях отображения g и h в коммутативной диаграмме удовлетворяют всем свойствам изоморфных отображений, определенным в алгебре [15], то есть результат действия напрямую обратного к изоморфизму f отображения f^{-1} в точности совпадет с результатом действия композиции $g^{-1}h^{-1}=f^{-1}$, предполагающей последовательное выполнение обратных отображений h^{-1} и g^{-1}.

Так как отображения g и h в коммутативной диаграмме являются изоморфизмами, то у них в этой диаграмме должны быть единственные обратные g^{-1} и h^{-1}. Определим эти обратные для двух случаев:

1) в первом случае все отображения f, g и h и композиция $f=hg$ в коммутативной диаграмме на рис. 12.1 определены изначально. Во многих задачах теории систем возникает необходимость определения обратных g^{-1} и h^{-1} в явном виде;

2) во втором случае коммутативная диаграмма преобразуется к виду, показанному на рис. 12.2.

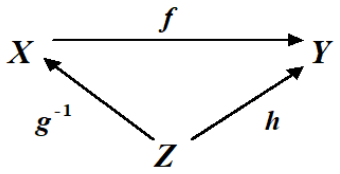


Рис. 12.2. Коммутативная диаграмма для 2-го случая

Здесь изначально известны лишь изоморфное отображение f, некоторое отображение, обозначаемое как g^{-1}, и их композиция fg^{-1}. Ясно, что при этих условиях отображение h, коммутирующее указанную композицию, существует, единственно и сразу определяется по формуле $fg^{-1}=h$.

В данном случае неизвестно отображение h^{-1} и его требуется определить. *Неизвестно и отображение* g, обратное к g^{-1}, которое также требуется определить. Однако отображения g и h^{-1}, обратные соответственно к g^{-1} и h, могут быть определены лишь с точностью до класса, то есть *не единственны*. Это связано с тем, что, исходя из требований основной леммы и теоремы о реализации, в данном случае не определены изначально и одновременно пара отображений (h, g) и их композиция $hg=f$, реализующая изоморфизм f, либо пара отображений (g^{-1}, h^{-1}) и их композиция $g^{-1}h^{-1}=f^{-1}$, реализующая изоморфизм f^{-1}.

Таким образом, по сути, в этом втором случае требуется найти классы допустимых отображений h^{-1} и g, удовлетворяющие условию $fg^{-1}=h$ и другим

условиям теоремы о реализации, которые будут приведены ниже. Очевидно, что искомые классы отображений h^{-1} и g с учетом этих условий будут строго взаимосвязаны.

После определения классов допустимых отображений при необходимости можно будет выбрать по одному взаимосвязанному экземпляру отображений из соответствующих классов и зафиксировать эти экземпляры в коммутативной диаграмме. Только в этом случае будут зафиксированы и могут быть вычислены *единственные* обратные к этим экземплярам отображений. Ясно, что после фиксации конкретных экземпляров отображений из допустимых классов этот случай ничем не будет отличаться от первого случая, когда все отображения в коммутативной диаграмме известны.

Случай, приведенный на рис. 12.2, характерен, например, для приложения теоремы о реализации к задаче определения регуляторов в теории систем (см. главу 5 и работы [20, 21, 62]). Эквивалентен ему и рассмотренный в главе 4 и работах [35, 38, 62] случай определения наблюдателей – см. рис. 12.3.

При определении наблюдателей отличие состоит в том, что заранее известны и определены изоморфное отображение f, некоторое отображение, обозначаемое как h^{-1}, и их композиция $h^{-1}f = g$. Задача состоит в определении отображений h и g^{-1}. По аналогии с рис. 12.2 отображения h и g^{-1} на рис. 12.3 могут быть определены с точностью до класса. В силу эквивалентности (двойственности) постановок задач, проиллюстрированных на рис. 12.2 и рис. 12.3, в дальнейшем будем решать лишь задачу, отраженную коммутативной диаграммой на рис. 12.2.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & Y \arrow[dl, "h^{-1}"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

Рис. 12.3 Эквивалентная коммутативная диаграмма для 2-го случая

Начнем с рассмотрения первого случая и рис. 12.1, когда в коммутативной диаграмме изначально определены композиция $f=hg$ и все отображения f, g и h. Причем f таково, что является изоморфизмом и вне коммутативной диаграммы. Исходя из основной леммы и теоремы о реализации известно (см. главу 2 и работу [62]), что в этом случае единственные обратные g^{-1} и h^{-1} в коммутативной диаграмме существуют. Требуется их найти.

Ясно, что обратные g^{-1} и h^{-1}, исходя из условий теоремы и полученных на ее основе равенств, должны полностью определяться исходными отображениями f,

g и h. Попытаемся выразить обратные g^{-1} и h^{-1} через исходные известные отображения и получить, таким образом, правила для их вычисления.

Непосредственно из коммутативной диаграммы, показанной на рис. 12.1, в силу изоморфности в обычном смысле отображения f, следуют равенства

$$e_x^{\text{прав}}=f^{-1}f,\ e_y^{\text{лев}}=ff^{-1},\ e_x^{\text{лев}}=g^{-1}g,\ e_y^{\text{прав}}=hh^{-1},\ \ f^{-1}=e_xf^{-1},\ \ f^{-1}=f^{-1}e_y,$$

$$e_x=e_x^{\text{прав}}=e_x^{\text{лев}}=e_y^{\text{прав}}=e_y^{\text{лев}}=e_y=e. \qquad (12.1)$$

Здесь $e_x^{\text{прав}}$, $e_x^{\text{лев}}$ – правая и левая единицы на X; $e_y^{\text{прав}}$, $e_y^{\text{лев}}$ – правая и левая единицы на Y. В силу единственности отображения f^{-1} (так как по условию f – обычный изоморфизм), отображения e_x и e_y также единственны и равны e, где e – обычное единичное отображение такое, что $e= ee= ee^{-1}= e^{-1}e=e^{-1}$. Из вспомогательных диаграмм, построенных на основе исходной диаграммы и приведенных на рис. П.1-П.7 в Приложении к части 1 книги, следуют равенства

$$h^{-1}=e_zh^{-1},\ h^{-1}=h^{-1}e_y,\ g^{-1}=g^{-1}e_z,\ g^{-1}=e_xg^{-1},$$

где e_z – некоторая единица на Z. Из вспомогательных диаграмм, показанных на рис. П.1*б*, можно также получить равенства

$$f^{-1}=g^{-1}h^{-1},\ e_z^{\text{лев}}=gg^{-1},\ e_z^{\text{прав}}=h^{-1}h,$$

где $e_z^{\text{лев}}$, $e_z^{\text{прав}}$ – левая и правая единицы на Z.

При доказательстве теоремы о реализации в Приложении к первой части книги показано, что в коммутативной диаграмме на рис. 12.1 и, соответственно, на рис. П.1*а* выполняются равенства

$$e_z^{\text{лев}}=gg^{-1},\ e_z^{\text{прав}}=h^{-1}h,\ \ e_z^{\text{лев}}=e_z^{\text{прав}}=e_z,\ e_z^{\text{лев}}e_z^{\text{прав}}=e_z,\ e_z^{\text{прав}}e_z^{\text{лев}}=e_z,$$

$$(e_z)^{-1}=e_z,\ e_ze_z=e_z. \qquad (12.2)$$

Из этих равенств следует, что

$$e_z^{\text{лев}}e_z^{\text{прав}} = e_z^{\text{прав}}e_z^{\text{лев}},$$

то есть

$$gg^{-1}h^{-1}h=h^{-1}hgg^{-1}.$$

Тогда с учетом равенств $f^{-1}=g^{-1}h^{-1}$ и $f=hg$ получим

$$g\,f^{-1}h=h^{-1}fg^{-1}.$$

Очевидно, что существует композиция отображения g^{-1} с каждой из частей этого равенства. «Умножим» равенство на g^{-1} слева, получим

$$g^{-1}gf^{-1}h = g^{-1}h^{-1}fg^{-1}. \qquad (12.3)$$

Так как $g^{-1}h^{-1}=f^{-1}$, то правая часть равенства (12.3) примет вид

$$f^{-1}f\,g^{-1}=\langle\, e_x^{\text{прав}}=f^{-1}f\,\rangle=e_x^{\text{прав}}g^{-1}=\langle\, e_x^{\text{прав}}=e_x^{\text{лев}}=e\,\rangle=g^{-1}.$$

С учетом $e_x^{\text{лев}}=g^{-1}g$ левую часть равенства (12.3) запишем в виде

$$e_x^{\text{лев}}f^{-1}h=\langle\, e_x^{\text{лев}}f^{-1}=f^{-1}\,\rangle=f^{-1}h=g^{-1},\ \Rightarrow\ f^{-1}h=g^{-1}.$$

То есть окончательно

$$g^{-1}=f^{-1}h. \qquad (12.4)$$

Здесь h изначально известно, а f^{-1} может быть легко вычислено, так как f также является известным обычным изоморфным отображением, для которого обратное f^{-1} заведомо существует. Аналогично можно показать, что

$$h^{-1}=gf^{-1}. \qquad (12.5)$$

Равенство (12.5) можно непосредственно проверить и по коммутативной диаграмме, показанной на рис. П.1*а*. Здесь также в правой части все отображения известны.

Таким образом, обратные g^{-1} и h^{-1} могут быть достаточно просто вычислены по известным отображениям, входящим в исходную коммутативную диаграмму. Убедиться, что отображения g^{-1} и h^{-1} действительно являются обратными к соответствующим исходным отображениям в коммутативной диаграмме, показанной на рис. 12.1, можно путем их непосредственной подстановки в равенства (12.2), справедливость которых должна обеспечиваться в соответствии с условиями основной леммы и теоремы о реализации.

Действительно

$$e_z^{\text{лев}}=gg^{-1}=\langle\, g^{-1}=f^{-1}h\,\rangle=gf^{-1}h \text{ и } e_z^{\text{прав}}=h^{-1}h=\langle\, h^{-1}=g\,f^{-1}\rangle=gf^{-1}h\ \Rightarrow e_z^{\text{лев}}=e_z^{\text{прав}}=e_z.$$

$$e_z^{\text{лев}}e_z^{\text{прав}}=gf^{-1}hgf^{-1}h=\langle\, hg=f\,\rangle=gf^{-1}f\,f^{-1}h=\langle\, f^{-1}f=e_x^{\text{прав}},\ f\,f^{-1}=e_y^{\text{лев}}\rangle=gf^{-1}e_y^{\text{лев}}h=$$

$$=ge_x^{\text{прав}}f^{-1}h=\langle\, f^{-1}e_y^{\text{лев}}=f^{-1},\ e_x^{\text{прав}}f^{-1}=f^{-1}\,\rangle=g\,f^{-1}h=e_z.$$

Таким образом, формулы (12.4) и (12.5) для вычисления обратных g^{-1} и h^{-1} верны и могут применяться внутри коммутативной диаграммы, показанной на рис. 12.1. Например, в простейшем и часто встречающемся случае, когда исходный изоморфизм f является обычным единичным отображением (в случае матриц – обычной единичной матрицей), то есть

$$f=f^{-1}=e,$$

обратные g^{-1} и h^{-1} тривиальны и не требуют вычислений, так как в этом случае всегда $g^{-1}=h$ и $h^{-1}=g$. Это видно из вспомогательной диаграммы на рис. П.1*б*, из которой следует, что $eh=h$ и $ge=g$.

На первый взгляд равенства (12.4) и (12.5) можно было сразу записать из коммутативных диаграмм, показанных на рис. 12.1 и рис. П.1*а*. Однако эти равенства не так тривиальны, как может показаться, ведь у отображений g и h вне коммутативной диаграммы обратные могут не существовать. Приведенные рассуждения как раз позволили доказать существование обратных g^{-1} и h^{-1} в коммутативной диаграмме, отчасти повторив доказательство основной леммы, приведенное в Приложении к части 1, и строго вывести формулы (12.4) и (12.5) для их вычисления.

Отметим, что приведенные рассуждения применительно к вычислению обратных g^{-1} и h^{-1}, по сути, дополняют доказательство следствия 10 главы 3 в части выполнения условий (3.1) - (3.9) для случая, когда f является тривиальным тождественным (обычным единичным) отображением, и условий (3.10) – (3.18) для изоморфизма f общего вида.

Рассмотрим примеры вычисления обратных для первого случая, когда в исходной диаграмме на рис. 12.1 в качестве отображений используются матрицы. Коммутативная диаграмма для матриц представлена на рис. 12.4.

Пример 1. Пусть матрицы имеют следующую структуру:

$$F=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ G=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix},\ H=\begin{bmatrix}0{,}5 & 0 & 0{,}5\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix},\ X=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix},\ Y=\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}. \qquad (12.6)$$

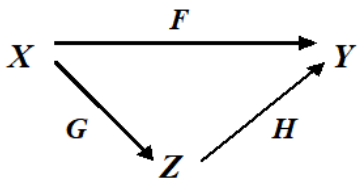


Рис. 12.4. Коммутативная диаграмма для матриц

Нетрудно убедиться, что композиция $F=HG$ выполняется, что соответствует условиям основной леммы и теоремы о реализации. Значит, как следует из этих утверждений, несмотря на то, что матрицы H и G прямоугольные и в обычном смысле необратимы, внутри коммутативной диаграммы они должны иметь единственные обратные с точностью до изоморфизма F. Так как F обычная единичная матрица, то в соответствии с выявленными нами правилами (12.4) и (12.5) определения обратных, в данном случае $G^{-1}=H$ и $H^{-1}=G$, то есть

$$G^{-1}=\begin{bmatrix}0{,}5 & 0 & 0{,}5\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix},\ H^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}. \qquad (12.7)$$

Можно убедиться, что такие матрицы G^{-1} и H^{-1} действительно являются единственными обратными к матрицам G и H в коммутативной диаграмме, так как удовлетворяют всем условиям (12.1) и (12.2).

Пример 2. Здесь матрицы имеют следующую структуру (пример заимствован из Приложения к первой части книги и [62]):

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ ba^{-1} & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 1 \\ ba^{-1} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}. \tag{12.8}$$

Выполняется и композиция $F = HG$. В Приложении к части 1 книги и в [62] показано, что основная лемма и теорема о реализации справедливы и в более широком случае – для изоморфизмов, являющихся таковыми не только в обычном смысле – вне коммутативной диаграммы, – но и обладающих особыми свойствами, «необыкновенных» изоморфизмов. Так в данном случае изоморфизм F имеет особенность, заключающуюся в том, что его структура зависит от структуры отображаемых матриц X, Y. Действительно, вполне очевидно, что определитель матрицы F равен нулю и она не имеет обратной в обычном смысле. Вместе с тем, можно убедиться, что для матрицы F, структура которой определяется по правилам (12.8), существует обратная (в алгебраическом смысле [15]) матрица

$$F^{-1} = FF^{-1} = F^{-1}F = FF = F^{-1}F^{-1} = F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ ba^{-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

То есть F – изоморфизм. Из соотношений (12.4), (12.5) можно найти обратные матрицы:

$$G^{-1} = \begin{bmatrix} 1 \\ ba^{-1} \end{bmatrix}, \quad H^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

При этом все условия (12.1) и (12.2), необходимые для удовлетворения основной лемме и теореме о реализации, выполняются.

Рассмотрим второй случай применительно к коммутативной диаграмме, показанной на рис. 12.5. Здесь известны лишь изоморфное отображение F, а также некоторое отображение, обозначаемое как G^{-1}, и их композиция $FG^{-1}=H$. Причем H единственно, так как отображения F и G^{-1} полностью (с точностью до экземпляра) определены. Однако подлежащие определению отображения G и H^{-1}, обратные соответственно к G^{-1} и H, в этом случае не единственны и могут быть определены лишь с точностью до класса. Это, как указывалось выше, следует из основной леммы и теоремы о реализации: в данном случае не определены изначально и одновременно пара отображений (H, G) и их композиция $HG=F$, реализующая изоморфизм F, либо пара отображений (G^{-1}, H^{-1}) и их композиция

$G^{-1}H^{-1}=F^{-1}$, реализующая изоморфизм F^{-1}. В этом втором случае требуется найти классы допустимых по условию $FG^{-1}=H$ и условиям вида (12.1), (12.2) взаимосвязанных отображений H^{-1} и G. После определения классов, исходя из дополнительных соображений, в них можно выбрать по одному экземпляру отображений и зафиксировать эти экземпляры в коммутативной диаграмме. Для фиксированных экземпляров отображений могут быть вычислены *единственные* обратные. После фиксации конкретных экземпляров отображений из допустимого класса этот случай ничем не отличается от первого случая, когда все отображения в коммутативной диаграмме известны изначально.

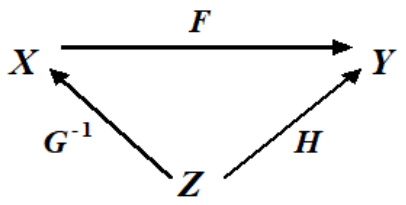


Рис. 12.5. Коммутативная диаграмма для второго случая

Таким образом, задачей второго случая является определение классов допустимых отображений H^{-1} и G по известным условиям вида (12.1), (12.2) и условию $FG^{-1}=H$. Этих условий достаточно для определения классов отображений H^{-1} и G, а при необходимости и их конкретных экземпляров. Продемонстрируем это на примере.

Пример 3. Пусть на рис. 12.5 матрицы имеют следующую структуру:

$$F=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad G^{-1}=\begin{bmatrix}0{,}5 & 0 & 0{,}5\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix},\ X=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix},\ Y=\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}. \tag{12.9}$$

Тогда из условия $FG^{-1}=H$ сразу можно определить $H=\begin{bmatrix}0{,}5 & 0 & 0{,}5\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$. Размеры и структура матриц H^{-1} и G определяется с учетом размера матриц G^{-1} и H в (12.9) из равенства

$$G=H^{-1}=GF^{-1}=\begin{bmatrix}k_1 & k_2\\ k_3 & k_4\\ k_5 & k_6\end{bmatrix}, \tag{12.10}$$

где неизвестные элементы $k_1 \ldots k_6$ должны быть вычислены из условий вида (12.1), (12.2). С учетом того, что F – обычная единичная матрица, $FG^{-1}=H$, $H^{-1}F=G \Rightarrow G^{-1}=H$ и $H^{-1}=G$, можно записать

$$e_z^{лев} = GG^{-1} = e_z^{прав} = H^{-1}H = \begin{bmatrix} 0,5k_1 & k_2 & 0,5k_1 \\ 0,5k_3 & k_4 & 0,5k_3 \\ 0,5k_5 & k_6 & 0,5k_5 \end{bmatrix} = e_z \quad , \tag{12.11}$$

$$e_x^{лев} = G^{-1}G = e_y^{прав} = HH^{-1} = \begin{bmatrix} (0,5k_1 + 0,5k_5) & (0,5k_2 + 0,5k_6) \\ k_3 & k_4 \end{bmatrix} = e = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{12.12}$$

Из (12.12) получаем равенства

$$0,5k_1+0,5k_5=1, \;\; 0,5k_2+0,5k_6=0, \;\; k_3=0, \;\; k_4=1. \tag{12.13}$$

Таким образом, задача вычисления матриц $H^{-1}=G$ с точностью до класса вида (12.10) решена. Взаимосвязи элементов матриц в (12.10) определяются равенствами (12.12) и (12.13), в которых для двух элементов имеется свобода выбора. Равенство (12.11) может служить для проверки выполнимости условий вида (12.2). Выберем k_1=2, k_2=1. Тогда из (12.13) получим k_5=0, k_6=-1 и конкретный экземпляр матриц будет иметь вид

$$G = H^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{12.14}$$

Проверка матриц (12.10) и (12.14) по формулам вида (12.1), (12.2) показывает их полное соответствие всем условиям, действующим в коммутативных диаграммах на рис. 12.4 и рис.12.5. Можно убедиться, что для фиксированных экземпляров матриц (12.14) *единственными обратными* в коммутативной диаграмме на рис. 12.4 являются матрицы

$$G^{-1} = H = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{12.15}$$

В данном примере матрица G^{-1} в (12.9) была специально выбрана равной матрице G^{-1} в (12.7) из первого примера. Легко убедиться, что матрицы $H^{-1}=G$ из первого примера принадлежат классу (12.10). Действительно при выборе в (12.13) k_1=1, k_2=-1 получим k_5=1, k_6=1. Тогда из (12.10) и (12.13) получим другие экземпляры матриц класса (12.10)

$$H^{-1} = G = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{12.16}$$

Сравнение матриц (12.16) с соответствующими матрицами из (12.6) и (12.7) примера 1 показывает их совпадение. Для фиксированных экземпляров (12.16) матриц $H^{-1}=G$ в коммутативных диаграммах на рис. 12.4 и рис. 12.5 существуют

единственные обратные $H=G^{-1}$, определяемые соотношениями (12.6) и (12.7) из первого примера.

Примеры 1 и 3 интересны тем, что демонстрируют не только правила определения обратных в коммутативных диаграммах, удовлетворяющих условиям основной леммы и теоремы о реализации (см. главу 2 этой части книги и [62]), но и еще раз иллюстрируют *принцип относительности в алгебре* (*и вообще в математике*), сформулированный в следствии 5 к основной лемме и базовым определениям теории систем в главе 3, а также продемонстрированный в главе 11 первой части настоящей книги и ранее в работе [62]: одно и то же отображение может иметь *разные обратные* с точностью до одного и того же изоморфизма *в разных композициях с другими отображениями*, коммутирующими этот изоморфизм, то есть *может иметь разные обратные, а значит и свойства, в разных системах*. Причем *эти обратные являются единственными в своих композициях*, реализующих (коммутирующих) один и тот же изоморфизм. Так в примере 1 пара отображений в (12.6)

$$G=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix},\ H=\begin{bmatrix}0{,}5 & 0 & 0{,}5\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}, \tag{12.17}$$

коммутирующих изоморфизм $F=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ в диаграмме на рис. 12.4, имеет обратные (12.7)

$$G^{-1}=\begin{bmatrix}0{,}5 & 0 & 0{,}5\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix},\ H^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}. \tag{12.18}$$

В примере 3 пара отображений (12.14), (12.15)

$$G=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix},\ H=\begin{bmatrix}0{,}5 & 0 & 0{,}5\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}, \tag{12.19}$$

коммутирующих тот же изоморфизм $F=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, имеет обратные

$$G^{-1}=\begin{bmatrix}0{,}5 & 0 & 0{,}5\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix},\ H^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}. \tag{12.20}$$

Таким образом, *одно и то же отображение H в разных композициях* (12.17) и (12.19), *коммутирующих один и тот же изоморфизм F, имеет разные обратные* (12.18) и (12.20) *и эти обратные являются единственными в своих композициях*. Примеры 1 и 3 не просто иллюстрируют принцип относительности в алгебре – они подтверждают правильность его доказательства, которое, по сути, выполнено в рамках доказательства основной леммы – см. следствие 5 к основной лемме и базовым определениям теории систем в главе 3 этой части книги. Указанные примеры хорошо иллюстрируют и подтверждают также доказательство следствия 11 из той же главы о системном эффекте или феномене эмерджентности, возникающем в системе, как в некоем целом, и проявляющемся в возникновении у отображений, включаемых в систему, новых свойств. Причем одно и то же отображение в разных системах может иметь разные свойства, что и продемонстрировано в примерах.

Из этого следует важное, прямо вытекающее из логики, рассуждение: *не совсем корректно говорить, что принцип относительности в алгебре автором введен* или сформулирован. *Более правильно, как представляется, говорить об открытии этого принципа*, так как он сформулирован, исходя не из эвристических соображений, а *отражает объективное свойство отображений, возникающее у них в системах*, реализованных на некоторых изоморфизмах и математической моделью которых являются соответствующие коммутативные диаграммы.

Принцип относительности в алгебре или алгебраический принцип относительности и соответственно эффект эмерджентности применительно к теории систем можно интерпретировать так (такая интерпретация приведена автором в [62]): *один и тот же элемент* (характеризуемый некоторым отображением) в сочетании с разными элементами в разных системах *может проявлять разные свойства* и даже *такие свойства, которых у него вообще не было вне системы* – например, свойство иметь обратное отображение к отображению, являющемуся его моделью. Это позволило здесь и в следствиях 5 и 11 к основной лемме и базовым определениям теории систем в главе 3 обоснованно утверждать, что основная лемма и теорема о реализации и соответствующий этим утверждениям *математический* (*алгебраический*) *принцип относительности* строго формально (математически !) раскрывает и объясняет *механизм возникновения свойства эмерджентности* в системах (в том числе, физических).

Эмерджентность как явление и свойство, является главным признаком системы и ключевым элементом содержательного, а теперь можно говорить – и строгого, формально-математического *определения понятия «система»*, что

было отмечено в [62] и здесь в главе 3. Это свойство проявляется в возникновении «системного эффекта»: *в системе, созданной человеком или организовавшейся в природе под воздействием различных обстоятельств в результате объединения в нее некоторых элементов, возникают и проявляются новые свойства – свойства целого, не сводящиеся к сумме свойств объединенных в систему элементов и, кроме того, у самих элементов в системе проявляются новые свойства, отсутствовавшие у них вне системы*.

Отсюда следует ***важный вывод***: *при исследовании систем, например, в физике нужно проявлять большую осторожность. Так, в процессе экспериментов с системами, особенно в «микромире», они могут быть подвергнуты таким разрушающим воздействиям, в результате которых системы как таковые могут прекратить существование и о свойствах их элементов, не связанных теперь жесткими рамками систем, могут быть сделаны в корне неправильные выводы. Более того, следует также учитывать, что в ходе или по результатам экспериментов с физическими системами у одного и того же элемента, входящего в разные системы, могут фиксироваться разные свойства и это не противоречит математической теории систем.* На соответствующие признаки систем, как целого, давно обращали внимание классики философии (например, Гегель – см. главу 3 – указывал, что *части не могут быть познаны при рассмотрении их вне целого*), однако, как представляется, современные физики не всегда эти системные аспекты учитывают.

Таким образом, в данной главе, исходя из условий, вытекающих из основной леммы и теоремы о реализации, получены формальные правила и продемонстрированы примеры определения обратных для отображений, образующих композицию, коммутирующую (реализующую) некоторый изоморфизм. Правила получены для коммутативных диаграмм, соответствующих разным случаям задания исходных отображений и их композиций, коммутирующих известный обычный изоморфизм. Эти диаграммы являются моделями систем, отвечающих часто встречающимся типовым задачам теории и практики исследования систем на наблюдаемость, управляемость, идентифицируемость, контролируемость и комплексируемость.

Важным результатом развиваемой математической теории систем, более детально продемонстрированным в данной главе, является установленный автором в следствии 5 в главе 3 принцип относительности в алгебре, а также строгая формально-математическая интерпретация на основе этого принципа и основной леммы «системного эффекта» или феномена эмерджентности, отраженного в следствии 11, обязательно возникающего в любой системе и являющегося основным признаком системы, как целого. В теоретическом плане применительно к

композициям отображений, коммутирующим (реализующим) некоторый обычный изоморфизм в соответствующей диаграмме, этот принцип и «системный эффект» демонстрируют возможность изменения свойств, то есть обратных отображений, у одного и того же отображения в композициях с разными другими отображениями, коммутирующих один и тот же обычный изоморфизм. В прикладном, теоретико-физическом отношении это означает возможность проявления разных свойств у некоторого элемента в разных физических (физико-химических) системах, образуемых этим элементом в совокупности (в композиции) с другими элементами.

Обратим внимание также на то, что *принцип относительности в математике* (*в алгебре*) *является весьма общим* в том смысле, что распространяется на любые отображения в коммутативных диаграммах (системах), построенных на некотором системном изоморфизме-цели, в том числе на обыкновенные изоморфизмы. Мы уже неоднократно отмечали, отсылая читателя к примеру линейных динамических систем, рассмотренному в параграфе 1.6 первого раздела второй части книги, что даже обыкновенные изоморфизмы, имеющие некоторые обратные вне коммутативной диаграммы (вне системы), будучи включенными в нее в составе композиции, реализующей другой, системный изоморфизм-цель, меняют свои обратные, которые теперь вычисляются с точностью до изоморфизма-цели.

Глава 13

Очерк алгебраической теории обработки информации в системах. Закон сохранения информации

Система, как философская категория и математическое понятие, *является моделью некоторой части объективной реальности*, обладающей существенной обособленностью («границей»), высокой автономией (самостоятельностью, замкнутостью в себе) и цельностью, в которой сила и характер взаимосвязей между элементами значительно превалируют над связями, если таковые имеются, этих элементов с элементами окружающей среды, также являющейся частью реальности. *Существенной особенностью системы, наряду с ее отличительными свойствами как целого, является и то, что сами элементы в ней приобретают новые свойства, отсутствующие у них по отдельности, вне границ системы.* Часто эта особенность характеризуется понятием и термином *эффект эмерджентности или системный эффект*.

В соответствии с нашей теорией *системы реализуют* (*моделируют*) *в нашем сознании некоторые объекты реальности*. Границы *систем естественного происхождения* человек устанавливает в процессе научного познания природы, исходя как из общепринятых критериев и признаков систем, зафиксированных в понятии «система» [22-25, 40, 66-73, 76, 80, 81], так и из каких-либо эвристических соображений. В связи с этим понятно, что *системы нельзя рассматривать только в качестве моделей, так как вполне очевидно, что они и сами в большом числе случаев являются объектами реальности*. Судить об этом можно по проявлению у таких объектов указанных «системных признаков».

Искусственные системы, создаваемые человеком для удовлетворения своих нужд и в силу этого *являющиеся целенаправленными*, с самого начала, с момента формирования замысла, часто называемого концепцией, разрабатываются именно как «системы» на основе так или иначе формализованного или сформулированного лишь содержательно *системного подхода* [22-25, 80].

Доказанные нами в главе 2 основная лемма и теорема о реализации математически строго объясняют возникновение в системах эффекта эмерджентности (системного эффекта). В последующих главах показано использование указанных эффектов при решении различных задач теории систем. Показано также, что *функционирование систем как моделей всегда связано* с обработкой некоторых

упорядоченных данных о моделируемых объектах реальности, то есть *с обработкой информации*.

Процесс обработки информации в искусственных системах, создаваемых человеком, используется в интересах реализации целей, предписанных их назначением. В соответствии с следствием 8 главы 3 *носителем цели в таких системах является изоморфизм*, на котором они строятся. Таким образом, *любая искусственная система является средством реализации некоторой цели-изоморфизма*. Ранее это декларировалось, исходя из эвристических соображений. Теперь является, по сути, неоспоримым формально-математическим фактом. Примерами таких систем являются системы наблюдения, управления, контроля, рассмотренные в главах 4, 5, 7, а также интегрированные системы, рассмотренные в главах 9-11. *Вообще любые целенаправленные системы так или иначе связаны с процессами обработки информации.*

В классе целенаправленных систем существует большое разнообразие специфических систем, называемых *информационными*, в которых обработка информации является самостоятельным, практически главным процессом. Типовыми задачами обработки информации являются хранение, преобразование (в том числе передача) элементами системы, сжатие-восстановление, кодирование-декодирование и другие.

В силу достаточно высокой универсальности, по сути, фундаментальности основных результатов развиваемой нами теории систем, в данной главе будет показано, как можно применить эти результаты к некоторым задачам обработки информации. Одной из типовых и весьма актуальной является задача сжатия-восстановления и близкая, во многом «двойственная» к ней, задача кодирования-декодирования информации. В качестве примера более детально рассмотрим задачу сжатия-восстановления информации.

13.1. Сжатие-восстановление информации с точностью до изоморфизма. Теоретические положения

Как и раннее в других задачах, будем рассматривать типовую (каноническую) коммутативную диаграмму, показанную на рис. 13.1, использовавшуюся в главе 2 (см. рис. 2.1) при формулировке и доказательстве основной леммы и теоремы о реализации. Здесь отображение $f{:}X\to Y$ обычный изоморфизм, являющийся таковым и отдельно, вне коммутативной диаграммы. В диаграмме он коммутируется (реализуется) композицией $f=hg$ отображений $g{:}X\to Z$ и $h{:}Z\to Y$. Ранее было показано, что отображения g и h в составе композиции $f=hg$, замкнутой изоморфизмом f, в коммутативной диаграмме приобретают новые свойства - становятся *изоморфизмами с точностью до изоморфизма f*, то есть удовлетворяют

всем признакам изоморфных отображений, определенным в алгебре [15]. В частности, так как отображения g и h в коммутативной диаграмме являются изоморфизмами, у них в этой диаграмме имеются единственные обратные g^{-1} и h^{-1}.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & Y \\ & Z \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

Рис. 13.1. Коммутативная диаграмма системы обработки информации

В соответствии с определением 2 из главы 3, коммутативная диаграмма реализует (моделирует) некоторую *абстрактную систему*. Здесь эту диаграмму будем рассматривать в качестве модели *системы обработки информации*, обеспечивающей ее *сжатие и последующее точное и полное восстановление*.

В силу этого понятно, что объект информации X, поступающий на вход системы и в дальнейшем подвергаемый процедуре сжатия, и объект Y, восстанавливаемый на ее выходе, должны быть абсолютно идентичными, то есть $Y \equiv X$ и отображение f должно быть тождественным изоморфизмом.

В комментариях к следствию 10 в главе 3 мы указывали и показывали на примерах, что тождественные изоморфизмы бывают разными – обладающими «расширяющим» или «сжимающим» свойством - и в зависимости от того, какой изоморфизм реализуется системой на рис. 13.1, «характер» отображений g и h в составе композиции $f=hg$ меняется: если тождественный изоморфизм f обладает расширяющим свойством, то предельные объекты-состояния $Y \equiv X$ являются «точечными», а другой предельный объект-состояние Z – максимально «расширенным». В этом случае первое действующее отображение $g{:}X \to Z$ будет расширяющим, а отображение $h{:}Z \to Y$ – сжимающим. Иллюстрациями изоморфизмов, обладающих расширяющим свойством, могут служить обычные единичные матрицы и скаляры, как это показано в примере в конце главы 2 и в примерах 1 и 3 главы 12. Если применяется изоморфизм, обладающий расширяющим свойством, то, как мы указывали в следствии 10, никакой «размер пространства» объекта-состояния (в простейшем случае никакой размер матрицы) Z не может быть меньше «размера пространства» (размера матрицы) изоморфизма f. В связи с этим ясно, что *никакой изоморфизм, обладающий расширяющим свойством, не может быть использован в «системе сжатия-восстановления информации».* В данной задаче необходимо использовать некоторые «необыкновенные тождественные изоморфизмы» (условие $Y \equiv X$ не снимается), обладающие «сжимающим свойством». Один из таких изоморфизмов мы наблюдали в примере, приведенном в Приложении к первой части книги и в примере 2 из главы 12.

Кроме того, оказалось, что «необыкновенные тождественные изоморфизмы», являющиеся изоморфизмами и вне коммутативной диаграммы и обладающие «сжимающим свойством», возникают «естественным образом» при решении ряда прикладных задач теории систем, в отличие от «необыкновенного изоморфизма», приведенного в указанном примере из Приложения, который был «порожден искусственно».

Понятно, что если изоморфизм *f* и отображения *g* и *h* в составе композиции *f*=*hg* выбраны (назначены) и зафиксированы, то сжатие-восстановление информации в системе, показанной на рис. 13.1, осуществляется с точностью до этого изоморфизма. Нарушение любого из жестко взаимосвязанных (или, другими словами, «запутанных») отображений указанной композиции приведет к неправильной работе системы и к искажению выдаваемой информации.

Таким образом, в рамках общего принципа изоморфизма все теоретические предпосылки для построения и успешного функционирования «системы сжатия-восстановления информации», показанной на рис. 13.1, подготовлены. Реализацию таких систем удобнее продемонстрировать на примерах.

13.2. Системы сжатия-восстановления информации с точностью до изоморфизма. Методические примеры

Процедуры сжатия-восстановления информации в системе, показанной на рис. 13.1, поясним на методических примерах. Простейшим является пример, приведенный в конце Приложения к первой части книги.

Вернемся к этому примеру и дадим ему интерпретацию, соответствующую целям данной главы. Напомним, что в примере на рис. 13.2, повторяющем рис. П.8 из Приложения, матрицы имеют следующую структуру:

$$F=\begin{bmatrix}1 & 0\\ ba^{-1} & 0\end{bmatrix},\ G=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix},\ H=\begin{bmatrix}1\\ ba^{-1}\end{bmatrix},\ X=\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix},\ Y=\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}. \qquad (13.1)$$

В коммутативной диаграмме на рис. 13.2 выполняется композиция $F=HG$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "G"'] & & Y \\ & Z \arrow[ur, "H"'] & \end{tikzcd}$$

Рис. 13.2. Коммутативная диаграмма к примерам

Мы уже убеждались, что *F* «необыкновенный тождественный изоморфизм», так как существует обратная матрица

$$F^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ ba^{-1} & 0 \end{bmatrix},$$

для которой выполняются равенства

$$FF^{-1} = F^{-1}F = FF = F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ ba^{-1} & 0 \end{bmatrix}, \tag{13.2}$$

$$I_X^{\text{лев}} = G^{-1}G,\ I_Y^{\text{прав}} = HH^{-1},\ I_X^{\text{прав}} = F^{-1}F,\ I_Y^{\text{лев}} = FF^{-1}, \tag{13.3}$$

$$I_Y^{\text{лев}} = I_Y^{\text{прав}} = I_X^{\text{лев}} = I_X^{\text{прав}} = F, \tag{13.4}$$

$$I_Z^{\text{лев}} = GG^{-1},\ I_Z^{\text{прав}} = H^{-1}H,\ I_Z^{\text{лев}} = I_Z^{\text{прав}} = I_Z,\ I_Z I_Z = I_Z, \tag{13.5}$$

$$G^{-1} = \begin{bmatrix} 1 \\ ba^{-1} \end{bmatrix},\ H^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{13.6}$$

Здесь $I_X^{\text{лев}}$, $I_X^{\text{прав}}$, $I_Y^{\text{лев}}$, $I_Y^{\text{прав}}$, $I_Z^{\text{лев}}$, $I_Z^{\text{прав}}$- левое и правое единичные отображения (или просто единицы) соответственно на множествах X, Y и Z. Для обратных G^{-1} и H^{-1} все соотношения (13.3) - (13.5) выполняются, причем $I_Z^{\text{лев}}=I_Z^{\text{прав}}=I_Z=1$ и $I_Z I_Z=I_Z=1$, то есть обратные G^{-1} и H^{-1} являются изоморфизмами с точностью до изоморфизма F. Таким образом, все условия основной леммы и теоремы о реализации выполняются.

В данном случае необычность изоморфизма F заключается в том, что его структура зависит от структуры отображаемых матриц X, Y и определитель матрицы F равен нулю, то есть она не имеет обратной в обычном смысле – вне коммутативной диаграммы. Тем не менее, как видно из приведенных соотношений, отображение-матрица F является изоморфизмом, так как все условия на отображение-изоморфизм, известные в алгебре, выполняются. Таким образом, изоморфизм F точно и полно отображает X в Y и наоборот, обеспечивая тождество $Y \equiv X$. Второй важной особенностью изоморфизма F является то, что его размер больше тождественного отображения (единицы) $I_Z=1$ на Z, то есть изоморфизм F обладает «сжимающим свойством».

В связи с этим и непосредственно из приведенных соотношений можно увидеть, что первое действующее отображение G является сжимающим, так как информация, содержащаяся в матрице-множестве $X = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, сжимается в скаляр-«точку» $Z = \begin{bmatrix} a \end{bmatrix}$, что подтверждается и равенствами $I_Z^{\text{лев}}=I_Z^{\text{прав}}=I_Z=1$, $I_Z I_Z=I_Z=1$. Определитель единицы на Z также равен скалярной единице, то есть $det\ I_Z=1$.

Приведенные соотношения позволяют убедиться, что система, представленная на рис. 3.2, реализует сжатие отображением G поступившей на ее вход ин-

формации X в предельно «минимальную информационную точку» Z, а затем посредством расширяющего отображения H выполняет абсолютно полное и точное восстановление на выходе информации Y, тождественно совпадающей с X, то есть $Y \equiv X$. Из этого частного примера следуют важные, но пока предварительные выводы:

1) на основе теории, опирающейся на общий принцип изоморфизма, может быть реализована *система обработки информации*, обеспечивающая ее *сжатие и последующее точное и полное восстановление*;
2) *в пределе система обработки информации* позволяет сжимать информацию в «точку», а затем полностью и с абсолютной точностью ее восстанавливать. При этом под «точкой» можно понимать скаляр, как в рассмотренном примере, либо другое «предельно сжатое состояние» по усмотрению разработчика системы, например, некоторую матрицу определенного размера;
3) система сжатия-восстановления имеет два предельных состояния информации: «предельно расширенное» (на входе X и на выходе Y) $Y \equiv X$ и «предельно сжатое» в «точке» Z хранения или передачи;
4) *В случае матриц признаком «предельно расширенного состояния» является равенство нулю определителя матрицы-изоморфизма F, а признаком «предельно сжатого» состояния - равенство скалярной единице определителя единицы на Z.*

Таким образом, в «системе сжатия-восстановления информации» *равенство нулю определителя матрицы-изоморфизма F характеризует «минимальную плотность» исходной и восстановленной информации, а равенство скалярной единице определителя единицы* (*в общем случае матричной*) *на Z – предельно «максимальную плотность» сжатой информации.*

Далее рассмотрим следующий пример, демонстрирующий возможность построения «системы сжатия-восстановления информации» с использованием «необыкновенных тождественных изоморфизмов», являющихся изоморфизмами и отдельно, вне коммутативной диаграммы и обладающих сжимающим свойством, возникающих «естественным образом» при решении прикладных задач, на что мы уже указывали ранее.

В связи с этим вернемся к примеру, рассмотренному в конце главы 2, который не является чисто методическим и получен при синтезе регуляторов на основе общего принципа изоморфизма [20, 21]. В указанном примере применительно к рис. 2.1 (см. также рис. 13.1 и 13.2) фигурировали отображения-матрицы

$$f=F=I=1,\ g=G=\begin{bmatrix} 1 \\ (1-b_1)(b_2)^{-1} \end{bmatrix},\quad h=H=\begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix}, \tag{13.7}$$

такие, что выполняется композиция

$$I = HG = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ (1-b_1)(b_2)^{-1} \end{bmatrix} = 1. \qquad (13.8)$$

Прямоугольные матрицы-отображения H и G, коммутирующие (реализующие) скалярный изоморфизм $f=I=1$, имеют в коммутативной диаграмме, как было показано, единственные обратные

$$G^{-1} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix},\ H^{-1} = \begin{bmatrix} 1 \\ (1-b_1)(b_2)^{-1} \end{bmatrix}, \qquad (13.9)$$

которые удовлетворяют условиям

$$I_X^{\text{лев}}=G^{-1}G,\ I_X^{\text{прав}}=I^{-1}I=1,\ I_X^{\text{лев}}=I_X^{\text{прав}},\ I_Y^{\text{прав}}=HH^{-1},\ I_Y^{\text{лев}}=I\,I^{-1}=1,\ I_Y^{\text{лев}}=I_Y^{\text{прав}},$$

$$I_Z^{\text{лев}}= GG^{-1},\ I_Z^{\text{прав}}=H^{-1}H,\ I_Z^{\text{лев}}= I_Z^{\text{прав}}= I_Z,\ I_Z\,I_Z= I_Z\,. \qquad (13.10)$$

Здесь

$$I_Z = H^{-1}H = GG^{-1} =$$
$$= \begin{bmatrix} 1 \\ (1-b_1)(b_2)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ (1-b_1)(b_2)^{-1} b_1 & (1-b_1) \end{bmatrix}. \qquad (13.11)$$

Как видно из приведенных соотношений и рис. 13.1 и 13.2, соответствующая система имеет два предельных состояния: предельно сжатое, отвечающее скалярному изоморфизму $f=I=1$, и предельно расширенное, которому отвечает изоморфизм-единица (13.11) I_Z на Z. Признаком предельно расширенного состояния в соответствии со следствием 10 из главы 3 является, во-первых, размер матрицы I_Z в сравнении с размером изоморфизма $f=I=1$ и, во-вторых, равенство нулю определителя этой матрицы $detI_Z=0$, что видно непосредственно из (13.11). Условия (13.10), которым должны удовлетворять композиция отображений и соответствующие единицы в системе на рис. 13.1 и 13.2, являются частным случаем условий (3.1) - (3.9), записанных применительно к следствию 10. Подчеркнем, что в отличие от «необыкновенного изоморфизма» (13.2), «необыкновенный изоморфизм» (13.11) получен естественным образом при решении задачи о синтезе изоморфного регулятора. Придумать такой изоморфизм весьма непросто.

Вполне очевидно, что фигурирующий в данном примере изоморфизм $f=I=1$ нельзя использовать в качестве исходного для построения «системы сжатия-вос-

становления информации», так как он, наоборот, обладает расширяющим свойством. Для наших целей подойдет «необыкновенный изоморфизм» (13.11). Однако, его нельзя «вырывать» из рассмотренной системы, так как все единицы на X, Y и Z в ней взаимосвязаны. Взаимосвязь единиц в системе была проиллюстрирована на рис. 3.6. в главе 3 применительно к следствию 10. Так как изоморфизм $f=F=I=1$, по сути, является единицей на $Y\equiv X$, то диаграмма, представленная на рис. 13.1, и соответствующая диаграмма для матриц на рис. 13.2 ничем не отличаются от диаграммы на рис. 3.6. С учетом указанной взаимосвязи единиц преобразуем коммутативную диаграмму, показанную на рис. 13.2, к промежуточному виду, представленному на рис. 13.3 и затем к эквивалентному окончательному виду на рис. 13.4, позволяющему реализовать «систему сжатия-восстановления информации».

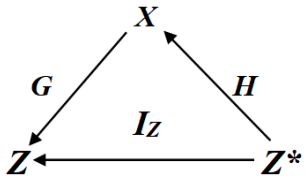


Рис. 13.3 Промежуточная коммутативная диаграмма

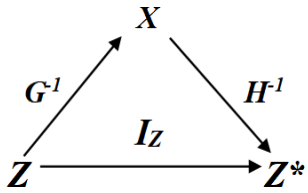


Рис. 13.4 Система сжатия-восстановления информации

В коммутативной диаграмме на рис. 13.4 все ранее полученные соотношения (13.7) - (13.11) для матриц и единиц на X и Z остаются в силе. На рис. 13.4 в качестве входной будем рассматривать «расширенную», то есть исходного вида информацию Z, в качестве восстановленной – информацию $Z^*\equiv Z$ на выходе системы. Понятно, что в этом случае информация X является сжатой, отображение G^{-1} является сжимающим, отображение H^{-1} – восстанавливающим (расширяющим). С учетом размеров матриц в соотношениях (13.7) - (13.11) в данном примере исходная информация должна представляться в форме матрицы-вектора $Z_{2\times1}$ размера 2×1.

Рассмотрим, например, сжатие-восстановление нашей системой информации, представленной вектором

$$Z=\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}, \tag{13.12}$$

выбранным произвольно.

Преобразуем входной вектор (13.12) отображением G^{-1} из (13.9), получим

$$X = G^{-1}Z = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 c + b_2 d \end{bmatrix}. \qquad (13.13)$$

В «точке» X информация находится в предельно сжатом состоянии (13.13). Восстановим информацию Z^* на выходе системы посредством расширяющего отображения H^{-1} из (13.9)

$$Z^* = H^{-1}X = \begin{bmatrix} 1 \\ \left(1-b_1\right)\left(b_2\right)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 c + b_2 d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 c + b_2 d \\ c\left(1-b_1\right)\left(b_2\right)^{-1} b_1 + d\left(1-b_1\right) \end{bmatrix}. \qquad (13.14)$$

Для сравнения получим Z^* путем непосредственного преобразования Z с использованием единицы I_Z (13.11):

$$Z^* = I_Z Z = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ \left(1-b_1\right)\left(b_2\right)^{-1} b_1 & \left(1-b_1\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} b_1 c + b_2 d \\ c\left(1-b_1\right)\left(b_2\right)^{-1} b_1 + d\left(1-b_1\right) \end{bmatrix}. \qquad (13.15)$$

Как видно из (13.14) и (13.15), оба пути преобразования входной информации, напрямую через I_Z и через композицию $H^{-1}G^{-1}$, в коммутативной диаграмме на рис. 13.4 эквивалентны, то есть действительно $I_Z=H^{-1}G^{-1}$, однако мы получили $Z^*\neq Z$. Попытаемся понять, с чем это связано?

Дело в том, что в исходной системе на рис. 13.2 все состояния и отображения тесно взаимосвязаны (или, как говорят в квантовой механике, «запутаны») условиями (13.7) - (13.11), а произвольно назначаемым здесь является лишь X, так как изоморфизм F, на котором строилась исходная система, является единичной в обычном смысле матрицей и, более того, скалярной единицей $F=I=1$ – см. (13.7). Все другие состояния в исходной системе являются производными от X состояниями и связаны с ним условиями (13.7) - (13.11). Преобразование системы к эквивалентному виду, показанному на рис.13.4, ничего в ней не меняет. В связи с этим, вообще говоря, нельзя произвольно назначать элементы в векторе Z, так как элементы этого вектора в исходной системе взаимосвязаны и определяются соотношением

$$Z = GX = \begin{bmatrix} 1 \\ \left(1-b_1\right)\left(b_2\right)^{-1} \end{bmatrix} X \ , \qquad (13.16)$$

непосредственно следующим из рис. 13.2, исходя из произвольно назначаемого состояния X. Здесь матрица G взята из (13.7). Соответственно должны быть взаимосвязаны элементы вектора Z и в эквивалентной системе на рис. 13.4.

Как видно из рис. 13.4, предварительно, перед подачей в систему, формировать входной вектор Z по формуле (13.16) бессмысленно, так как входным тогда нужно считать не вектор Z, а некоторый другой вектор X^*, который после преобразования (13.16) и воздействия на вектор Z отображения G^{-1} по формуле $X = G^{-1}Z$ опять преобразуется в себя, то есть $X^* \equiv X$ и получить эффект сжатия информации не получится.

Вместе с тем интересно отметить (и это можно легко проверить), что вектор Z^*, сформированный на выходе системы по формулам (13.14), (13.15), после дальнейших многократных преобразований с помощью единицы I_Z по формуле $Z^* = I_Z Z^*$ в дальнейшем уже не меняется, то есть точно и полно отображается в себя. Более того, если подать вектор Z^*, полученный по формуле (13.14) или (13.15), вместо вектора Z снова на вход системы, то после вычислений по формуле $X = G^{-1}Z^*$ состояние X (13.13) останется тем же самым, неизменным. Понятно, что не изменится и Z^*, вычисленный по формуле (13.14), так как не изменился X, то есть все состояния и отображения в системе будут согласованы. Но, как уже указывалось и что менее очевидно, не изменится и Z^*, вычисленный по формуле (13.15).

Это означает, что произвольный вектор Z, единожды пройдя преобразования в системе в вектор Z^*, «обогащается» или *«запутывается» присущими системе связями* и в дальнейшем внутри системы уже не меняется. То есть система является своеобразным «аттрактором», преобразующим («притягивающим») произвольный входной вектор Z к некоторому внутренне согласованному вектору Z^*, при подаче которого на вход, в системе уже ничего не меняется и она переходит в «стационарный», «устойчивый режим». Если же поменять Z, то изменится и вектор $Z^* \neq Z$, то есть изменится «устойчивое состояние» системы. Если проводить аналогию с квантовой механикой, то каждому новому «информационному сигналу-кванту» Z, поступившему на вход системы, в самой системе после «поглощения» этого сигнала отвечает свой новый устойчивый «квантовый» уровень Z^*.

Для того, чтобы убедиться, что выявленный «системный феномен» не является частным случаем, характерным только для рассматриваемого примера, вернемся к первому примеру (13.1) - (13.6) и вместо ранее подававшегося на вход системы на рис. 13.2 вектора X из (13.1) подадим на вход новый произвольно выбранный вектор X, равный, например, новому входному вектору (13.12), использовавшемуся во втором примере. Таким образом, пусть

$$X = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}. \tag{13.17}$$

Подача вектора (13.17) в систему на рис. 13.2 вполне правомерна, так как его размер согласуется с размерами матриц и отображений, присутствующих в условиях (13.1) - (13.6). Тогда в соответствии с этими условиями

$$Z = GX = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \end{bmatrix}, \tag{13.18}$$

$$Y = HZ = \begin{bmatrix} 1 \\ ba^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ cba^{-1} \end{bmatrix}, \tag{13.19}$$

$$Y = FX = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ ba^{-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ cba^{-1} \end{bmatrix}. \tag{13.20}$$

Как видим, выходной вектор Y (13.19), (13.20) не зависит от пути обработки информации в системе, но, как и во втором примере, не совпадает с вектором (13.17), поданным на ее вход. Проверим, как прореагирует система на рис. 13.2, если вектор Y (13.19) снова подать на ее вход, то есть пусть

$$X = Y = \begin{bmatrix} c \\ cba^{-1} \end{bmatrix}. \tag{13.21}$$

Если вычислять Z и Y по формулам (13.18) - (13.20) с учетом (13.21), то можно убедиться, что результат вычислений будет точно таким же, как и в указанных формулах. Таким образом, состояние системы, характеризующееся формулами (13.21) и (13.18), при входном сигнале (13.21) является устойчивым. То есть и в первом примере подтвердилось возникновение «системного феномена», проявляющегося в достижении в системе сжатия-восстановления информации строго определенного «устойчивого состояния», отвечающего конкретному значению произвольного входного вектора. При этом выходной вектор, удовлетворяющий «устойчивому состоянию», не равен входному вектору.

В связи с этим возникает вопрос, как сохранить произвольность в выборе сжимаемой информации, то есть произвольность выбора вектора Z во втором примере (вектора X в первом примере) и, используя свойства системы, сжимать его в состояние X (в состояние Z в первом примере), а в дальнейшем полно и точно восстанавливать на выходе, обеспечивая $Z^*\equiv Z$ ($Y\equiv X$ в первом примере)?

Оказывается, реализовать это достаточно просто. Действительно, если во втором примере сравнить структуру выходного вектора Z^* из (13.14) и (13.15) со структурой единицы I_Z на Z (13.11), то вполне очевидно, что по I_Z, используя эту единицу как «ключ», можно легко восстановить компоненты вектора Z, поступившего на вход системы.

Аналогично и в первом примере восстановить истинную входную информацию вида (13.17) по информации (13.19), наблюдаемой на выходе, также несложно: для «расшифровки» информации (13.19) достаточно ее сравнить с «ключом»-изоморфизмом (13.2), использовавшимся и в формуле (13.20).

Таким образом, опираясь на первый пример, создать систему сжатия-восстановления информации весьма просто: необходимо лишь придумать «искусственный» необыкновенный изоморфизм, обладающий сжимающим свойством, и далее на его основе реализовать эту систему. Проблема здесь обусловлена искусственностью порождаемого необыкновенного изоморфизма, что требует определенного искусства и творчества со стороны разработчика. Способ разрешения этой проблемы продемонстрирован в рамках второго примера, показавшего, что в системах сжатия-восстановления информации могут с успехом использоваться необыкновенные изоморфизмы, порождаемые естественным образом при решении прикладных задач. Здесь приведен лишь один простейший пример таких изоморфизмов.

Еще один способ порождения необыкновенных изоморфизмов, на которых могут строиться системы сжатия-восстановления информации, продемонстрирован в главе 12: в примерах 1 и 3 показано, что практически любая композиция $HG=F$ некоторых подобранных матриц H и G, реализующая обыкновенный изоморфизм F (в общем случае не обязательно являющийся тождественным автоморфизмом), может быть использована для «конструирования» необыкновенных изоморфизмов, которые, в свою очередь, могут быть использованы для построения системы сжатия-восстановления информации.

Так в примере 3 был получен целый класс матриц (12.11), в рамках которого с использованием равенств (12.13), могут назначаться и периодически меняться, например, для дополнительного более надежного кодирования информации при

сжатии, конкретные экземпляры необыкновенных изоморфизмов. В частности, в рассматриваемом примере при k_1=2, k_2=1 с помощью (12.13) вычислены k_3=0, k_4=1, k_5=0, k_6=-1. Матрицы H и G имеют соответственно вид (12.15) и (12.14), а конкретный экземпляр матрицы (12.11), являющейся необыкновенным изоморфизмом e_Z в этом случае будет иметь вид

$$e_Z = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (13.22)$$

«Необыкновенность» этого изоморфизма заключается в том, что на Z он является единицей, но определитель этой матрицы, как видно по ее структуре, равен нулю, $det\ e_Z$=0. То есть изоморфизм (13.22) в контексте нашей теории является сжимающим и на его основе может быть построена система сжатия-восстановления информации. Примеры других необыкновенных изоморфизмов будут продемонстрированы в последующих главах книги.

В целом алгоритм синтеза системы сжатия-восстановления информации с помощью естественного «необыкновенного» изоморфизма I_Z вида (13.11) или вида (13.22) может быть следующим:

Шаг 0. До начала разработки системы, формируются исходные предпосылки:

- формируется композиция $HG=F$ некоторых специально подобранных матриц H и G, реализующая обыкновенный изоморфизм F, с помощью которой вычисляется необыкновенный изоморфизм вида (13.22), либо решается прикладная задача применительно к некоторой динамической системе, например, задача синтеза изоморфного регулятора, и по ее результатам формируется прикладная система, коммутативная диаграмма которой представлена на рис. 13.2, конкретизируются для нее все условия (13.7) - (13.11), в том числе определяется «необыкновенный» изоморфизм (13.11), обладающий сжимающим свойством;
- коммутативная диаграмма приводится к виду, показанному на рис. 13.4, то есть собственно на изоморфизме (13.11) строится «система сжатия-восстановления информации», применительно к которой уже определены все условия функционирования в соответствии с (13.7) - (13.11);

Шаг 1. Произвольную входную информацию, находящуюся, например, в цифровой форме и подлежащую сжатию, приводим к виду (13.12), то есть «загружаем» в вектор Z;

Шаг 2. Вектор Z подаем на вход системы, показанной на рис. 13.4 и по формуле (13.13) преобразуем в вектор X, отражающий сжатое состояние

информации. Понятно, что далее последовательно можно подавать на вход системы новые векторы Z и формировать соответствующие сжатые векторы X, которые экономно и упорядоченно можно хранить в некотором хранилище;

Шаг 3. Восстановление информации производится по формуле (13.14).

Шаг 4. Поскольку информация Z^*, как видно из сравнения (13.14) и (13.12), все еще находится в «зашифрованном» состоянии, окончательно ее «распаковываем» с использованием «ключа» I_Z (13.11). Как видно из сравнения (13.14) и (13.11), это легко сделать, если в векторе Z^* (13.14) не выполнять результирующие операции сложения при определении его компонент. Таким образом полностью и точно восстанавливается исходная информация в форме вектора Z и завершается полный цикл работы «системы сжатия-восстановления информации», построенной на естественном «необыкновенном» изоморфизме.

Подводя итог рассмотренному на примерах подходу к построению «систем сжатия-восстановления информации» с использованием «необыкновенных» изоморфизмов, возникающих естественным образом при решении прикладных задач в рамках общего принципа изоморфизма, можно констатировать:

1) подтверждены все предварительные выводы, сделанные по результатам рассмотрения первого примера применительно к исследованию «системы сжатия-восстановления информации», реализованной на «необыкновенном» изоморфизме, полученном «искусственно»;
2) установлено, что использование «необыкновенных» изоморфизмов, возникающих естественным образом при решении прикладных задач, позволяет реализовать на их основе «системы сжатия-восстановления информации». На вход таких систем может поступать произвольная, но специальным образом структурированная информация, например, в форме матриц заданного размера. После сжатия и хранения для точного и полного восстановления исходной информации, помимо и после воздействия в системе расширяющего отображения требуется дополнительная «расшифровка» выходной информации с помощью «ключа», в качестве которого используется «необыкновенный изоморфизм», реализованный в системе. Таким образом, система помимо сжатия-восстановления выполняет и функцию кодирования-декодирования информации;
3) дополнительно установлено также, что «система сжатия-восстановления информации» *любой произвольный вектор*, поступающий на ее вход, в результате сжатия и последующего восстановления, либо напрямую по-

средством «необыкновенного» изоморфизма *преобразует («притягивает») к инвариантному виду*, который в дальнейшем остается неизменным при всех последующих воздействиях на него отображений, действующих в системе и удовлетворяющих всем условиям их взаимосвязей. Другой *произвольный вектор*, поступивший на вход системы, преобразуется к другому *инвариантному виду, то есть каждый входной произвольный вектор имеет в системе свой инвариантный вид*. *Каждому такому инвариантному вектору* соответствует свое устойчивое состояние системы. В результате проверки установлено, что данное утверждение справедливо как в отношении систем, реализованных на искусственно синтезированных «необыкновенных» изоморфизмах, так и в отношении систем, реализованных на «необыкновенных» изоморфизмах, полученных естественным путем в прикладных задачах;

4) вполне очевидно, что «система сжатия-восстановления информации», реализованная на любом «необыкновенном» изоморфизме, может использоваться и в качестве системы «кодирования-декодирования» информации. Стойкость таких систем «кодирования-декодирования» требует дополнительных исследований;
5) применительно к «системам сжатия-восстановления информации», основанным на общем принципе изоморфизма, можно сформулировать *закон сохранения информации*: *информация*, поступившая на вход «системы сжатия-восстановления информации», реализованной на «необыкновенном» изоморфизме, *сохраняется при всех ее преобразованиях в системе и с абсолютной точностью и полнотой выдается из системы* на выход. «Вместилищами» информации в системе являются ее предельные состояния: «предельно расширенное входное», «предельно сжатое» в точке хранения в системе, «предельно расширенное выходное», тождественное входному предельному состоянию.

В целом, по результатам исследований можно сделать следующие утверждения.

У т в е р ж д е н и е 13.1 (О степени сжатия информации) *В системах сжатия-восстановления информации, основанных на общем принципе изоморфизма, любая поступившая на вход информация может быть сжата в «точку», а затем полностью и точно восстановлена в первоначальном виде.*

Доказательство этого утверждения очевидно. При этом «информационная точка» является понятием относительным. Как уже указывалось, предельной «точкой» может являться скаляр, как в рассмотренных примерах, либо другое

«предельно сжатое состояние» по усмотрению разработчика системы, например, некоторая матрица определенного размера.

У т в е р ж д е н и е 13.2 (Закон сохранения информации) *Информация, поступившая на вход «системы сжатия-восстановления информации», реализованной на «необыкновенном» изоморфизме, сохраняется при всех ее преобразованиях в системе и с абсолютной точностью и полнотой выдается из системы на выход*.

Вполне очевидно, что *закон сохранения информации является частным случаем общего закона сохранения*, сформулированного в главе 3 в комментариях к следствию 10 о предельных состояниях в системе.

У т в е р ж д е н и е 13.3 (Закон соответствия устойчивых состояний и отвечающих им инвариантных форм информации) *Каждая поступившая на вход произвольная информация приобретает в системе свою инвариантную форму, соответствующую конкретному стабильному состоянию «системы сжатия-восстановления информации»*.

Как видим, в этом утверждении констатируется не только возникновение в системе в ответ на поступившую в нее информацию строго определенной инвариантной формы информации, не изменяющейся при последующих преобразованиях в системе, но и строгое взаимно-однозначное соответствие между этой инвариантной формой и отвечающим ей устойчивым состоянием системы. В силу этого можно считать, что это утверждение формализует *закон взаимно однозначного соответствия устойчивых состояний системы и отвечающих им инвариантных форм информации*. Возникновение инвариантной формы информации в системе объясняется эффектом эмерджентности (системным эффектом), являющимся следствием основной леммы и теоремы о реализации – см. определение 2 и следствия 5 и 11 в главе 3.

Необыкновенный изоморфизм, на котором строится система сжатия-восстановления информации, полностью детерминирует свойства всех других отображений в системе и свойства ее состояний. Инвариантная форма входной-выходной информации является формой ее стабильного состояния, обусловленного этим изоморфизмом.

У т в е р ж д е н и е 13.4 (Закон предельных состояний) *Система сжатия-восстановления имеет два предельных состояния информации: «предельно расширенное»* (*на входе и на выходе*) *и «предельно сжатое» внутри системы в «точке» хранения.*

Данное утверждение является частным случаем, проявлением следствия 10 о предельных, финитных состояниях в системах – см. параграф 3.2 в главе 3 –

применительно к рассматриваемому классу систем сжатия-восстановления информации.

У т в е р ж д е н и е 13.5 (О признаках предельных состояний) *В «системе сжатия-восстановления информации», реализованной на основе матричной алгебры, равенство нулю определителя матрицы, отвечающей необыкновенному изоморфизму и соответствующему «предельно расширенному» состоянию, характеризует «минимальную плотность» исходной и восстановленной информации, а равенство единице определителя матричной единицы*, отвечающей *«предельно сжатому» состоянию, характеризует именно предельную, «максимальную плотность» сжатой информации.*

Это утверждение относится к случаю, когда коммутативная диаграмма системы строится для отображений и состояний, заданных в матричной форме. Его можно считать строго доказанным в части равенства единице определителя матричной единицы, отвечающей «предельно сжатому» состоянию, так как этому состоянию отвечает *обыкновенный тождественный изоморфизм*.

Утверждение о равенстве нулю определителя матрицы, отвечающей необыкновенному изоморфизму и «предельно расширенному» состоянию, пока нужно рассматривать как гипотезу, нашедшую подтверждение во всех рассмотренных примерах, но обобщить доказательство этого утверждения на общий случай еще предстоит.

На этом ограничим рассмотрение информационных систем имея в виду, что другие аспекты их функционирования, помимо рассмотренного сжатия-восстановления информации, можно проанализировать во многом по аналогии.

Надеемся, что вполне очевидна высокая общность сформулированных в главе утверждений в смысле возможного отнесения их на счет не только систем сжатия-восстановления информации.

С учетом изоморфизма форм математических моделей систем, отражающих различные информационные и физические процессы, использованные здесь математические модели могут быть интерпретированы в терминах и понятиях, относящихся к другим научным и прикладным дисциплинам. Например, коммутативная диаграмма, представленная на рис. 13.4, может рассматриваться в качестве модели некоторой «квантовой системы». Тогда какой-либо «квант энергии» («квантовая частица»), поступивший извне на внешнюю предельно расширенную «оболочку»-вход Z системы, внутри системы:

А) в соответствии с утверждением 13.1 может быть «сжат» в предельно «плотное», «точечное», характерное для этой системы состояние X, обусловленное структурой $I_Z = H^{-1}G^{-1}$ системы, а конкретно – отображением-«законом» G^{-1} в указанной композиции;

Б) в соответствии с утверждением 13.2 квант-частица сохраняется при всех его преобразованиях в системе и с абсолютной точностью и полнотой может быть выдан из системы на выход;

В) в соответствии с утверждением 13.3 каждый поступивший на вход произвольный квант-частица приобретает в системе свою инвариантную форму, соответствующую конкретному стабильному состоянию «квантовой системы» и не меняющуюся при всех преобразованиях внутри системы. Более того, этой *инвариантной форме кванта-частицы в системе отвечают присущие только ему* (*кванту*) *устойчивые предельные «квантовые состояния» системы*. То есть *состояния квантовой системы квантуются «величинами» поступающих на ее вход «квантов энергии»* («квантов-частиц»). Таким образом, справедлив *закон взаимно однозначного соответствия устойчивых предельных состояний квантовой системы и отвечающих им инвариантных форм* «*квантов энергии*» (*«квантов-частиц»)*;

Г) в соответствии с утверждением 13.4 *квантовая система имеет* (*возможно одновременно!*) *два предельных состояния: «предельно расширенное» (на внешней «оболочке», являющейся входом-выходом*) *и «предельно сжатое» внутри системы в* «*точке хранения*» «*квантов энергии*». Следует иметь в виду, что в квантовой системе на одном и том же тождественном изоморфизме I_Z помимо композиции $I_Z=H^{-1}G^{-1}$ могут иметь место несколько других композиций вида $I_Z=(H^{-1})^{*}\cdot(G^{-1})^{*}$, $I_Z=(H^{-1})^{**}\cdot(G^{-1})^{**}$ и т.д., где $(H^{-1})^{*}$, $(G^{-1})^{*}$, $(H^{-1})^{**}$, $(G^{-1})^{**}$ - некоторые отображения, образующие соответствующие «концентрические» композиции-«уровни», одновременно реализующие изоморфизм I_Z. Возможно «в физике» число этих композиций ограничено неким законом-правилом. В этом случае *число* «*предельно сжатых*» *состояний внутри системы* («*точек хранения*» «*квантов энергии*») *будет определяться числом указанных композиций*. Понятно, что «точка хранения» понятие условное: это может быть и «облако хранения», структура которого определяется структурой отображений вида H^{-1} и G^{-1} в указанных композициях;

Д) в соответствии с утверждением 13.5 в квантовой системе, модель которой описывается на языке матричной алгебры, равенство нулю определителя матрицы, отвечающей необыкновенному изоморфизму и соответствующему «предельно расширенному» состоянию, характеризует «минимальную плотность энергии» на «внешней оболочке» (входной и выходной), а равенство единице определителя матричной единицы, отвечающей «предельно сжатому» состоянию, характеризует именно предельную, «максимальную плотность» «энергии» в этом сжатом состоянии. Для других языков математического описания моделей

квантовых систем, отличных от языка матричной алгебры, необходимо искать другие формально-математические признаки предельных состояний.

Приведем еще одну вполне очевидную интерпретацию рассмотренных в этой главе математических моделей информационных систем. С учетом во многом доказанной и ставшей практически общепринятой теории Большого взрыва, коммутативные диаграммы, представленные на рис. 13.1 - 13.4, могут рассматриваться в качестве моделей эволюции «космологической макросистемы» типа «Вселенная». Только в этой интерпретации, в отличие от «квантовых микросистем», в качестве исходной рассмотрим коммутативную диаграмму на рис. 13.1, в которой под изоморфизмом f будем подразумевать обыкновенный расширяющий тождественный автоморфизм. В случае матриц диаграмма по форме будет неотличима от диаграммы, представленной на рис. 13.2, но под F, H и G, в ней будут подразумеваться не матрицы из (13.2), а некоторые другие матрицы такие, что F является обычной единичной матрицей некоторого размера и $F = HG$. Тогда F - расширяющий тождественный автоморфизм, G – расширяющее отображение, H – сжимающее отображение. Тождественный автоморфизм F является «расширяющим» в том смысле, что никакие размеры матриц H и G не меньше размера F. В соответствии с этими диаграммами «Вселенная», находящаяся в предельно-«точечном» состоянии X, абсолютно точно и полно преобразуется (отображается) в себя, то есть в свое новое предельно-«точечное» состояние $Y \equiv X$, не непосредственно через тождественное отображение-изоморфизм (тождественный автоморфизм) f, а посредством композиции $hg=f$ последовательно выполняемых отображений h и g. В указанной композиции, реализующей тождественный автоморфизм f, первое, действующее на «точечное» состояние X отображение $g:X \to Z$, является «расширяющим» - «Вселенная» расширяется до предельно расширенного, максимально «разреженного» состояния Z, обладающего минимальной «плотностью»: признаком этого в случае матриц, как мы указывали, является равенство $detI_Z=0$. При достижении этого состояния начинает действовать второе отображение $h:Z \to Y$, являющееся «сжимающим» и переводящим «Вселенную» в новое, тождественное исходному, «точечное» состояние $Y \equiv X$. На этом цикл эволюции заканчивается, но вполне можно допустить, что такой цикл может повторяться многократно в соответствии с известными теориями «циклической Вселенной». Не исключено, что в новом цикле будут действовать другие отображения h^* и g^* в новой композиции $h^*g^*=f$, реализующей тот же самый тождественный автоморфизм f, то есть в новом цикле возможна «другая физика». Сделаем несколько других важных замечаний-предположений (гипотез):

1) предельно-«точечное» состояние $X \equiv Y$ не обязательно должно обладать бесконечно большой плотностью, то есть не обязательно должно быть

«точкой сингулярности»: понятие предельно-«точечное» состояние, как мы указывали, является относительным. В случае матричной модели, показанной на рис. 13.2, в нашей новой интерпретации соответствующих матриц признаком этого состояния является равенство $detI_X=detF=1$, где $F=I_X$ – тождественная единица на $X\equiv Y$, являющаяся единичной матрицей. Размер единицы $F=I_X$, пропорциональный некоторой предельной «плотности» Вселенной, не обязательно равен скалярной единице. Вполне возможно, что «Большой взрыв» происходит при размере матрицы $F=I_X$, достигающем при сжатии Вселенной некоторого конечного, не равного скалярной единице, значения. Это определяется недоступной математике «физикой» процессов;

2) в момент Большого взрыва, и только в этот момент, Вселенная «уже знает» траекторию своей эволюции, то есть «знает» сразу оба отображения h и g в композиции $hg=f$, реализующей ее переход в себя в новом состоянии;
3) на отображении сжатия h действует не «обратное», «отматывающее жизнь назад», а «другое» время;
4) неизвестно, какое из предельных состояний Вселенной является «истинно исходным». Начаться все может и из предельно расширенного состояния Z, обладающего минимальной «плотностью». В этом случае эволюция происходит в соответствии с рис. 13.4: Вселенная сжимается, а затем возвращается в исходное максимально расширенное состояние;
5) в соответствии с нашими моделями Вселенная никогда не «лопнет», т.к. в состоянии Z минимальной «плотностью» обладает ее внутренняя «ткань-пространство» или некоторая заполняющая ее «субстанция», а «внешняя оболочка» не испытывает никакого «напряжения» и соответственно не «рвется как воздушный шарик», так как попросту отсутствует. Вселенная никогда и не сожмется до состояния бесконечно большой плотности, то есть до состояния «сингулярности» - Большой взрыв происходит при некоторой конечной «плотности» Вселенной;
6) вопрос, является ли Вселенная закрытой или открытой системой и, соответственно, единственной, требует дополнительного анализа, но если Вселенная закрытая система, то, скорее всего, циклы эволюции идентичны, то есть отображения h и g в каждом цикле-композиции $hg=f$ остаются одними и теми же. Если же Вселенная открытая система, то в новых циклах возможны оба варианта: как сохранения неизменных h и g, так и появления каких-то других отображений h^* и g^* и реализации новой композиции $h^*g^*=f$.

Что касается утверждений 13.1-13.5, сформулированных для систем сжатия-восстановления информации, то в рассматриваемом «космологическом случае» им можно дать следующие интерпретации:

А) Вселенная в соответствии с утверждением 13.1 может быть «сжата» в предельное, «точечное» состояние X максимальной, но конечной «плотности», а затем расширена в другое предельное состояние Z некоторой минимальной, но также конечной «плотности»;

Б) в соответствии с утверждением 13.2 (общий закон сохранения) субстанция (возможно, «энергия»), образующая «ткань» Вселенной, с абсолютной точностью и полнотой сохраняется при всех ее преобразованиях в процессе эволюции Вселенной и в каждый данный «момент», в каждом «сечении» процесса эволюции заполняет всю Вселенную;

В) в соответствии с утверждением 13.3 реализуется «закон взаимно однозначного соответствия состояний Вселенной и отвечающих им инвариантных форм заполняющей ее субстанции»: заполняющая Вселенную субстанция в каждый данный «момент», в каждом «сечении» процесса эволюции имеет свою инвариантную форму, соответствующую конкретному «сечению», в том числе и сечениям, проходящим через предельные состояния Вселенной. Это утверждение можно интерпретировать как некоторый «закон детерминированности», «закон каузальности (причинности)» или «закон стабильности физики», действующий во Вселенной с точностью до тождественных автоморфизмов (сжимающего, либо расширяющего, что эквивалентно), на которых она реализуется;

Г) в соответствии с утверждением 13.4 Вселенная имеет два предельных состояния: «предельно расширенное» и «предельно сжатое», между которыми в процессе эволюции осуществляется «перекачка» образующей ее субстанции;

Д) в соответствии с утверждением 13.5 во Вселенной, модель которой описывается на языке матричной алгебры, равенство нулю определителя матрицы, отвечающей необыкновенному изоморфизму и соответствующему «предельно расширенному» состоянию, характеризует минимальную, но конечную «плотность» образующей ее субстанции, а равенство единице определителя матричной единицы, отвечающей «предельно сжатому» состоянию, характеризует именно предельную, конечную «максимальную плотность» субстанции в этом сжатом состоянии. Для других языков математического описания моделей космологических систем, отличных от языка матричной алгебры, необходимо искать другие формально-математические признаки предельных состояний.

Таким образом, выполненный здесь анализ рассмотренных моделей информационных систем и их квантово-микросистемной и космологически-макросистемной интерпретаций, а также проведенный в предыдущих главах анализ других свойств систем, продемонстрировал универсальность, «общесистемность» полученных результатов и, в частности, *высочайшую общность для теории систем, простоту и изящность формулы-композиции* $f=hg$, *отвечающей теореме о реализации и основной лемме*, которую по праву можно назвать фундаментальной леммой теории систем. *Указанная формула является универсальным «золотым ключиком», открывающим причины и вскрывающим внутренние механизмы возникновения и эволюции систем различной физической природы и различных масштабов.*

Зри в корень!

Козьма Прутков

Глава 14

Обсуждение результатов. Заключение

14.1. Обсуждение результатов

Выступая на праздновании юбилея института им. В.А. Стеклова один из выдающихся родоначальников математической теории систем Р.Е. Калман в своем докладе [1] привел слова академика Л.С. Понтрягина: «Математики не верят в вероятность». Анализ глубочайшего смысла этой фразы, как отметил Р.Е. Калман в [1], стимулировал его исследования и позволил сформулировать (далее цитата) «быть может, не вполне осознанно, важнейшую проблему наших дней, касающуюся взаимоотношения (чистой) математики и реального мира». Эта весьма широкая проблема была им конкретизирована в проблему «данные → система (модель, объясняющая данные)», которая (далее цитата по [1]), «должна рассматриваться как основная задача почти для любой отрасли науки, имеет серьезное и интересное математическое содержание… Классические идеи теории систем, касающиеся указанной проблемы, могут быть выражены как *Принцип единственности*». Указанный принцип в формулировке Р.Е. Калмана был нами дословно процитирован в главе 1.

В качестве отправной точки в этой формулировке взяты данные, их «точность» и «полнота», из которых с необходимостью следует единственность «минимальной системы (математической модели), воспроизводящей эти данные». Такая формулировка, с одной стороны, была следствием *методологической ловушки*, а, с другой стороны, не позволила найти из этой ловушки рациональный выход. Указанная «методологическая ловушка» была обусловлена противоречием между, как отмечал Л.С. Понтрягин, «неверием математиков в вероятность» и явно наблюдаемой «зашумленностью» реальности.

В работе [1], несмотря на предупреждение академика Л.С. Понтрягина, предпочтение было отдано «вере в вероятность». Отсюда, как следствие, возникли трудности с определением понятий «данные», «точность» и «полнота» данных, без четкой формализации которых было невозможно даже сформулировать теорему реализации, что в работе [1] было прямо и отмечено. Указанные

истоки и посылки, на которые опиралась сформулированная в [1] действительно фундаментальная *проблема реализации*, не были поколеблены и в других работах (см., например, [2, 14]). Вследствие этого предложенные впоследствии формулировки и доказательства теоремы реализации относились к области «чистой» математики и были весьма далеки от реальности, которую изначально они были призваны отобразить.

С учетом отмеченных посылок задача отображения данных об объектах в форме моделей (систем) в заголовке работы [1] названа *задачей идентификации систем с шумами*. Здесь шумы, основными характеристиками которых служат некоторые *неизвестные вероятности*, рассматриваются, по сути, как *первопричина* последующих сложностей с интерпретацией данных, а не как следствие некоторых, быть может, тоже неизвестных, *детерминированных процессов* в исследуемых объектах реальности. Но это потребовало бы уже другого взгляда на задачу идентификации.

С точки зрения *современной теории систем* эта задача остается фундаментальной и краегольной, так как *модель*, являющаяся результатом ее решения, используется при решении всех других классических и не менее фундаментальных задач таких, например, как задачи о синтезе наблюдателей и регуляторов для динамических систем, задачи синтеза алгоритмов и устройств контроля, интеграции систем в «системы систем», то есть в комплексы и др.

В контексте теории систем весьма важно, что именно эта, по сути, мировоззренческая задача была в фокусе внимания при анализе необходимости учета, либо неучета шумов и соответствующих им вероятностей при построении *моделей*, реализующих данные об объекте. Несмотря на скептическое отношение ряда видных математиков того времени к вероятности (вспомним еще Эйнштейна с его известным выражением «Бог не играет в кости»), Р.Е. Калман в работе [1] остался вероятности верен. И это вполне понятно. Действительно, как мы отмечали, при ближайшем рассмотрении *мир зашумлен*, причем весьма значительно. Все в нем *кажется случайным* и, соответственно, о полученных данных нельзя однозначно утверждать, насколько они полны и точны – возникла та самая методологическая ловушка: шумы и вероятности, казалось, нельзя игнорировать, но если не игнорировать, то нельзя определить понятия «полнота» и «точность» данных. Именно на это в работе [1] было указано как на основную трудность, не позволившую сформулировать и доказать теорему о реализации. Указанная методологическая ловушка не была преодолена и другими исследователями.

Для чего мы столь подробно анализируем и цитируем работу [1]? Во-первых, для того, чтобы еще раз подчеркнуть фундаментальность *поставленной в*

ней проблемы взаимоотношения «чистой» математики и реального мира и «основной задачи почти для любой отрасли науки» отображения некоторых данных об объектах реального мира в форме «систем», под которыми в [1] понимаются «модели, объясняющие данные». Во-вторых, важно иметь в виду и отметить большую методологическую, мировоззренческую сложность указанной задачи, правильность расстановки акцентов и приоритетов при ее решении, чтобы не угодить в методологическую ловушку. Как мы видели, не всегда удавалось преодолеть эту сложность. И, в-третьих, может быть, самое главное в контексте этой книги, в [1] *в качестве самостоятельной* была *поставлена проблема единственности решения* фундаментальной задачи идентификации систем с шумами или «задачи реализации» *и сформулирован принцип единственности*. Эта проблема сама по себе имеет важное значение в теории систем. Вместе с тем даже в относительно узких рамках указанной задачи *проблема единственности* решения не была преодолена в виду отмеченных методологических трудностей. *Существование* решения задачи идентификации в [1] предполагалось по умолчанию.

При нашем анализе с учетом практических аспектов и *переоценки проблемы вероятности* [6, 10-13], проблема существования и единственности решений была актуализирована как *весьма общая*, относящаяся ко всем типовым, по сути, классическим задачам *теории систем*. Вполне очевидно, что, с одной стороны, это связано *с общностью системных аспектов* рассматриваемых задач, объектов и явлений и, с другой стороны, с тем, что лежит в основе этой общности, а именно *с единством и цельностью реальности*, к которой эти задачи, явления и объекты относятся.

Новый взгляд на принцип единственности с главным акцентом *не на данные об объекте*, как это сделано в [1], а *на характер отображения* входных и выходных данных друг в друга, а именно на требование изоморфизма этого отображения, позволил нам по-новому интерпретировать принцип единственности и дать его формулировку в *форме общего принципа изоморфизма* [6, 10-13]. В книге формулировка этого принципа и ее обоснования приведены в главе 2. В рамках общего принципа изоморфизма совершенно «естественным образом» разрешился «вечный вопрос» о вероятности как таковой и ее природе. На этот вопрос строго обоснованно в главе 3 отвечает следствие 4 к основной лемме и теореме о реализации, которое так и называется «о детерминированности «случайностей». «Случайность» рассматривается нами как векторная закономерность, обусловленная «пересечением» (в математическом смысле) в некоторой точке «отображения-пространства» системы сразу множества строго детерминированных локальных процессов. Мощность этого множества и его «элементы»

конкретному наблюдателю в локальной точке указанного пространства определить практически невозможно, что и создает видимую «зашумленность» реальности, которую часто характеризуют как «чистую вероятность». В целом общий принцип изоморфизма позволил совершенно по-иному подойти к постановке *проблемы существования и единственности* решений уже не одной обсуждавшейся, а многих возникающих задач *теории систем*.

Дело в том, что изначально, помимо проблемы вероятностей, в рамках задачи реализации и сформулированного применительно к ней принципа единственности, *системы*, как таковые, не рассматривались в качестве самостоятельного предмета исследований. Понятие «*система*» *рассматривалось в* [1] *в весьма узком смысле - в качестве синонима понятия* «*модель*», отображающего некоторые данные об объекте реальности, но не как самостоятельный предмет исследований в контексте и смысле, принятых в современной общей теории систем [22-25]. Это относится и к другим исследованиям (см., например, [14]), в которых в рамках используемых абстрактных понятий главные признаки систем (эмерджентность и др.) были либо полностью проигнорированы, либо не нашлось и не было предложено никаких формально-математических средств их описания. В современной «чистой математике» также достаточно часто «по определению» используют составные понятия со словом «система», например, такие как «алгебраическая система» (см., например, [63-65]), при анализе семантики которых невозможно обнаружить главные признаки, относящиеся к понятию «система», принятому в общей теории систем и системном анализе. Впрочем, и в этих специализированных научных дисциплинах это главное понятие, по сути, характеризуется лишь описательно, феноменологически.

Конечно это нельзя ставить в вину ученым, изучавшим указанные принципы, феномены, задачи и соответствующие понятия. Причин здесь несколько. Во-первых, исследователи часто и не задумывались о «подводных», системных аспектах рассматриваемых задач, проблем и понятий. Во-вторых, даже при явном проявлении системных феноменов у наблюдаемых явлений и объектов, например, неожиданно возникающих новых свойств у некоторого объекта, как целого («системный эффект», эмерджентность), отсутствовавших у его составных частей до их объединения в объект, не находилось и часто до сих пор *не находится рациональных и понятных объяснений причин их появления*, не говоря уже о создании теории, раскрывающей «механизм» предсказуемого порождения таких феноменов.

Мы уже говорили о «механизме» предсказуемого порождения «вероятностей». Другим примером являются материалы и различные объекты «с заданными свойствами», которые до настоящего времени часто создаются методом проб и ошибок и успех в их создании рассматривается как удача, как *счастливый случай*. Многие явления в физике, химии, биологии и вообще в природе рассматриваются как пока *необъяснимые проявления* «системного эффекта», эмерджентности, первоосновы которых не были раскрыты. В качестве «классических» примеров укажем эволюцию Вселенной, гравитацию, феномен самой жизни, сознания, странные явления «квантовой запутанности» и т.д., первопричины и «движущие силы» которых неизвестны и продолжают исследоваться. До настоящего времени не разрешен «кризис в физике», возникший в связи с необъяснимой пока существенной разницей в поведении объектов макро- и микромира. Попытки создания «новой физики» и «теории всего», полностью объясняющей «картину мира», исходя из некоторых общих основ, к успеху пока не привели. Очевидно лишь то, что эти явления весьма сложны и с позиций известных теорий необъяснимы.

Нашу интерпретацию некоторых из явлений природы в рамках развиваемой математической (абстрактной) теории систем мы дали в предыдущих главах, указав на общность «механизма», порождающего эти явления и описывающего их эволюцию. Вместе с тем эта книга также не претендует на роль «откровения» и не содержит изложение «всеобщей теории всего», объясняющей все явления природы. Здесь предложен лишь *научно обоснованный* «*свежий взгляд*» *на теорию систем, опирающийся на единый и единственный «естественный» аксиоматический принцип - общий принцип изоморфизма, - позволивший по-новому подойти к математической формализации ее основных понятий, «законов» и «постулатов» и с позиций которого, как нам представляется, удастся подступиться к решению некоторых проблем анализа и синтеза искусственных систем и актуальных проблем естествознания*. Надежды на это обусловлены общностью проявления «системных основ» и «системных эффектов» в различных феноменах и объектах реальности, безусловное наличие которых давно вскрыли родоначальники и классики системологии, системного анализа, кибернетики и философии, а также их последователи [66-70, 26, 22-25]. Что же реально сделано в рамках этого «свежего взгляда» на «системные основы» и на что реально можно опираться при решении практических задач?

Если говорить коротко, то разработана и в первой части книги подробно изложена *новая цельная, внутренне непротиворечивая формально-математическая фундаментальная научная парадигма в теории систем, опирающаяся на*

минимально возможную, достаточно очевидную, интуитивно понятную и вместе с тем физически обоснованную аксиоматику. Парадигма содержит аксиомы, леммы, теоремы и другие теоретически обоснованные утверждения, методические и прикладные примеры, подтверждающие теоретические выводы и убедительно демонстрирующие возможности теории по решению прикладных задач и созданию на ее основе новых технологий, а также позволяющие уверенно прогнозировать результаты применения теоретических положений к реальным искусственным и естественным системам. В целом парадигма наряду со строгой научной обоснованностью всех теоретических положений имеет ярко выраженный конструктивно-прикладной, плодотворный характер. Общая характеристика новой парадигмы дана во введении к первой части книги. Здесь обратим внимание лишь на некоторые наиболее важные ее аспекты.

Во-первых, в качестве «первого принципа», как говорил Аристотель [27], первоосновы сформированной теории, отталкиваясь от абсолютно практических, можно сказать «физических интересов», был предложен исходный аксиоматический «постулат» - *общий принцип изоморфизма*, - как новая формализованная и *более сильная в математическом смысле формулировка известного принципа единственности*. Соответствующие положения и обоснования этого принципа изложены во введении, а также в главах 1 и 2 первой части книги. Общий принцип изоморфизма в исходной формулировке и опирающиеся на него теоремы были использованы нами при анализе в этой части книги таких свойств «кибернетических», по сути, технических систем, как управляемость, наблюдаемость, идентифицируемость, контролируемость, комплексируемость и других. Указанные свойства на самом деле являются общими и для систем вообще, как для предметов и объектов исследования. В последующем изложении мы к этим свойствам еще вернемся в примерах приложений к техническим динамическим системам, а также при рассмотрении систем других классов.

В дальнейшем указанный, и так достаточно очевидный и интуитивно понятный, «постулат» в форме общего принципа изоморфизма был еще более упрощен, дополнительно усилен в математическом смысле и предложен в форме *сильного общего принципа изоморфизма*. Это сделано в главе 3 в форме следствия 9. Математический смысл этого усиления заключается в рассмотрении *в качестве исходного* при анализе или синтезе системы обыкновенного *тождественного изоморфизма* (*тождественного автоморфизма*) вместо произвольного изоморфизма в рамках общего принципа изоморфизма. В физическом смысле это усиление означает, например, признание того *очевидного факта*, что *каждый объект реальности абсолютно идентичен самому себе, то есть само-*

идентичен, либо *полностью и абсолютно идентичен точно такому же объекту-двойнику, объекту-клону, объекту-реплике*. Обратим внимание – *не самоподобен, а именно самоидентичен*.

Такая сильная формулировка общего принципа изоморфизма является необходимой при решении некоторых задач в технической кибернетике, а также может и будет нами использована при анализе некоторых систем естественного происхождения и наблюдаемых в них явлений и феноменов. Примеры таких систем из области биологии и космологии мы приводили. Здесь же вернемся к анализу наиболее важных, на наш взгляд, аспектов предложенной теоретической парадигмы.

Во-вторых, на основе общего принципа изоморфизма были сформулированы и доказаны *основная, фундаментальная для предложенной теории, лемма и теорема о реализации изоморфизма композицией отображений. Это главные строго формализованные и доказанные утверждения, на которых построена вся новая формально-математическая парадигма в теории систем*. Их формулировки приведены и подробно разъяснены в главе 2. Строго формализованные определения основных понятий теории систем и следствия, выведенные из этих утверждений, приведенные в главе 3, показывают теснейшую связь, взаимопроникновение чисто алгебраических, математических конструкций с физикой систем, как «моделей» и «самостоятельных объектов» реальности. Это подтверждает, что обозначенную в [1] «важнейшую проблему наших дней, касающуюся взаимоотношения (чистой) математики и реального мира», можно пытаться строго формально решать в рамках рассматриваемой теории, по крайней мере, на уровне «систем» и системных «аналогий».

Основная лемма, по сути, формализует понятие «система» и ее «каноническую коммутативную диаграмму», *вскрывает главную причину возникновения «системного эффекта» и феномена эмерджентности в системе. Эта причина связана*, как доказано в лемме, *с обязательным возникновением* в указанной коммутативной диаграмме нового *свойства изоморфизма у любых отображений*, образующих композицию, реализующую (замыкающую) обычный изоморфизм, на котором система построена. Тем самым доказан и *общий принцип относительности свойств отображений в алгебре*, введенный следствием 5 в главе 3. Представляется, что этот, доказанный чисто математически, принцип тесно связан с известным принципом относительности в физике. Глубину этой взаимосвязи еще предстоит вскрыть.

Основная лемма впрямую не утверждает и не доказывает обязательность *существования* хотя бы одной композиции, реализующей изоморфизм, хотя очевидно, например, существование композиций этого изоморфизма с единицами на соответствующих алгебраических структурах *X* и *Y*, как это показано на рис. 14.1 и рис. 14.2.

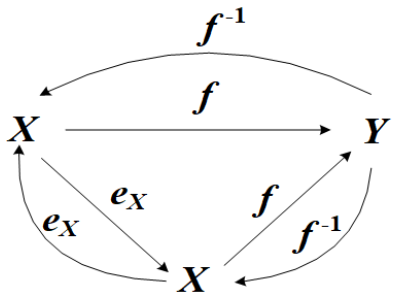


Рис. 14.1

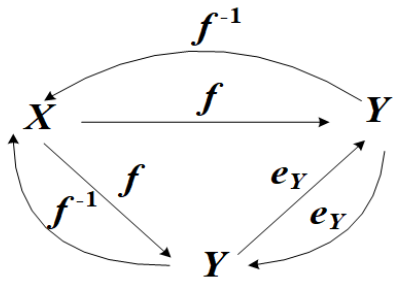


Рис. 14.2

Из рис. 14.1 следует:

$$f=fe_X,\ f^{-1}=e_X f^{-1},\ e_X=f^{-1}f. \qquad (14.1)$$

Из рис. 14.2 следует:

$$f=e_Y f,\ f^{-1}=f^{-1}e_Y,\ e_Y= f f^{-1}. \qquad (14.2)$$

Соотношения (14.1) и (14.2), вытекающие, по сути, из определения изоморфизма, доказывают обязательное существование хотя бы одной композиции, реализующей данный изоморфизм. Проиллюстрированные композиции являются *тривиальными*. Вместе с тем безусловное существование тривиальных композиций показывает, что даже на двух изоморфных алгебраических структурах *X* и *Y* может быть реализована *система*. И такие системы, как будет продемонстрировано ниже, существуют в реальности. Таким образом, *обязательное существование* по крайней мере одной композиции, реализующей изоморфизм, доказано.

Сложнее с единственностью. *Лемма не содержит утверждения о единственности композиции*, реализующей данный изоморфизм. Вполне очевидно, что таких композиций может быть бесконечное множество. Это следует и из примеров в главе 12. Важно другое: *если какая-либо конкретная нетривиальная композиция, реализующая некоторый изоморфизм, существует и зафиксирована*, то *лемма утверждает, что у каждого из образующих ее отображений существует единственное обратное с точностью до этого изоморфизма*, то есть строго в границах системы, реализованной на изоморфизме, и ее коммутативной диаграммы. Более того, как показано в главе 12, *одно и то же отображение в разных композициях, коммутирующих один и тот же изоморфизм, имеет разные обратные и эти обратные являются единственными в своих композициях*.

Соответствующее положение, как уже отмечалось, нами зафиксировано следствием 5 в главе 3 в качестве *принципа относительности в алгебре*. Указанные примеры хорошо *иллюстрируют возникновение системного эффекта* или, как его называют, феномена эмерджентности в системе. Именно поэтому *каноническая коммутативная диаграмма*, иллюстрирующая на рис. 2.1 утверждение основной леммы, является «моделью» любой системы или, точнее, *определяет «систему» как таковую*.

Если же коммутативная диаграмма системы с композицией отображений, реализующих изоморфизм, задана не в канонической форме, показанной на рис. 2.1, а как, например, на рис. 12.5 из главы 12, то обратные к отображениям-матрицам, образующим соответствующие композиции, могут быть определены *с точностью до единственного класса*. При любой форме задания коммутативной диаграммы *основная лемма устанавливает все условия, которые позволяют однозначно определить единственные обратные для отображений, образующих композицию*, реализующую в этой диаграмме соответствующий безусловный изоморфизм, и тем самым позволяют доказать, что эти отображения внутри коммутативной диаграммы, то есть с точностью до этого безусловного изоморфизма, обладают всеми свойствами изоморфизмов, известными в алгебре. *Изъятие отображения из указанной композиции, то есть из соответствующей системы, обязательно приведет к изменению его свойств, точнее, к потере этим отображением свойств изоморфизма, если только оно не было обычным изоморфизмом до включения в систему.* Это имеет прямое отношение к физике. В комментариях к следствию 4 в главе 3 в связи с этим мы уже обращали внимание на необходимость тщательного планирования физических экспериментов, предполагающих исследование свойств *систем микромира*. К указанному феномену систем мы еще обратимся при последующем обсуждении возможных приложений теории к анализу некоторых физических явлений.

В-третьих, часто встречающиеся в книге формулировки утверждений «с точностью до изоморфизма», как показала практика, требуют дополнительных пояснений. Сразу отметим, что у математиков-алгебраистов вопросов по поводу таких утверждений обычно не возникает, так как в алгебре достаточно часто формулируются и доказываются утверждения именно с «с точностью до изоморфизма» (см., например, [63]). Вместе с тем, специалисты-прикладники и другие читатели нередко задаются вопросом, что означает применительно к рис. 2.1 утверждение «отображения h и g изоморфны с точностью до отображения-изоморфизма f»? Более развернутые комментарии к этому утверждению уже даны в главе 2. Тем не менее один из рецензентов статьи [61] попросил пояснить это утверждение для более широкого круга читателей на каком-либо простом

наглядном примере. Такой пример в статье [61] был приведен. Приведем его и здесь с дополнительными пояснениями.

Композиция отображений g и h образует на изоморфизме f систему, в которой эти отображения обладают новым свойством — свойством иметь обратное. Это свойство может отсутствовать у каждого из них по отдельности, вне системы. Появление такого свойства у отображений g и h в системе объясняет, как возникает ранее непонятный «системный эффект», эмерджентность — главный признак реализации любой новой системы. Возьмем, к примеру, двоих детей. Только вместе они могут играть в прятки, то есть образуют систему «Игра в прятки», так как каждый ребенок по отдельности, вне этой системы, не может от себя самого спрятаться. Свойство «спрятаться» — это системное свойство каждого ребенка в системе «Игра в прятки», проявление ее, системы, возникновения. В то же время сторонний наблюдатель, не знающий, что дети играют в прятки, может видеть спрятавшегося ребенка, то есть свойство «спрятаться» принадлежит детям только в системе. Для стороннего наблюдателя дети не обладают этим свойством. Так и со свойством обратимости отображений g и h. Оно проявляется только в системе-композиции, реализующей или коммутирующей безусловный изоморфизм f, то есть в этом смысле свойство проявляется с точностью до указанного изоморфизма. При реализации другого изоморфизма у одного и того же отображения, как показано в главе 12, может возникнуть другое обратное, то есть другое свойство. *Основная лемма и теорема о реализации* формализованно описывают в самом общем виде возникновение эффекта эмерджентности и в этом смысле одновременно *являются наиболее общим строго формализованным определением системы как математической абстракции и феномена реальности*.

Продолжим рассмотрение примера с детьми. Возникает вопрос: что в этом примере является отображением-изоморфизмом f и как формализовать рассмотренную систему? Пусть дети именуются Боб и Алиса. Эти имена часто используются при описании «мысленных экспериментов» в научной литературе. Систему, которую они образовали, начав играть в прятки, можно изобразить в форме коммутативной диаграммы, представленной на рис. 14.3. Алиса самоидентична себе, что характеризуется тождественным отображением e_A и обратным ему отображением e_A^{-1}. Аналогично для Боба можно ввести отображения e_B и e_B^{-1}. Взаимно однозначное отображение-изоморфизм f содержит два элемента-«правила»:

1) Если Алиса *видит* Боба (f_1), То и Боб *видит* Алису (f_1^{-1}), то есть Боб *не спрятался*;

2) Если Алиса *не видит* Боба (f_2), То и Боб *не видит* Алису (f_2^{-1}) - Боб *спрятался*.

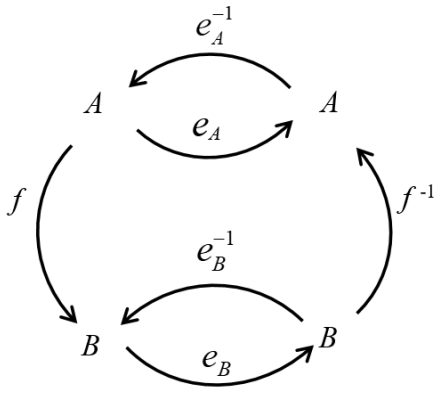


Рис. 14.3 Взаимосвязь Боба и Алисы в системе «Игра в прятки»

Отображение-изоморфизм *f*, формализующее цель системы, «запутывает» детей в системе «Игра в прятки» так, что они находятся в жесткой «мгновенной» взаимосвязи: либо видят друг друга, то есть система находится в состоянии «Боб *не спрятался*», либо не видят – «Боб *спрятался*». Все меняет появление стороннего наблюдателя. Он наблюдает детей, не знает, что «Боб *спрятался*» и *видит* Боба, то есть воспринимает Боба совершенно в другом состоянии, с другим свойством и может, например, Боба окликнуть – возникает «декогерентность» системы, «запутанность разрушается» и система «Игра в прятки», как целое, рушится, так как Алиса поймет, что Боб находится в состоянии видимости со стороны наблюдателя и узнает, где он прячется.

Диаграмма на рис. 14.3, по сути, объединяет диаграммы, показанные на рис. 14.1 и 14.2, то есть является суммой диаграмм-систем «Алиса-Боб» и «Боб-Алиса», каждая из которых реализована на одном и том же изоморфизме *f*. Таким образом, этот простой пример поясняет также, как всего два изоморфных элемента-объекта А и В образуют реальную систему, как и утверждалось в комментариях к рис. 14.1 и 14.2, причем образуют в смысле, отвечающем утверждениям основной леммы и теоремы о реализации. Пример показывает также проявление в макросистеме явлений «запутанности», в чем-то похожих на соответствующие явления в «квантовых системах», характерных для микромира.

Из других важных аспектов новой научной парадигмы в теории систем отметим возникшую с необходимостью потребность в формализации основных ее положений на языке современной алгебры. Алгебраизация теории систем осуществляется уже давно и является устойчивым трендом [1, 2, 4, 7, 8, 14, 17, 52, 53, 71, 72]. Возможности формально-математического языка алгебры оказались

адекватны потребностям современной философии систем, в которой уже выкристаллизовались, устоялись и обрели четкие общепринятые смысловые очертания все основные понятия, категории, «постулаты» и «законы». О необходимости их формализации уже давно говорят специалисты в области общей теории систем [1-3, 8, 14, 25, 26, 40, 52, 66-70, 71, 72]. Указанными и другими специалистами предпринимались и соответствующие попытки. Так в работе [71] декларировался «принцип математического изоморфизма в общей теории систем». Однако рассматривался он в весьма узком смысле выделения классов одинаково устроенных в математическом смысле систем. Это само по себе важно и давно отмечалось не только математиками, но и философами, однако *не касалось формализации процессов образования самих систем, причин и механизмов возникающих в них эффектов, как самостоятельных предметов исследования*. Вообще, на наш взгляд, *трудности в проблеме формализации общей теории систем были связаны со сложностью построения строгой и непротиворечивой формально-математической аксиоматики в этой области*. Даже в частной задаче идентификации систем с шумами, как отмечалось в начале этой главы, такие трудности оказались непреодолимыми.

В первой части книги предпринята очередная попытка достаточно всеобъемлющей математической формализации общей теории систем на языке современной алгебры. Насколько удачной она является, судить читателю. Ясно одно, книга отнюдь не закрывает проблему математической формализации теории систем, наоборот, она ее открывает. Дело в том, что, как нам представляется, наконец удалось создать всю необходимую и достаточную формально-математическую аксиоматику, те самые «первые принципы», на которые в дальнейшем можно опираться при развитии теории. В этом смысле *настоящую книгу можно рассматривать как* «*начала математической философии систем*».

Любая теория, как известно, проверяется практикой. В этом смысле теория должна быть конструктивной и плодотворной. Разрабатываемая алгебраическая теория систем с самого начала строилась с учетом потребностей практики и в своих истоках отталкивалась от реальности. Все упоминаемые в предлагаемой теории «принципы», «постулаты» и «законы» так или иначе давно применяются на практике. Здесь они приобрели лишь новое «звучание», новую строго обоснованную формально-математическую интерпретацию. Это касается «постулата причинности», «принципа обратной связи», «принципа относительности» в разных его проявлениях, «принципа модульности», «принципа суперпозиции», «принципа двойственности», «принципа разделения», закона (принципа) эквифинальности, «закона необходимого разнообразия» и других. Вместе с тем это новое «звучание», новый математический формализм в теории систем позволили

предложить и новые методы решения «старых» задач, а также ставить и решать новые задачи на единой методологической основе. Вторая часть книги как раз и посвящена более детальному изложению новых технологий, созданных на основе разработанной теории, которые уже применяются при решении различных задач в приложении, в первую очередь, к динамическим системам и к системному проектированию искусственных систем.

И в заключение обсуждения теоретических результатов, изложенных в первой части книги, отметим, что проведенный во введении к первой части анализ литературы, относящейся к теории реализации и к применению алгебраических методов в теории систем, конечно не охватывает многие весьма полезные, ставшие уже классическими, а также появившиеся сравнительно недавно книги и статьи. Это сделано для того, чтобы яснее отразить исходные идеи, фигурировавшие в первоисточниках, к которым относятся прежде всего работы Р. Калмана [1, 2]. Многие из последующих работ так или иначе опираются на работы [1, 2].

Отдельного упоминания, пожалуй, заслуживает ставшая классической работа [14]. В отличие от использованного в [1, 2] и в данной статье алгебраического метода, авторы [14] определяют понятие «система» на весьма абстрактном теоретико-множественном уровне, а также придерживаются различной аксиоматики при обсуждении разных вопросов теории систем. Базовое определение системы, на которое опирается все последующее изложение в [14], не охватывает главного признака, а именно, эмерджентности, характеризующего появление в системе новых свойств, отличных от свойств, объединяемых в систему элементов. В [14] система рассматривается на уровне «вход-выход», как «черный ящик», что во многом ограничивает применение полученных результатов на практике, к тому же изложение ведется в основном применительно к «временным системам», которые авторы не относят к алгебраическим, хотя алгебраические системы применительно к некоторым обобщениям все-таки рассматривают. В целом, полученные в [14] результаты и выводы полезны применительно к весьма абстрактному анализу некоторых свойств систем. Хорошим дополнением к работе [14] является работа [80], в которой систематизированы и четко формализованы на основе теоретико-множественного описания идеи как работы [14], так и других, известных на то время, работ по *абстрактной теории систем*. Наряду с достаточно фундаментальным изложением основ абстрактной теории систем работа [80] содержит главы, в которых рассмотрены и приложения указанной теории к конкретным задачам управления. Вместе с тем, как и в работе [14], вне поля зрения в [80] остались вопросы формально математического исследования природы «системного эффекта» (эмерджентности), обратной связи и

ее «разнообразия», а также другие системные свойства (например, целостность, интегративность), часто рассматриваемые в качестве постулатов. Достаточно размытыми остались и определения системы, простой и большой системы. Близким к нашему является лишь понятие сложной системы, определяемой в [80] как системы, «которую нельзя корректно описать математически». С позиций сегодняшнего дня спорным является и утверждение во введении к [80], что «теория систем является … молодой ветвью кибернетики». В настоящее время, пожалуй, наоборот, кибернетику следует рассматривать как ветвь математической теории систем.

В отличие от работ [14, 80], в данной книге и ранее в статье [62] главной посылкой, из которой исходил автор, являлась практическая потребность в исследовании вопросов существования и единственности решения всех основных задач теории систем, вопросов формально-математического объяснения системных феноменов, а алгебраический аппарат был привлечен лишь как необходимое и весьма конструктивное средство такого исследования. Кроме того, в отличие от [14, 80], все основные результаты нами получены на основе одного единого и единственного для анализа свойств систем аксиоматического принципа — общего принципа изоморфизма. Отметим, что «алгебраический», «геометрический» и «теоретико-множественный» методы описания находят все большее применение при исследовании и изложении различных проблем теории систем.

В качестве одного из актуальных примеров укажем работу [79]. Казалось бы, прямого отношения к *математической теории систем* эта работа не имеет. Однако, отталкиваясь от проблематики управления и возводя ее в превосходную степень, авторы, по сути, сделали попытку, на что указывают в предисловии, подступиться к «теории всего» и изложить (далее цитата) «программу и некоторые результаты построения «Единой геометрической теории управления» (ЕГТУ), или «Теории структур управления» (ТСУ)». Сама по себе указанная попытка вполне уместна, учитывая, что (далее цитата) «слово *единая* и в физике, и в других науках надо понимать, как попытку осознать, осмыслить накопившиеся к данному моменту времени знания и опыт». В построении материала авторы опираются на математическое понятие *симметрии*, а в качестве основной проблемы ЕГТУ-ТСУ рассматривают «проблему управления системами, как структурами…» в отличие от «…классических задач управления *состояниями* систем при фиксированной (неизменной) их структуре». По их мнению, (далее цитата) «задачи по управлению структурами и симметриями, выдвинутые в ЕГТУ-ТСУ, породили новую философскую концепцию – «Управленческую парадигму Мира». Анализировать указанную концепцию здесь не будем. Отметим лишь,

что верный посыл авторов, основанный на актуальности использования математического языка симметрий, морфизмов и, в целом, алгебраической геометрии для формализации наиболее общих проблем управления, в книге, к сожалению, не подкрепляется четко прописанными аксиоматикой, понятийным аппаратом и логически выверенным изложением основных положений ЕГТУ-ТСУ на этой основе.

В нашей работе мы показали, что между структурами и соответствующими процессами (состояниями), как разными формами минимальных в смысле [1] моделей-систем, имеется изоморфизм, то есть «проблема управления системами, как структурами» изоморфна «проблеме управления системами с точки зрения их состояний и процессов» - с точки зрения математики *эти проблемы эквивалентны* и предпочтение какой-либо из них определяется исследователем из дополнительных соображений. В последнее время многие ученые, как и авторы работы [79], при анализе общих проблем управления отдают предпочтение структурам систем.

Размытость аксиоматики и нечеткость в определении понятий в [79] привели и к другим достаточно спорным утверждениям. По мнению авторов, (далее цитата по стр. 61) «…можно создавать *аксиоматику* понятия управления без априорного использования того, что мы называем системой и информацией», «… наиболее фундаментально понятие управления, а понятия системы и информации – вторичные понятия».

В нашей работе, опираясь на простую, формализованную аксиоматику и максимально структурированную совокупность понятий, также строго формализованных, основным из которых является понятие «система», мы определяем и анализируем *свойства систем*, в том числе *свойство управляемости*, не противопоставляя его системе.

Авторы работы [79], как и авторы других известных работ, ссылаясь на кибернетику, рассматривают «обратную связь» как постулат, догму, закон, который лежит в основе (далее цитата по стр. 60) «управленческой (кибернетической) парадигмы мира», которая «означает, что все, что сохраняется в мире, происходит за счет работы систем управления с обратной связью, регуляторов, естественно присутствующих в природе и обществе…».

Нами же показано, что *«причина», необходимость, достаточность, единственность и структура обратной связи обусловлены требованием реализации свойства управляемости системы*. Структура («разнообразие» по терминологии работ [73, 81]) обратной связи, то есть регулятора, детерминируется структурой

(«разнообразием») самой управляемой системы и строго формально определяется с использованием доказанных нами основной леммы и теоремы о реализации. Таким образом, «закон» обратной связи обусловлен необходимостью реализации свойства управляемости системы там, где оно необходимо.

В этой связи в качестве положительного момента, выявленного в работе [79], отметим акцент на работы (далее цитата по стр. 80) «выдающегося инженера и ученого Г.В. Щипанова, который выдвинул принцип *идеального* регулирования и *идеального* регулятора обратной связи». По сути идеи этого ученого в 1939 г. были близки к идее Р. Калмана, высказанной в форме принципа единственности в конце 50-х, начале 60-х годов 20-го века. Фактически именно эти идеи мы и развиваем в нашей книге. Полученные нами здесь и ранее в работах [20, 21, 37] «изоморфные регуляторы» как раз и являются теми идеальными регуляторами, которые стремились получить многие ученые и, в частности, выдвинувший мысль о них Г.В. Щипанов. В целом работа [79] отличается тем, что в ней в полный рост поставлена и обоснована проблема разработки фундаментальной теории управления, в основе которой должен лежать современный мощный математический аппарат алгебры, «алгебраической геометрии и геометрической алгебры», которые, как указали авторы «сращиваются и переплетаются».

Более подробный анализ других работ заслуживает отдельной публикации.

14.2. Заключение

В Части I книги обоснована новая формулировка принципа единственности в форме общего принципа изоморфизма в теории систем и дана его строгая формально-математическая интерпретация в весьма общей алгебраической постановке, что позволило сформулировать и доказать основную (фундаментальную) для разрабатываемой теории лемму и теорему о реализации.

На основе леммы сформирована новая научная парадигма, в рамках которой осуществлена общая алгебраическая формализация всех базовых понятий, «принципов» и «постулатов» теории систем, а также даны формулировки основных свойств систем общего вида с точностью до изоморфизмов-моделей рассматриваемых объектов и получены критерии реализуемости этих свойств. Предложенные критерии свойств, характеризующих систему с точностью до некоторой изоморфной модели, обобщают известные критерии, рассматривавшиеся ранее лишь применительно к линейным системам (например, критерии наблюдаемости и управляемости в формулировке Р. Калмана), то есть позволяют работать с «изоморфными системами» достаточно общего вида как с линейными

системами. Для линейных систем получены частные случаи новых критериев, но в наиболее общей алгебраической форме.

Выведены формальные критерии комплексируемости систем наблюдения (наблюдателей) и управления (регуляторов) в интегрированные информационно-управляющие системы-комплексы. Получены доказательства теоремы разделения для линейных и нелинейных систем весьма общего вида, позволившие в наиболее общей форме определить условия разделения общей задачи синтеза интегрированной информационно-управляющей системы для управления объектом на суперпозицию раздельных задач синтеза наблюдателя и регулятора, а также определить условия разрешимости задачи дуального управления и, в целом, в весьма общем виде сформулировать и доказать фундаментальный принцип суперпозиции. Формально строго проанализированы свойства интегрированных систем.

Вообще основные результаты теоретических разработок в рамках общего принципа изоморфизма, как показал предварительный анализ, имеют непосредственное влияние на развитие прикладных теорий и технологий системного анализа и проектирования динамических систем и, в целом, искусственных целенаправленных систем. Более подробно некоторые примеры приложений разработанной теории к таким системам изложены во второй части книги.

Исходя из общего принципа изоморфизма и опирающихся на него теорем и следствий предложен новый подход к построению информационных систем на примере систем сжатия-восстановления информации с использованием так называемых «необыкновенных» изоморфизмов, возникающих естественным образом при решении ряда прикладных задач. Применительно к указанным системам сформулированы и доказаны утверждения («законы»), которые на самом деле имеют гораздо более широкое, общесистемное значение. В этом смысле намечены основные направления трансфера полученных результатов в теорию систем в большом, в том числе в теорию систем естественного происхождения применительно к интерпретации фактов и общепринятых моделей естественных систем с точки зрения общего принципа изоморфизма. Представляется, что полученные результаты могут использоваться для формирования новых гипотез и моделей возникновения и эволюции систем природы, а также могут влиять на направления развития естественных наук.

В целом, на основе *общего принципа изоморфизма сформирован научный подход, позволивший, исходя из этого единого и единственного принципа, по-новому переосмыслить фундаментальные понятия теории систем и в наиболее общем виде представить формализованные описания всех наиболее важных для*

практики и теории свойств систем безотносительно их природы. В рамках предлагаемой парадигмы, опирающейся на весьма простую аксиоматику, разработана совокупность новых универсальных методов и технологий, пригодных для исследования как абстрактных систем в математике, так и для решения прикладных задач теории систем в технике, физике, биологии и других областях знаний.

В этом смысле введённый общий принцип изоморфизма весьма универсален и позволяет проводить фундаментальный анализ свойств не только какой-либо одной системы, для которой удалось построить изоморфную модель, но и анализ свойств множества других систем разной физической природы, формы математических моделей которых совпадают, то есть класса систем, изоморфных с точностью до модели. На наличие такого сходства форм математических моделей разных по природе объектов многократно указывалось в физико-математической, технической и философской литературе. В связи с этим можно утверждать, что общий принцип изоморфизма верифицирован объективной реальностью.

В конце первой части книги отметим, что автор относится к полученным результатам с твердой уверенностью в их правильности с точки зрения формально-математической строгости, так как результаты подвергались многочисленным проверкам как собственно автором, так и независимыми рецензентами, но с определенной долей самоиронии и даже скептицизма (неужели все устроено так просто и однообразно?): слишком уж гармоничной, простой и изящной является формула-композиция $f=hg$, где f – обыкновенный изоморфизм, отвечающая основной лемме теории и теореме о реализации, позволяющая гарантированно реализовать цели разрабатываемых систем искусственного происхождения, а также вскрывающая цели, причины и внутренние механизмы возникновения и эволюции естественных систем различных масштабов и природы. Вместе с тем, почему бы и нет: по крайней мере внутри развиваемой теоретической парадигмы в теории систем формула является универсальным «золотым ключиком», позволяющим открывать многие «двери» в естественно-научных дисциплинах и строить модели, с одной стороны, дающие новые объяснения известным явлениям и фактам, относящимся к разным областям объективной реальности, не противоречащие другим верифицированным теориям, но с позиций единой научно-методологической основы и, с другой стороны, позволяющие строить новые научно-обоснованные прогнозы (гипотезы) о явлениях, которые могут потребовать проверки и экспериментального подтверждения.

Применительно к техническим «кибернетическим системам» созданная теория во многих аспектах проверена путем разработки на ее основе и апробации

ряда технологий, позволяющих создавать эффективные информационно-управляющие системы для динамических объектов и их компоненты, что и демонстрируется во второй части книги.

Приложение к части 1

Доказательство основной леммы

Д о к а з а т е л ь с т в о №1. Опирается на вспомогательные коммутативные диаграммы (рис. П.1*а* и П.1*б*), полученные из исходной диаграммы (см. рис. 2.1 в главе 2) с учетом изоморфности отображения *f*.

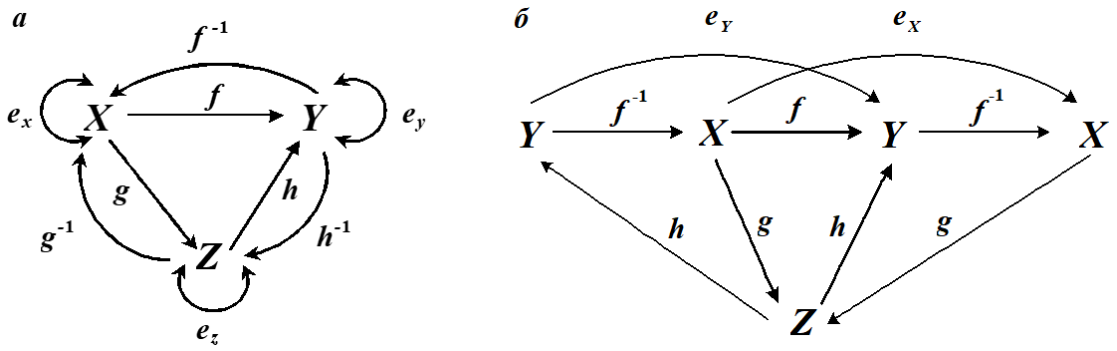


Рис. П.1. Вспомогательные коммутативные диаграммы

Из рис. П.1*б* следует

$h=e_Y h=f f^{-1}h=\langle f=hg\rangle=hgf^{-1}h=h(g f^{-1}h)=he_Z,\ \ h=e_Y h=he_Z$.

Таким образом, h – изоморфизм в рассматриваемой коммутативной диаграмме. По индукции g – изоморфизм в коммутативной диаграмме.

Д о к а з а т е л ь с т в о №2 . В силу изоморфности f, $f\Rightarrow f^{-1}=(hg)^{-1}$.

Если существует g^{-1}, то $g^{-1}=f^{-1}h$. Аналогично $h^{-1}=g f^{-1}$. Тогда $g^{-1}h^{-1}=$ $=(f^{-1}h)(g f^{-1})=f^{-1}(hg)f^{-1}=f^{-1}$. Таким образом, $f^{-1}=(h g)^{-1}=g^{-1}h^{-1}$. По условию основной леммы отображение f^{-1} единственно. Следовательно, каждое из отображений h и g является изоморфизмом в рассматриваемой коммутативной диаграмме.

Так как в рамках основной леммы для композиции изоморфного отображения $f = hg$ изоморфность h и g обеспечивается с точностью до изоморфности f, возникает вопрос: единственна ли композиция $f^{-1}=g^{-1}h^{-1}$, точнее – единственны ли g^{-1} и h^{-1}, удовлетворяющие указанной композиции, и не найдется ли другая пара отображений $(g^*)^{-1}$ и $(h^*)^{-1}$, обратных к отображениям g и h, такая, что будет выполняться равенство $f^{-1}=(g^*)^{-1}(h^*)^{-1}$. Ответ дает следующая дополняющая теорема.

Т е о р е м а. Если $f{:}X\to Y$ - изоморфизм, то отображения h и g, удовлетворяющие композиции $f = hg$ и являющиеся *изоморфизмами с точностью до изоморфизма* f, имеют единственные обратные h^{-1} и g^{-1}, удовлетворяющие композиции $f^{-1}=g^{-1}h^{-1}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фактически нужно доказать единственность отображения e_z на Z. В силу коммутативности исходной диаграммы (рис. П.1*а*), должны одновременно выполняться условия (рис. П.1*б*) $e_x=f^{-1}f$, $e_y=ff^{-1}$,$e_x=g^{-1}g$, $e_y=hh^{-1}$, $f^{-1}=e_xf^{-1}$, $f^{-1}=f^{-1}e_y$. Отображения e_x и e_y единственны, так как единственно отображение f^{-1}. Последние два равенства следуют из вспомогательных коммутативных диаграмм, представленных на рис. П.2 и П.3. Кроме того, из диаграмм, приведенных на рис. П.4-П.7, следуют равенства $h^{-1}=e_zh^{-1}$, $h^{-1}=h^{-1}e_y$, $g^{-1}=g^{-1}e_z$, $g^{-1}=e_xg^{-1}$.

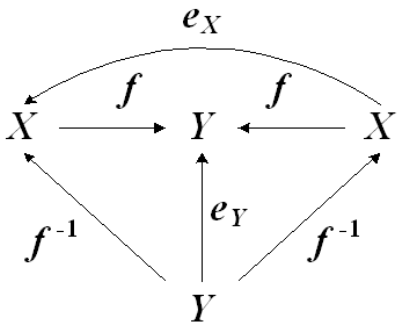


Рис. П.2.

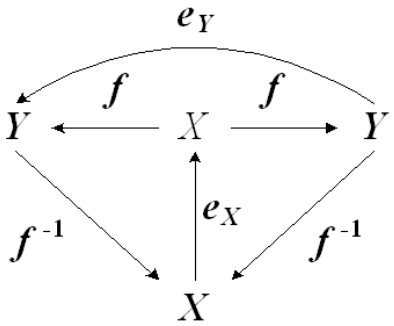


Рис. П.3.

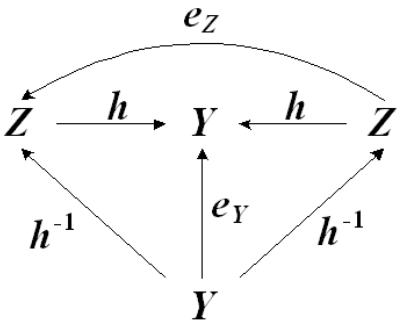


Рис. П.4.

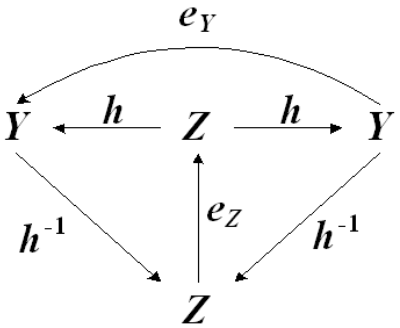


Рис. П.5.

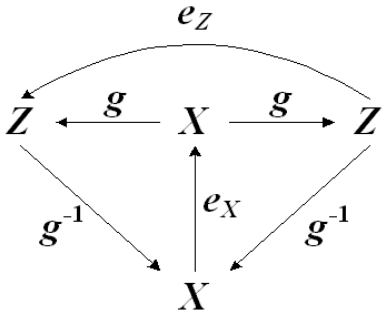


Рис. П.6.

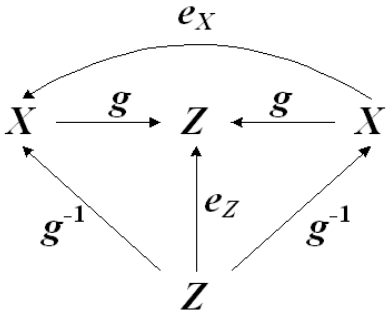


Рис. П.7.

Из диаграммы, показанной на рис. П.1*б*, можно также получить равенства

$f^{-1}=g^{-1}h^{-1}$, $e_z=gg^{-1}$, $e_z=h^{-1}h$.

Пусть существуют $(g^*)^{-1}$ и $(h^*)^{-1}$ такие, что

$e_z \neq e_z^*=g(g^*)^{-1}$, $(g^*)^{-1}=(g^*)^{-1}e_z^*$, $(g^*)^{-1}=e_x(g^*)^{-1}$,

$e_z^* = (h^*)^{-1}h$, $(h^*)^{-1}= e_z^* (h^*)^{-1}$, $(h^*)^{-1}= (h^*)^{-1}e_y$.

Тогда одновременно должны выполняться равенства

$e_x=(g^*)^{-1}g=g^{-1}g$, $e_y=h(h^*)^{-1}=h\, h^{-1}$,

$f^{-1}=(g^*)^{-1}(h^*)^{-1}$, $Z=(h^*)^{-1}Y$, $X=(g^*)^{-1}Z$.

Отсюда

$e_z^*=g(g^*)^{-1}= \langle (g^*)^{-1}=e_x(g^*)^{-1} \rangle =g\, e_x(g^*)^{-1}=\langle e_x=f^{-1}f \rangle =gf^{-1}f\,(g^*)^{-1}=$

$= \langle h^{-1}=gf^{-1} \rangle =h^{-1}(f\,(g^*)^{-1})= \langle h=f\,(g^*)^{-1} \rangle =h^{-1}h=e_z$.

Таким образом, $e_z^*=e_z$. Аналогично

$e_z^*=(h^*)^{-1}h= \langle (h^*)^{-1}=(h^*)^{-1}e_y \rangle =(h^*)^{-1}e_yh= \langle e_y = f f^{-1} \rangle =$

$=(h^*)^{-1}f f^{-1}h= \langle g^{-1}=f^{-1}\, h \rangle =(h^*)^{-1}f\, g^{-1}= \langle g=(h^*)^{-1}f \rangle =gg^{-1}=e_z$.

Таким образом, единственность отображения e_z доказана. Следовательно, все пункты доказательства основной леммы выполнены.

Д о к а з а т е л ь с т в о №3. Опирается на коммутативные диаграммы, представленные на рис. П.1, и на следующее вспомогательное утверждение (лемму).

Л е м м а. Если отображение $f:X\to Y$ – биективно и существуют отображения $g:X\to Z$ и $h: Z\to Y$, такие, что выполняется композиция $f=hg$, то g – инъективно, h – сюръективно.

Похожее утверждение доказано в [15] для случая, когда $f: X\to X$ и f - биективное, но единичное отображение. Оказывается, это утверждение справедливо и в более общем случае, когда $f: X\to Y$ – биективно, но не является единичным отображением.

Действительно, из условия леммы следует, что для любых $x, x'\in X$, *таких, что* $x\neq x' \Rightarrow y=f(x)\neq f(x')=y'$ и $x=f^{-1}(y)\neq f^{-1}(y')=x'$. Пусть для этих $x, x'\in X$ выполняется равенство $g(x)=g(x')$, т. е. $z=z'$. Тогда $y=f(x)=hg(x)=h(g(x))=h(g\ (x'))=$ $=hg(x')=f(x')=y'\Rightarrow y= y'$, но тогда $hg=f$ – не биективно, что противоречит условию. Следовательно, g – инъективно. Далее, для любого $x\in X \Rightarrow$ $y=f(x)=hg(x)=h(g(x))$, а это говорит о том, что любой $y\in Y$ является результатом действия отображения h, так как $y=h(g(x))$, т. е. образ $Imh=Y$ и h – сюръективно. Таким образом, лемма доказана.

Возвращаясь к доказательству основной теоремы, теперь покажем, что h – инъективно *с точностью до биективности f, то есть внутри коммутативной диаграммы.* Будем рассматривать любые $z\in Z$, такие, что $z\in Img=Z'\subset Z$. Существование $Img=Z'\subset Z$ обеспечивается в силу инъективности g и сюръективности

h. Рассмотрим любые $z, z' \in Img = Z' \subset Z$, *такие, что* $z \neq z'$. Тогда в силу инъективности g для этих элементов существуют прообразы $x, x' \in X$ такие, что $x \neq x' \Rightarrow z = g(x) \neq z' = g(x')$. Пусть $h(z) = h(z') \Rightarrow h(g(x)) = h(g(x')) = hg(x) = hg(x') \Rightarrow f(x) = f(x')$. Но тогда $y = y'$, т. е. f - не биективно, что противоречит условию. Значит h – инъективно с точностью до биективности f, инъективно внутри коммутативной диаграммы.

Из доказанной ранее сюръективности h (см. лемму) и показанной здесь инъективности h с точностью до биективности f, по сути, следует существование в h биективного с точностью до биективности f сужения $h' \in h$, удовлетворяющего условиям основной теоремы. Биективность g с точностью до биективности f следует непосредственно из доказанной инъективности g. Таким образом, теорема доказана. *Отсюда следует, что возможное наличие в Z любого количества элементов, не принадлежащих образу* $Img = Z' \subset Z$, *не влияет на удовлетворение отображениями g и h условиям теоремы*.

Таким образом, в замкнутой композиции отображений $f = hg$, где f – биективное (изоморфное) в обычном смысле (вне коммутативной диаграммы) отображение, отображения h и g также становятся биективными (изоморфными) с точностью до биективности (изоморфности) отображения f, даже если вне коммутативной диаграммы отображения h и g не являются биективными (изоморфными) в обычном смысле. Необходимым и достаточным условием биективности (изоморфности) отображений h и g служит условие изоморфности в обычном смысле отображения f, замыкающего композицию отображений $f = hg$, то есть коммутативность диаграммы.

Следует иметь в виду, что, вообще говоря, *основная теорема доказана для более общего случая*: отображение f в композиции $f = hg$ не обязательно должно быть *обыкновенным изоморфным отображением* – изоморфизмом в обычном смысле (вне коммутативной диаграммы). Если оно изоморфно (имеет обратное) лишь в коммутативной диаграмме и имеет место композиция $f = hg$, то условия теоремы также удовлетворяются. Проиллюстрируем это на примере рис. П.8, где матрицы имеют следующую структуру:

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ ba^{-1} & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 1 \\ ba^{-1} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "G"'] & & Y \\ & Z \arrow[ur, "H"'] & \end{tikzcd}$$

Рис. П.8. Коммутативная диаграмма для матриц

Причем в соответствии с условиями основной теоремы выполняется композиция $F = HG$. Можно убедиться, что внутри коммутативной диаграммы существует обратная (в алгебраическом смысле [15]) матрица

$$F^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ ba^{-1} & 0 \end{bmatrix},$$

для которой выполняются равенства

$$FF^{-1} = F^{-1}F = FF = F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ ba^{-1} & 0 \end{bmatrix},$$

то есть F – изоморфизм. Из соотношений

$$I_X^{\text{лев}} = G^{-1}G,\ I_Y^{\text{прав}} = HH^{-1},\ I_X^{\text{прав}} = F^{-1}F,\ I_Y^{\text{лев}} = FF^{-1},$$

$$I_Y^{\text{лев}} = I_Y^{\text{прав}} = I_X^{\text{лев}} = I_X^{\text{прав}} = F,$$

$$I_Z^{\text{лев}} = GG^{-1},\ I_Z^{\text{прав}} = H^{-1}H,\ I_Z^{\text{лев}} = I_Z^{\text{прав}} = I_Z,\ I_Z I_Z = I_Z,$$

выполнение которых необходимо для удовлетворения условий теоремы, можно найти обратные матрицы:

$$G^{-1} = \begin{bmatrix} 1 \\ ba^{-1} \end{bmatrix},\ H^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Здесь $I_X^{\text{лев}}$, $I_X^{\text{прав}}$, $I_Y^{\text{лев}}$, $I_Y^{\text{прав}}$, $I_Z^{\text{лев}}$, $I_Z^{\text{прав}}$- соответственно левое и правое отображения-единицы (или просто единицы) на множествах X, Y и Z. Для обратных G^{-1} и H^{-1} приведенные выше соотношения выполняются, причем $I_Z^{\text{лев}} = I_Z^{\text{прав}} = I_Z = 1$ и $I_Z I_Z = I_Z = 1$, т. е. обратные G^{-1} и H^{-1} являются изоморфизмами с точностью до изоморфизма F. Таким образом, все условия основной теоремы выполняются. При этом изоморфизм F имеет особенность, заключающуюся в том, что его структура зависит от структуры отображаемых матриц X, Y и он является изоморфизмом лишь внутри коммутативной диаграммы. Действительно, вполне очевидно, что определитель матрицы F равен нулю и она не имеет обратной в обычном смысле – вне коммутативной диаграммы. Тем не менее, условия теоремы выполняются и в этом более общем случае. Изоморфизм F будем называть *необыкновенным*.

Литература к Части 1:

1. *Калман Р.Е.* Идентификация систем с шумами // УМН. 1985. Т. 40. Вып.4 (244). С. 27-41.
2. *Калман Р., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971.
3. *Бир С.* Кибернетика и управление производством. М.: Изд-во иностр. лит., 1965.
4. *Буков В.Н., Кулабухов В.С., Максименко И.М., Рябченко В.Н.* Проблема единственности решения задач теории систем // АиТ. 1997. №12. С. 4-17.
5. *Буков В.Н., Максименко И.М.* Гарантированный контроль или конфирмация систем // Изв. РАН. Т и СУ. 1998. №2. С. 5-23.
6. *Кулабухов В.С.* Алгебраические аспекты некоторых свойств сложных систем // В сборнике научно-методических материалов: Управление техническим состоянием авиационного оборудования. М.: Изд. ВВИА им. Н.Е.Жуковского, 1998. С. 107-118.
7. *Буков В.Н., Кулабухов В.С., Максименко И.М., Рябченко В.Н.* Вложение систем // АиТ. 1999. №8. С. 61-73.
8. *Буков В.Н.* Вложение систем. Аналитический подход к анализу и синтезу матричных систем. Калуга: Изд-во научн. литературы Н.Ф. Бочкаревой, 2006. 720с.
9. *Буков В.Н.* Что такое и для чего технология вложения систем // 1-я Российская мультиконференция по проблемам управления. Мехатроника, автоматизация, управление. СПб.: Изд. ГНЦ РФ ЦНИИ «Электроприбор», 2006. С. 8-11.
10. *Кулабухов В.С.* Функционально-структурный подход к формированию облика и архитектур базовых эргатических интегрированных бортовых комплексов ЛА // Тез. докл. Научных чтений, посвященных творческому наследию Н.Е. Жуковского (к 150-летию со дня рождения). М., 1997.
11. *Кулабухов В.С.* Принцип изоморфности в теории систем // Международная конференция по проблемам управления (29 июня-2июля 1999г.). Тезисы докладов в 3-х томах. Том 1. ИПУ РАН. Москва. 1999г.
12. *Кулабухов В.С.* Принцип изоморфности в задаче реализации и его приложения к анализу свойств систем управления // XII Всероссийск. совещ. по проблемам управления ВСПУ-2014. Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2014. С. 438-448.
13. *Кулабухов В.С.* Теория реализации и ее приложения к моделированию систем // Моделирование авиационных систем. Матер. Всероссийской научно-практической конф. М.: Изд. ГНЦ РФ ФГУП ГосНИИАС, 2013. С. 13-14.
14. *Месарович М., Такахара Я.* Общая теория систем: математические основы. М.: Мир, 1978.

15. *Кострикин А.И.* Введение в алгебру. Основы алгебры. М.: Физматлит, 1994.
16. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит, 2004.
17. *Уонэм М.* Линейные многомерные системы управления: Геометрический подход. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980. 376 с.
18. *Филимонов Н.Б.* Методологический кризис «всепобеждающей математизации» современной теории управления // Мехатроника, автоматизация, управление. 2016. Т. 17. №5. С. 291-300.
19. *Красовский А. А.* Проблемы физической теории управления // АиТ. 1990. №11. С. 3-28.
20. *Кулабухов В.С.* Синтез регуляторов для следящих систем на основе принципа изоморфности // Мехатроника, автоматизация, управление. 2017. Том 18, №8. С. 507-515.
21. *Kulabukhov V.* Linear Isomorphic Regulators // CMTAI2016. MATEC Web of Conf. 2017. Т. 99. С. 03008. (doi:10.1051/matecconf/20179903008)
22. *Жилин Д.М.* Теория систем: опыт построения курса. - Изд. 2-е, испр. М.: Едиториал УРСС, 2004. 184 с.
23. *Волкова В.Н., Денисов А.А.* Основы теории систем и системного анализа. Изд. 2-е, перераб. и дополн. СПб.: Издательство СПбГТУ, 1999. 512 с.
24. *Артюхов В.В* Общая теория систем: Самоорганизация, устойчивость, разнообразие, кризисы. Изд. 2-е. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. 224 с.
25. *Урманцев Ю.А.* Общая теория систем: состояние, приложения и переспективы развития // Система, симметрия, гармония. М.: Мысль, 1988.
26. *Норберт Винер* Кибернетика или управление и связь в животном и машине. Второе издание. М.: Советское радио, 1968. 328 с.
27. *Аристотель* Этика. Эстетика. Поэтика. Минск: Харвест, 2011. 1280 с.
28. *Атанс М., Фалб П.* Оптимальное управление. М.: Машиностроение, 1968.
29. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А.А.Красовского. М.: Наука, 1987.
30. *Абгарян К.А.* Матричное исчисление с приложениями в теории динамических систем. Учеб. Пособие: Для вузов. М.: Физматлит, 1994. 544 с.
31. *Пантелеев А.В., Якимова А.С., Босов А.В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения в примерах и задачах: Учеб. пособие. М.: Высш. шк., 2001. 376 с.
32. *Беллман Р.* Процессы регулирования с адаптацией. М.: Наука, 1964. 360 с.
33. *Александров И.А.* Операционное исчисление и его применения: учеб. пособие. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2013. 144 с.
34. *Кулабухов В.С.* Синтез линейных изоморфных наблюдателей // Материалы XIV Всероссийской научно-технической конференции «Научные чтения по

авиации, посвященные памяти Н.Е. Жуковского» [текст]. Сборник докладов. М.: Издательский дом Академии им. Н.Е. Жуковского, 2017. С. 271-279.

35. *Кулабухов В.С.* Изоморфные наблюдатели состояния и робастная фильтрация сигналов систем // Радиотехника. 2017. №8. С. 50-55.
36. *Кулабухов В.С.* Синтез изоморфных наблюдателей состояния систем // Материалы IV научно-практической конференции памяти О.В. Успенского [текст] / Сборник докладов. М.: Издательский дом Академии им. Н.Е. Жуковского, 2017. С. 28-36.
37. *Кулабухов В.С., Булгаков В.В.* Сравнительные исследования некоторых алгебраических методов формализованного синтеза регуляторов для следящих систем // Приборы. 2017. №12. С. 13-19.
38. *Kulabukhov V.S.* Isomorphic observers of the linear systems state // Workshop on Materials and Engineering in Aeronautics (MEA2017) 15–16 November 2017, Moscow, Russian Federation. doi:10.1088/1757-899X/312/1/012016. p. 012016.
39. *Рябенко В.* Принцип двойственности [Электронный ресурс] URL: http://magref.ru/printsip-dvoystvennosti/ — 2014. (дата доступа - 25.08.2017 г.)
40. *Калман Р.* Об общей теории систем управления. Труды 1 Конгресса ИФАК. М.: Изд. АН СССР, т. 2. 1961. С. 521–547. [Kalman R.E. On the General Theory of Control System //Proc. of 1st IFAC Congress, Moskow, 1960.]
41. *Чернодаров А.В.* Контроль, диагностика и идентификация авиационных приборов и измерительно-вычислительных комплексов. М.: ООО «Научтехлитиздат», 2017. 300 с.
42. *Кулабухов В.С.* Алгебраическая формализация процедур анализа и синтеза сложных интегрированных систем // 6-я Международная конференция “Авиация и космонавтика – 2007”. 1-4 октября 2007г. Москва. Тезисы докладов. М.: Изд-во МАИ, 2007.
43. *Буков В.Н., Кулабухов В.С., Косьянчук В.В., Рябченко В.Н., Горюнов С.В., Наумов А.И.* Основы интеграции систем авиационного оборудования. Учебное пособие. М.: Изд. ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского, 2007. 338с.
44. *Фельдбаум А.А.* Основы теории оптимальных автоматических систем. М.-Л.: Физматгиз, 1963. 552 с.
45. Принцип суперпозиции // ВикепедиЯ: Сбободная энциклопедия [Электронный ресурс] URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%B8%D0%BD%D1%86%D0%B8%D0%BF_%D1%81%D1%83%D0%BF%D0%B5%D1%80%D0%BF%D0%BE%D0%B7%D0%B8%D1%86%D0%B8%D0%B8 (дата доступа - 25.10.2022 г.)
46. Аддитивность // ВикепедиЯ: Сбободная энциклопедия [Электронный ресурс] URL:

https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%B4%D0%B4%D0%B8%D1%82%D0%B8%D0%B2%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C (дата доступа - 25.08.2017 г.)

47. *Заде Л., Дезоер Ч.* Теория линейных систем. Метод пространства состояний. М.: Наука, 1970. 704 с.
48. *Андреев А.Ю.* Управление конечномерными линейными объектами. М.: Наука, 1976. 424 с.
49. *Первозванский А.А.* Курс теории автоматического управления. М.: Наука, 1986.
50. *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977.
51. *Мирошник И.В.* Теория автоматического управления. Линейные системы. СПб.: Питер, 2005. 336 с.
52. *Sain M.K.* The Growing Algebraic Presence in Systems Engineering: An Introduction // Proceedings IEEE, Volume 64, Number 1, January 1976.
53. *Bukov V.N., Kulabukhov V.S., Maksimenko I.M., Ryabchenko V.N.* Uniqueness of a solution of the systems theory problems and functional integration // St.Petersburg, Russia, Proc. Of IFAC Conference on Informatics and Control, v.2, 9-13 June 1997.
54. *Кулабухов В.С.* Некоторые результаты теории интеграции бортового оборудования аэрокосмических эргатических систем // Третий Международный аэрокосмический конгресс. IAC'–2000: сборник тезисов, (Москва, 23–27 августа 2000 г.). М., 2000.
55. *Кулабухов В.С.* Некоторые результаты алгебраической теории телеоцентрического системного проектирования аэрокосмических эргатических комплексов // Системный анализ и управление аэрокосмическими комплексами. 6-я международная конф.: тезисы докладов (Евпатория, 02.07–08.07.2001 г.).
56. *Кулабухов В.С.* Федеративно-интегрированная распределенная модульная авионика // Авиакосмическое приборостроение. 2015. № 12. С. 11–31.
57. *Кулабухов В.С.* Технологии системной интеграции комплексных систем управления полетом перспективных летательных аппаратов // Авиационные системы в XXI веке. Юбилейная Всероссийская научно-техн. конф. сб. тезисов докладов. (Москва, 26–27 мая 2016 г.) М. : ФГУП «ГосНИИАС», 2016.
58. *Кулабухов В.С.* Алгебраическая формализация телеоцентрического подхода к системному проектированию // Научные чтения по авиации, посвященные памяти Н. Е. Жуковского: мат. XV Всероссийской научно-технической конф. М.: Изд. дом Академии им. Н. Е. Жуковского, 2018. С. 279–287.

59. *Кулабухов В.С.* Вариант формализации системного анализа и синтеза структур авионики и систем управления полетом // Тезисы докладов 9 Международного Аэрокосмического Конгресса IAC'18. Москва, 28–31 августа 2018 г. М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, 2018. С. 12860.
60. *Kulabukhov V.* Algebraic Formalization of System Design Based on a Purposeful Approach // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 476 (2019) 012017. doi:10.1088/1757-899X/476/1/012017
61. *Vladimir S. Kulabukhov* A General Principle of Isomorphism: Determining Inverses // Symmetry 2019, 11, 1301; doi:10.3390/sym11101301.
62. *Кулабухов В.С.* Общий принцип изоморфизма в теории систем // Cloud of Science. 2018. Т.5. №3. С. 400-472.
63. *Мальцев А.И.* Алгебраические системы. М.: Наука, 1970. 392 с.
64. *Артамонов В.А.* Введение в высшую алгебру и аналитическую геометрию. М.: Факториал Пресс, 2007. 128 с.
65. *Курош А.Г.* Общая алгебра. М.: Наука, 1974.
66. *Богданов А.А.* Тектология: Всеобщая организационная наука. М.: «Финансы», 2003, 287 с.
67. *Ludwig von Bertalanffy* The Theory of Open Systems in Physics and Biology// Science 13 January 1950 111: 23-29 [DOI: 10.1126/science.111.2872.23] (in Articles).
68. *Берталанфи Л. фон* Общая теория систем: основы, развитие, приложения. Нью-Йорк: Джордж Бразиллер. 1968. (von Bertalanffy, Ludwig. 1968. General System Theory: Foundations, Development, Applications New York: George Braziller)
69. *Берталанфи Л. фон* Общая теория систем — критический обзор. В кн.: Исследования по общей теории систем. Сборник переводов. М.: «Прогресс», 1969.
70. *Берталанфи Л. фон* Общая теория систем — обзор проблем и результатов. // Системные исследования. Ежегодник. М.: «Наука», 1969. 203с.
71. *Рапопорт А.* Принцип математического изоморфизма в общей теории систем // Системные исследования. Ежегодник. М.: «Наука», 1973. С.158-172.
72. *Уемов А.И.* Методы построения и развития общей теории систем // Системные исследования. Ежегодник. М.: «Наука», 1973. С.147-157.
73. *Эшби У.Р.* Введение в кибернетику. М.: Иностранная литература, 1959. (Ashby W. R. Introduction to Cybernetics. — Chapman & Hall, 1956.)
74. *URL*: https://deep-econom.livejournal.com/289113.html (дата доступа - 02.12.2022 г.)
75. *URL*: http://vphil.ru/index.php?id=37&option=com_content&task=view (дата доступа - 02.12.2022 г.)

76. *URL*: https://www.myuniver-city.ru/%D0%A2%D0%B5%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%8F_%D0%BE%D1%80%D0%B3%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%B7%D0%B0%D1%86%D0%B8%D0%B8/%D0%9E%D0%B1%D1%89%D0%B0%D1%8F_%D1%82%D0%B5%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%8F_%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC_%D0%BE%D1%81%D0%BD%D0%BE%D0%B2%D0%BD%D1%8B%D0%B5_%D0%BF%D0%BE%D0%BB%D0%BE%D0%B6%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F_%D0%9B%D0%A4%D0%BE%D0%BD/53830_1303420_%D1%81%D1%82%D1%80%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D1%86%D0%B01.html (дата доступа - 02.12.2022 г.)
77. *Кирсанов К.А.* Теория изменений: от общих понятий к принципу изоморфизма // Интернет-журнал «Науковедение» №1, 2012, С. 1-18.
78. *Пугач В.Н.* Интеллектуальные системы: от принципа изоморфизма к меметическим представлениям // Интернет-журнал «Науковедение» №1, 2011.
79. *Бабичев А.В., Бутковский А.Г., Похьолайнен Сеппо* К единой геометрической теории управления. М.: Наука. 2001. 352 с.
80. *Острейковский В.А.* Теория систем. М.: Высш. шк., 1997. 240 с.
81. *Эшби У.Р.* Конструкция мозга: происхождение адаптивного поведения. М.: Иностранная литература, 1962. 398 с.
82. *Гротендик А.* О некоторых вопросах гомологической алгебры. М.: ИЛ, 1961.
83. *Родин А. В.* Теория категорий и поиски новых математических оснований физики // Вопросы философии. 2010. № 7. С. 67-81.

Часть 2

Технологии системного анализа, обработки информации, синтеза управлений и системного проектирования в авионике на основе общего принципа изоморфизма

В первой части книги, отталкиваясь от фундаментального принципа единственности в задаче идентификации (реализации, моделирования) систем с шумами [1], предложена новая аксиоматика для алгебраической теории систем, опирающаяся на введенный нами общий принцип изоморфизма. На основе указанного принципа были сформулированы и доказаны основная лемма и теорема о реализации изоморфизма композицией отображений, позволившие по-новому подойти к постановке и решению многих классических задач теории систем.

Как отмечено в докладе [2], согласно Б. Мандельброту, автору термина «фрактал», основная парадигма современной науки заключается «. . . в переходе от мышления в терминах структуры к мышлению в терминах процесса. . . В новой парадигме процесс мыслится как первичная категория, и любая структура, которую мы наблюдаем, есть проявление лежащего в ее основе процесса». В связи с этим, как считают авторы [2], в математике наблюдается переход от анализа структур к анализу процессов. Применительно к математической теории систем с этим тезисом вряд ли можно согласиться, наблюдая бурное развитие приложений алгебры к задачам этой теории.

На наш взгляд между структурами и процессами, моделирующими один и тот же объект, имеется изоморфизм. Это соответствует и принципу единственности Р. Калмана [1], анализ которого проведен в первой части книги. Там же с позиций общего принципа изоморфизма нами приведены обоснования эквивалентности, то есть изоморфизма алгебраического описания моделей динамических объектов в форме операторных уравнений, характеризующих их некоторую «статичную» структуру, и описания моделей этих же объектов в форме дифференциальных уравнений, характеризующих соответствующие «процессы динамики». Использование той или иной формы описания определяется исследователем с учетом удобства манипулирования соответствующими уравнениями в конкретных проблемных областях. Часто более предпочтительным для первоначального анализа оказывается алгебраическое, операторное, структурное описание, а уже затем осуществляется переход к описанию процессов и их моделированию.

Во второй части книги рассматриваются прикладные аспекты алгебраической теории систем, разработанной в первой части книги на основе общего принципа изоморфизма, *применительно* к системам различного назначения, разрабатываемым человеком для удовлетворения своих нужд, то есть *к искусственным системам*. Обширный класс таких систем образуют *динамические системы* - такие системы, состояние которых быстро изменяется с течением времени. Особенно это относится к бортовым системам, применяемым на летательных аппаратах различных классов и назначения в составе их бортовой авионики (авиационной электроники).

С учетом особенностей формализации указанной теории более рациональным оказалось именно алгебраическое, структурное описание рассматриваемых постановок различных задач и процедур их решения. В необходимых случаях в дальнейшем осуществляется переход к описанию полученных решений в форме уравнений, отражающих протекание соответствующих процессов. Такой подход используется, например, при синтезе изоморфных регуляторов и изоморфных наблюдателей для динамических систем. В других случаях алгебраическое, структурное описание оказывается вполне адекватным решаемой задаче и используется как окончательное. Это относится, например, к задачам анализа и синтеза структур сложных систем.

Ниже приводятся теоретические методы и прикладные технологии решения различных задач системного анализа, проектирования, обработки информации и синтеза управлений с примерами приложений в области авионики летательных аппаратов. Общей для всех рассматриваемых задач является единая системно-методологическая и формально-математическая основа их решения, в качестве которой служит общий принцип изоморфизма и разработанная с использованием соответствующей новой аксиоматики алгебраическая теория систем.

В первом разделе этой части книги рассматриваются прикладные технологии применения общего принципа изоморфизма в динамических системах.

Второй раздел посвящен изложению теории и прикладных аспектов применения общего принципа изоморфизма в задачах системного анализа и системного проектирования сложных систем авионики.

Раздел 1

Технологии применения общего принципа изоморфизма в динамических системах

Глава 1

Задача о регуляторе

Рассматривается метод и прикладная технология синтеза регуляторов нового типа - *изоморфных регуляторов*. Научно *обоснована необходимость обратной связи в форме изоморфного регулятора для реализации цели управления объектом и получена его структура* для объектов весьма общего вида. Показано, что изоморфные регуляторы обладают свойством «предельности» как по уровню общности доказанных утверждений об управляемости для систем общего вида, так и по уровню достижимого качества переходных процессов. Приведены примеры синтеза изоморфных регуляторов для линейных объектов классов «один вход – один выход» (SISO – Single Input Single Output) и «много входов – много выходов» (MIMO – Miltiple Input Multiple Output). Обоснованы преимущества изоморфных регуляторов по сравнению с регуляторами других, ранее известных типов. Материал главы в части теории опирается на 5-ю главу 1-й части книги, в прикладной части - на результаты, изложенные в статье [3], а также в других статьях автора, ссылки на которые будут даваться по мере необходимости.

1.1. Задача синтеза регулятора с точностью до изоморфизма. Вводные замечания

В главе 5 первой части книги на основе общего принципа изоморфизма в теории систем введено понятие *управляемости системы с точностью до некоторой изоморфной модели*, а также доказаны теоремы об управляемости и предложены новые, простые критерии управляемости с точностью до изоморфизма для систем весьма общего вида, позволившие формально определить и структуру соответствующих регуляторов. Здесь на основе указанного принципа и теорем об управляемости рассматривается формализованный метод и прикладная технология синтеза регуляторов нового типа – изоморфных регуляторов, – исключающих, по сути, эвристики из процедуры синтеза, имеющих простую форму и

обеспечивающих практически «предельное качество» регулирования, а также имеющих ряд других достоинств.

Эффективность и универсальность предлагаемого метода демонстрируется в приложении к линейным одномерным (SISO) и многомерным (векторным, многосвязным, MIMO) системам.

Вообще говоря, *проблема научного анализа задачи о регуляторе*, как важная самостоятельная фундаментальная проблема современной теории управления, нами изначально не ставилась. Она *возникла естественным образом при анализе более широкой проблемы управляемости динамических сис*тем с точностью до некоторых изоморфных моделей в рамках общей алгебраической теории, развивавшейся на основе общего принципа изоморфизма. *Оказалось, что в рамках других научно-прикладных парадигм в современной теории управления проблемы оценки управляемости и синтеза регуляторов практически никак не взаимосвязаны.* Так классический критерий Р.Е. Калмана управляемости линейных динамических систем [8, 45, 59] не дает метода синтеза регуляторов.

Вообще *проблема синтеза регуляторов как фундаментальная научная проблема*, решение которой позволило бы в конкретных задачах доказывать существование регуляторов (то есть доказывать управляемость соответствующих систем) и оценивать их единственность (то есть строго формализованно определять структуру), в теории систем и даже более узко, в рамках теории автоматического регулирования, *практически никем не ставилась*, за исключением, быть может, школы академика А.А. Красовского [16, 61, 62] и выросшей внутри нее школы, развивающей различные направления *теории вложения* [4-6, 46-49, 60].

Связано это было с тем, что в рамках известных научно-прикладных теорий и широких научных парадигм таких, например, как кибернетика [63], *необходимость обратной связи в системах управления предполагалась по определению.* Мы уже отмечали в главе 5 первой части книги, что даже ученые-классики не рассматривали обратную связь иначе, как «остроумнейший инженерный прием» [7] или как открытие феномена [8], который по неясной причине всегда существовал в природе. Вопрос о том, *как и по какой причине* он возник, даже не ставился. В упомянутой *теории вложения* [4-6, 46-49] наличие обратной связи, а часто и ее структура, также постулируются. Разработанный в рамках этой теории новый «ленточный критерий» управляемости [6, 60], как и критерий Р.Е. Калмана, не дает метода синтеза регуляторов.

Вообще в обширной современной литературе по теории автоматического управления и регулирования (см., например, [9-31]) *обратная связь в системах*

управления всегда вводится по определению и речь, как правило, идет о тех так или иначе обоснованных научно-эвристических методах или инженерных приемах, с помощью которых определяются структура и параметры «регуляторов», обеспечивающих реализацию заданных *инженерных критериев качества* регулирования. При этом *под «регулированием» понимается поддержание* («*стабилизация*») *желаемого значения некоторой координаты-«сигнала»* (*так называемой «уставки»*) на выходе объекта *или желаемых значений нескольких* (*группы, вектора*) координат-«*сигналов*». «*Управление*» *возникает тогда, когда необходимо изменять состояние управляемого объекта вслед и в точности за плавным, непрерывным, либо скачкообразным* (например, в цифровых системах) *изменением желаемого значения сигнала*. Такие системы управления часто называют *следящими*. При этом важнейшее значение имеет *цель управления*, которая и *предполагает обеспечение точного соответствия реального состояния управляемого объекта желаемому состоянию*. Критериями точности указанного соответствия в *установившихся режимах* (то есть в режимах стабилизации) и в *переходных режимах* (то есть в режимах слежения) как раз и являются инженерные критерии качества.

Кроме того, анализ показывает [32], что даже применительно к линейным системам современные методы синтеза структур и параметров регуляторов недостаточно формализованы и опираются, как правило, на различные эвристически вводимые «постулаты», «инженерные приемы» и «подходы». Это относится как к простым линейным системам с одним входом и одним выходом (класса SISO), имеющим важное практическое значение, так и к многомерным (векторным, многосвязным, класса MIMO) системам, также все чаще применяемым на практике.

Сама по себе эвристичность применяемых подходов и приемов не является недостатком, тем более, что эти приемы, в конечном счете, позволяют решать возникающие инженерные задачи синтеза с требуемым качеством. Вместе с тем, неполная формализация процедуры синтеза, необходимость привлечения искусства высококвалифицированного проектировщика, недостаточная научная обоснованность и строгость формализации используемых инженерных приемов всегда вызывали вопросы и стимулировали дальнейшие поиски. В связи с этим исследования не только систем достаточно общего вида, например, нелинейных, многомерных и многосвязных [13, 16, 25, 39-43, 46-49, 60, 70-72], но и в области синтеза регуляторов для простых линейных SISO-систем не потеряли актуальности [16-31, 33, 35-37, 52-56, 64, 65].

Высокое качество отработки произвольно изменяющихся задающих (желаемых) воздействий в условиях параметрических возмущений обычно достигается сочетанием различных методов [16], в том числе, основанных на использовании так называемых экзогенных (внешних) эталонных моделей [33], больших коэффициентов усиления [34-36], динамической компенсации [25, 26] и других приемов. Для поиска различных решений задач синтеза регуляторов уже давно используют аппарат современной алгебры [1, 3-6, 8, 25, 27, 37, 38, 65, 70]. Вместе с тем в рамках используемых вариантов алгебраического подхода сохраняются некоторые эвристические «постулаты», предположения и неформализованные предустановления, избавиться от которых не удалось до настоящего времени.

В данном разделе *развивается*, разработанный в 5-й главе 1-й части книги *с использованием алгебраического инструментария общего принципа изоморфизма, строго формализованный, универсальный метод решения указанной выше фундаментальной научной проблемы синтеза регуляторов для систем общего вида и для линейных одномерных и многомерных систем*, в частности. Универсальность метода проявляется в том, что он является единым как для линейных SISO-систем с одним входом и одним выходом, так и для линейных многомерных многосвязных MIMO-систем, а также для нелинейных систем.

Предлагаемый метод решения рассматриваемой проблемы сочетает строго формализованный алгебраический подход к оценке управляемости системы и, следовательно, к решению *проблемы существования и единственности регулятора, обеспечивающего реализацию цели управления*, основанный на общем принципе изоморфизма, а также различные методы построения эталонных моделей, формализующих качество управления и связанные со структурой эталонных моделей способы повышения робастности замкнутых контуров управления.

В разделе приведены методики и примеры синтеза изоморфных регуляторов для управления линейными объектами различного назначения классов SISO и MIMO. Показано, что изоморфные регуляторы в сравнении с известными регуляторами, синтезируемыми, как правило, на основе эвристических методик, сочетают весьма высокий уровень общности доказанных утверждений об управляемости систем, простую и вместе с тем строго формализованную и четко декомпозированную методику синтеза, а также возможность обеспечения, по сути, предельно достижимого, идеального качества переходных процессов в контурах управления.

В начале с использованием алгебраического формализма общего принципа изоморфизма разрабатывается в общем виде метод синтеза структур и парамет-

ров регуляторов нового типа – изоморфных регуляторов, - а затем применительно к конкретным системам даются примеры перехода от структур таких регуляторов к процессам их функционирования в контурах управления динамическими системами. В целом строго формализованно решается научная и прикладная проблема синтеза регулятора для управления скалярными и многомерными динамическими объектами.

1.2. Задача синтеза регулятора. Теоретические положения

Рассматривается линейный стационарный динамический объект

$$\dot{X} = AX + BU, \tag{1.1}$$

на который воздействует управление $U \subset R^m$. Здесь $X \subset R^n, m \le n.$

Нужно построить регулятор такой, который по желаемому состоянию X_{des} (desired state – англ.) вычислял бы потребное для его реализации управление $U \equiv U_{\text{des}}$. Понятно, что *регулятор существует, если объект* (1.1) *управляем*. Это означает, что если воздействуя на объект посредством U мы получили X_{des}, то и, наоборот, по X_{des} регулятор позволит точно и однозначно восстановить соответствующее желаемое управление $U_{\text{des}} \equiv U$.

В связи с этим коммутативную диаграмму, соответствующую *задаче синтеза регулятора*, следует изображать в виде, приведенном на рис.1.1 – относительно тождественного изоморфного отображения-преобразования

$$e_U : U \to U_{\text{des}},\ \ e_U^{-1} : U_{\text{des}} \to U,\ e_U \equiv e_U^{-1},\ e_U e_U^{-1} = e_U^{-1} e_U = e_U e_U = e_U\,. \tag{1.2}$$

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr, "e_U"] \arrow[dr, "G"'] & & U_{\text{des}} \\ & X_{\text{des}} \arrow[ur, "H"'] & \end{tikzcd}$$

Рис.1.1. Коммутативная диаграмма к задаче синтеза регулятора

Стрелка G отвечает отображению в операторной форме, характеризующему модель объекта (1.1):

$$\begin{aligned} &(pX - AX) = BU \ \Rightarrow\ X = (pI - A)^{-1} BU = \Phi BU, \\ &G = (pI - A)^{-1} B = \Phi B = W \ \Rightarrow\ X = GU = WU, \end{aligned} \tag{1.3}$$

где I – единичная матрица, Ф - фундаментальная матрица для уравнения (1.1), G - матричная передаточная функция объекта (1.1), часто обозначаемая буквой W, то есть G=W.

Тогда в соответствии *с целью синтеза* регулятора, формализуемой изоморфизмом $e_U \equiv I_m$, где e_U - обычная единичная матрица I_m размера m, соответствующая единице на U, регулятор H должен обеспечивать обратное преобразование от X к U_{des} такое, что между U и U_{des} должен существовать обыкновенный изоморфизм (1.2), то есть при $X \equiv X_{\text{des}}$ должно выполняться $U \equiv U_{\text{des}}$. Под U_{des} нужно понимать некоторое *желаемое управление*, которое точно и однозначно должно отвечать соответствующему желаемому вектору состояния X_{des}, то есть композиция $e_U = HG$ отображений-преобразований $G : U \to X$ и $H : X \to U$ должна быть изоморфным отображением в обычном смысле.

В соответствии со следствием 8 из главы 3 первой части книги, коммутативная диаграмма, представленная на рис. 1.1, формализует *систему синтеза регулятора* в общей проблеме синтеза регуляторов для объектов вида (1.1), в которой *цель синтеза* задается обыкновенным изоморфизмом (1.2). Вообще говоря, под отображением G можно понимать модель объекта существенно более общего вида, чем (1.1), (1.3), например, многомерного нелинейного.

Итак, нужно найти такой регулятор H, который отвечал бы композиции

$$e_U = HG \tag{1.4}$$

и системе уравнений

$$\begin{cases} e_U^{лев} = G^{-1}G = e_U^{прав} = HH^{-1} = HG = e_U = I_m, e_U = e_U^{-1}, \\ e_U e_U = e_U, \\ e_X^{лев} = GG^{-1} = e_X^{прав} = H^{-1}H = GH = e_X, e_X = e_X^{-1}, \\ e_X e_X = e_X, \end{cases} \tag{1.5}$$

соответствующих основной лемме и теореме о реализации (см. 2-ю главу первой части книги), где e_X – единица на X, удовлетворяющая (1.5), но *не обязательно являющаяся единичной матрицей*.

Как видно из рис.1.1 (с учетом результатов 12-й главы 1-й части книги),

$$\begin{cases} G^{-1} = e_U^{-1}H = e_U H = H, \\ H = e_U G^{-1} = G^{-1}, \quad H^{-1} = G e_U^{-1} = G. \end{cases} \tag{1.6}$$

То есть для решения задачи о регуляторе нужно найти матрицу $G^{-1} = H$ с точностью до некоторого *единственного класса*, отвечающего изоморфизму $e_U \equiv I_m$. В многомерном случае этот класс представляет собой множество допустимых для реализации регуляторов, то есть внутри класса регулятор может оказаться неединственным. Условия основной леммы и теоремы о реализации при

этом не нарушаются, так как регулятор остается единственным в смысле единственности класса, к которому он принадлежит.

Существование такого регулятора, удовлетворяющего условиям (1.4)-(1.6) в силу уравнений (1.1), (1.3) модели, *будет означать, во-первых, что объект* (1.1) *управляем и, во-вторых,* – при определении конкретного вида матрицы $H = G^{-1}$, *– что задача о синтезе регулятора решена*.

Условие для определения $H = G^{-1}$ в общем виде можно выписать из (1.5) в форме равенства

$$G^{-1}G = e_U = I_m . \tag{1.7}$$

Если (1.7) разрешимо относительно G^{-1}, то объект (1.1) управляем, то есть (1.7) представляет собой, записанное в наиболее общем виде *условие управляемости многомерных, многосвязных MIMO-систем*, причем необязательно линейных. Таким образом, *в нашем случае критерий управляемости одновременно позволяет определить и структуру регулятора*. Если регулятор существует, то система управляема.

Подчеркнем еще раз, что под отображением $G : U \to X$ можно понимать не только многомерную передаточную функцию G=W объекта (1.1) в соответствии с (1.3), но и вообще любое отображение достаточно общего вида, в том числе нелинейное многомерное, позволяющее разрешить уравнение (1.7) относительно регулятора G^{-1} хотя бы численно. Например, регулятор G^{-1} может быть сформирован в форме искусственной нейронной сети, параметры которой могут быть определены из (1.7) в результате процедуры обучения с учителем.

При этом нужно учитывать, что не всякое желаемое состояние X_{des} может оказаться достижимым X_{reach} (reachable state - достижимое (допустимое) состояние – англ.) в силу уравнений объекта (1.1) и тесных взаимосвязей компонент в каждом его состоянии, а также, в целом, взаимосвязей объекта *в замкнутой системе управления*, формализуемой коммутативной диаграммой на рис. 1.1. В силу этого ограничено и множество допустимых управлений. Для множества допустимых управлений $U_{\text{reach}} \subset U$ коммутативная диаграмма на рис. 1.1, если она существует, означает также ответ на вопрос: существует ли множество допустимых («физически реализуемых») состояний $X_{\text{reach}} \subset X$, отвечающих (1.1) и являющихся общим для отображений G и H, удовлетворяющих условиям (1.4)-(1.6). Если такое X_{reach} существует, то существует композиция, показанная в форме коммутативной диаграммы на рис. 1.2, в которой обязательно будет выполняться

условие: при произвольным выборе желаемого вектора управления U_{des} из множества допустимых такого, что $U_{\text{des}} \subset U_{\text{reach}}$, обязательно найдется единственное желаемое состояние в множестве допустимых таком, что $X_{\text{des}} \subset X_{\text{reach}}$, которое точно и взаимно однозначно отвечает вектору U_{des} и наоборот. Только в этом случае система полностью управляема.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr, "e_U"] \arrow[dr, "G"'] & & U_{\text{reach}} \\ & X_{\text{reach}} \arrow[ur, "H"'] & \end{tikzcd}$$

Рис. 1.2. Коммутативная диаграмма системы синтеза регулятора

Таким образом, физическая интерпретация (в терминах теории автоматического управления) полученных математических результатов ясна.

В целом в качестве резюме к сказанному отметим, что *условием управляемости линейных динамических многомерных многосвязных систем является коммутативность приведенных на рис.* 1.1 *и* 1.2 *диаграмм отображений*, построенных для композиции (1.4). Или, что тоже самое, – существование e_X и e_{U} таких, что выполняются равенства (1.5).

Критерием управляемости является выполнение равенства (1.7) *и его разрешимость относительно регулятора* $G^{-1} = H$.

В силу того, что отображения *G* и *H* в коммутативной диаграмме на рис. 1.1 и 1.2 являются изоморфизмами с точностью до изоморфизма $e_U \equiv I_m$ (т.е. являются изоморфизмами внутри коммутативной диаграммы), разрешимость уравнения (1.7) относительно регулятора $G^{-1} = H$ означает, что объект (1.1) управляем и *автоматически означает* его, регулятора, удовлетворение условиям (1.5) и (1.6). То есть для определения управляемости объекта (1.1) и вычисления регулятора нужно лишь решить уравнение (1.7). Уравнения, входящие в (1.5) и (1.6), можно использовать только как поверочные.

Возникает и еще один важный вопрос: а можно ли строить коммутативную диаграмму относительно вектора $X \subset R^n$ и определять условие управляемости и регулятор с помощью композиции отображений, показанных рис. 1.3, то есть с точностью до изоморфизма $e_X = I_n$, где I_n - единичная матрица размера *n*, e_X – единица на *X*. То есть, по существу, ставится вопрос: *существует ли композиция* $GH = e_X = I_n$ *для управляемых систем* и можно ли найти регулятор *H*, удовлетворяющий этой коммутативной диаграмме.

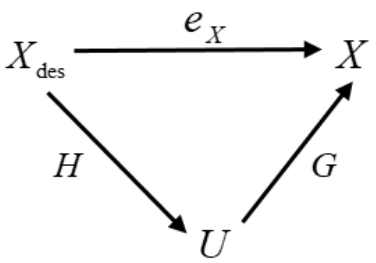


Рис. 1.3. Коммутативная диаграмма системы регулироваания

Сразу скажем, что при $m<n$ ответ отрицательный, то есть замкнутую коммутативную диаграмму, соответствующую композиции $GH = e_X = I_n$ построить нельзя и, соответственно, регулятор H определить невозможно даже если объект (1.1) является заведомо управляемым. Поясним почему это так.

Самый простой «интуитивный» ответ такой. Нельзя обычным изоморфизмом e_X большого размера n «измерить» вектор U размера $m<n$, как нельзя жесткой (нескладываемой) линейкой длиной в один метр измерить предмет, размеры которого соответствуют нескольким сантиметрам.

Более сложный и точный ответ такой. В многомерной системе *не все желаемые состояния* X_{des} *являются допустимыми* именно *в силу многосвязности модели* (1.1) *объекта*, то есть $X_{\text{des}} \neq X_{\text{reach}}$. Нельзя произвольно назначать (задавать) компоненты вектора X_{des} и искать соответствующий ему вектор U_{des} даже если имеем дело с заведомо управляемым объектом, так как в соответствии с основной леммой единица e_X на X может и не быть обычной единичной матрицей I_n размера n. Какой она является на самом деле для управляемой системы, мы заранее не знаем. Поэтому строить коммутативную диаграмму относительно (с точностью до) $e_X = I_n$ при $m<n$ нельзя. «Линейкой» в данном случае должен являться вектор U. *Только в векторе U все компоненты действительно независимы*. Если U позволяет «измерить», охватить все пространство состояний $X \subset R^n$ при $m<n$, то система управляема.

Таким образом, *при исследовании управляемости объекта и синтезе регулятора в случае m<n необходимо использовать коммутативные диаграммы, показанные на рис*.1.1 *и рис*. 1.2.

Коммутативную диаграмму, показанную на рис. 1.3, можно и нужно использовать для синтеза управлений только в случае $m \geq n$, когда объект заведомо управляем, но это задачи другого типа. В таких задачах, как правило, регулятор уже известен, а избыточность, заложенная в вектор управлений U путем включе-

ния в него дополнительных компонент, используется для повышения надежности и отказобезопасности системы управления объектом за счет ее реконфигурации при возникновении отказов в тех или иных каналах управления. На этой задаче здесь останавливаться не будем. Эта задача двойственна *задаче коррекции вектора* состояния, которая будет рассмотрена далее применительно к общей проблеме информационного обеспечения системы управления.

1.3. Прикладная технология синтеза изоморфных регуляторов

Технологию синтеза изоморфных регуляторов продемонстрируем с использованием простого наглядного примера. Рассмотрим случай, когда $m<n$, объект (1.1) заведомо управляем, матрицы A и B имеют вид [3]

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -4 & -1{,}14 \\ 1 & -0{,}62 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} b_{11} \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7{,}5 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{1.8}$$

Попытаемся использовать для вычисления регулятора коммутативную диаграмму, показанную на рис. 1.3. Несложно установить, что в этом случае, как следует из (1.3) и (1.8),

$$G=\begin{bmatrix} \dfrac{b_{11}(p-a_{22})}{\Delta} \\ \dfrac{b_{11}a_{21}}{\Delta} \end{bmatrix},\ \Delta=(p-a_{11})(p-a_{22})-a_{12}a_{21}. \tag{1.9}$$

Пусть, как мы условились перед синтезом регулятора априори предполагать, единица e_X на X на рис. 1.3 является единичной матрицей, то есть

$$e_x^{прав}=GG^{-1}=\begin{bmatrix} \dfrac{b_{11}(p-a_{22})}{\Delta} \\ \dfrac{b_{11}a_{21}}{\Delta} \end{bmatrix}\left[k_1 \vdots k_2\right]=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{1.10}$$

В уравнении (1.10) матрица

$$G^{-1}=\left[k_1 \vdots k_2\right] \tag{1.11}$$

определяет структуру пока неизвестного регулятора. Размеры матрицы G^{-1} легко определяются с учетом размеров матриц G и I_n. Если (1.10) разрешимо относительно коэффициентов k_1 и k_2 регулятора (1.11), то объект управляем. Определим эти коэффициенты из (1.10), записывая равенство в скалярном виде:

$$\frac{b_{11}(p-a_{22})}{\Delta}k_1=1, \tag{1.12}$$

$$\frac{b_{11}(p-a_{22})}{\Delta}k_2=0, \tag{1.13}$$

$$\frac{b_{11}a_{21}}{\Delta}k_1 = 0, \tag{1.14}$$

$$\frac{b_{11}a_{21}}{\Delta}k_2 = 1. \tag{1.15}$$

Ясно, что уравнения (1.12) - (1.15) при структурах матриц A и B, заданных соотношением (1.8), неразрешимы относительно k_1 и k_2. Получается, что регулятор для объекта (1.1) с матрицами (1.8) не существует. Тем не менее непосредственно из (1.1) и (1.8), видно, что объект управляем и регулятор должен существовать. Пришли к противоречию. Выясним, что оно означает.

Это значит, что, как указывалось выше, нельзя полагать e_X единичной матрицей и использовать при синтезе регулятора коммутативную диаграмму, представленную на рис. 1.3. Более того, при $e_X = I_n$ композиция $GH = e_X$ не существует, то есть замкнутую диаграмму, показанную на рис. 1.3, вообще построить нельзя, так как отображения G и H в этом случае не коммутируют – множество U не является для них общим. Необходимо диаграмму «перевернуть» и строить относительно вектора U с точностью до соответствующего изоморфизма $e_U \equiv I_m$, как это показано на рис. 1.2. Тогда в качестве критерия управляемости вместо (1.10), как мы указывали, будет использоваться уравнение (1.7).

Из (1.7) для матриц (1.8) объекта (1.1) в данном случае получим

$$G^{-1}G = e_U = I_m = 1,$$

$$\left[k_1 \vdots k_2\right]\begin{bmatrix} \dfrac{b_{11}(p-a_{22})}{\Delta} \\ \dfrac{b_{11}a_{21}}{\Delta} \end{bmatrix} = \frac{b_{11}}{\Delta}\left[k_1(p-a_{22}) + k_2 a_{21}\right] = 1. \tag{1.16}$$

Таким образом, как видно из (1.16) и (1.11), для объекта (1.1), (1.8) получен класс регуляторов с точностью до коэффициентов k_1 и k_2, то есть объект управляем. В (1.16) один из коэффициентов можно выразить через другой. Например,

$$k_2 = (1 - k_1\frac{b_{11}(p-a_{22})}{\Delta})\frac{\Delta}{b_{11}a_{21}} \ .$$

Тогда, как следует из (1.16) и (1.11),

$$G^{-1} = \left[k_1 \vdots \left(1 - k_1\frac{b_{11}(p-a_{22})}{\Delta}\right)\frac{\Delta}{b_{11}a_{21}}\right]. \tag{1.17}$$

Выражение (1.17) определяет класс регуляторов для объекта (1.1), (1.8). Этот класс единственен. Выбор конкретного экземпляра регулятора из класса (1.17) осуществляется путем назначения конкретного значения коэффициента k_1. Нетрудно убедиться, что регулятор (1.17) удовлетворяет всем уравнениям в проверочных соотношениях (1.5) и (1.6).

Таким образом, на рассмотренном примере мы убедились, что при исследовании на управляемость динамического объекта (1.1), (1.3) и синтезе для него регулятора необходимо использовать коммутативные диаграммы, представленные на рис. 1.1 и рис. 1.2, и критерий управляемости (1.7). Коммутативную диаграмму, показанную на рис. 1.3, и соответствующий ей критерий (1.10) или в более общем виде

$$GH = GG^{-1} = e_X = I_n \tag{1.18}$$

при $m<n$ использовать нельзя.

Как уже было замечено, это означает, что для линейного многомерного многосвязного объекта (1.1), (1.3) нельзя назначать единицу e_X на X в виде единичной матрицы, означающей произвол в выборе компонент желаемого вектора X_{des}, считая их независимыми. Единица e_X должна иметь отличную от I_n структуру. Определим ее с помощью соотношений (1.5), (1.6) для объекта (1.1), (1.3) с полученным регулятором (1.17).

Из уравнения

$$e_X^{лев} = GG^{-1} = H^{-1}H = e_X^{прав} = e_X, \tag{1.19}$$

входящего в (1.5), можно получить с учетом (1.6), (1.9) и (1.17), что

$$e_X = \begin{bmatrix} \dfrac{b_{11}(p-a_{22})}{\Delta}k_1 & \dfrac{(p-a_{22})}{a_{21}}\left(1-k_1\dfrac{b_{11}(p-a_{22})}{\Delta}\right) \\ \dfrac{b_{11}a_{21}}{\Delta}k_1 & \left(1-k_1\dfrac{b_{11}(p-a_{22})}{\Delta}\right) \end{bmatrix}. \tag{1.20}$$

Таким образом, регулятор (1.17) для объекта (1.1), (1.3) существует, единственен в смысле единственности класса (1.17) и объект управляем. Но, как видно из (1.20), в силу уравнений (1.1), (1.3) и (1.8), (1.9), единица e_X на X не является единичной матрицей и ее структура определяется параметрами уравнений динамики объекта и параметрами регулятора. То есть *структуру* e_X *нельзя заранее предсказать и назначать из эвристических и, казалось бы, правильных интуитивных соображений*, как мы пытались это сделать, так как, по крайней мере, параметры регулятора до его синтеза неизвестны.

Более того, вполне очевидно, что определитель матрицы (1.20) равен нулю:

$$\det e_X = 0. \tag{1.21}$$

В обычной матричной алгебре при рассмотрении e_X вида (1.20) отдельно, вне контекста коммутативной диаграммы, показанной на рис. 1.1 и рис. 1.2, это означало бы, что e_X не имеет обратной. Вместе с тем непосредственной подстановкой из (1.9), (1.17) и (1.20) с учетом (1.6) можно убедиться, что выполняются соотношения

$$e_X = H^{-1}G^{-1} = e_X^{-1} = e_X, \quad e_X e_X = e_X. \tag{1.22}$$

Выполнение соотношений (1.22) означает, что *внутри рассматриваемой коммутативной диаграммы* единица e_X на X имеет обратную, то есть является изоморфным взаимно обратным тождественным отображением X на себя даже несмотря на то, что определитель (1.21) равен нулю! То есть e_X *внутри коммутативной диаграммы является изоморфизмом с точностью до изоморфизма* $e_U \equiv I_m$ что полностью соответствует основной лемме и теореме о реализации, доказанным в рамках общего принципа изоморфизма во 2-й главе 1-й части книги. Такие изоморфизмы в 1-й части книги мы условились называть *необыкновенными*.

Следовательно, независимо от того, что $\det e_X = 0$, при выборе регулятора в виде (1.17) всегда будет достигаться текущее состояние X, тождественно равное желаемому состоянию $X \equiv X_{\text{des}} \subset X_{\text{reach}}$, *выбираемому из множества достижимых (и только их!), присущих системе состояний* X_{reach}, так как e_X является тождественным отображением.

Равенство $\det e_X = 0$ в данном случае подтверждает наше общее предположение, высказанное в 1-й части книги, *об универсальности этого равенства-свойства применительно ко всем необыкновенным изоморфизмам* в соответствующих коммутативных диаграммах. В данном случае это предположение можно сформулировать в виде следующего утверждения–теоремы: *для управляемого объекта* (1.1) *в случае* $m<n$ *определитель матричной единицы* e_X *на* X *всегда равен нулю, то есть всегда* $\det e_X = 0$. Утверждение оказалось справедливым, и мы в этом убедимся далее, во всех рассмотренных примерах синтеза изоморфных регуляторов, но его доказательство для общего случая пока не получено.

Мы убедились, что если априори положить $e_X = I_n$, как мы это сделали применительно к критериям (1.10), (1.18), то вычислить регулятор даже для заведомо управляемой системы невозможно. Интересно исследовать, а какой получится регулятор, если каким-то образом нам стала бы известна единица e_X в виде (1.20) для коммутативной диаграммы, показанной на рис.3? И, вообще, существует ли регулятор в этом случае? Ответы на эти вопросы даны ниже.

Непосредственно из коммутативной диаграммы на рис. 1.3 видно, что

$$\begin{aligned} e_X &= GH = H^{-1}H = GG^{-1}, \\ e_U &= HH^{-1} = G^{-1}G = HG. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Уравнением для вычисления регулятора G^{-1} является первое уравнение в (1.23), которое с учетом (1.9) и (1.20) принимает вид:

$$GG^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{b_{11}(p-a_{22})}{\Delta} \\ \dfrac{b_{11}a_{21}}{\Delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ? \vdots ? \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{b_{11}(p-a_{22})}{\Delta} k_1 & \dfrac{(p-a_{22})}{a_{21}}\left(1 - k_1 \dfrac{b_{11}(p-a_{22})}{\Delta}\right) \\ \dfrac{b_{11}a_{21}}{\Delta} k_1 & \left(1 - k_1 \dfrac{b_{11}(p-a_{22})}{\Delta}\right) \end{bmatrix} = e_X . \tag{1.24}$$

Из (1.24) нетрудно видеть, что регулятор G^{-1}, как и при использовании коммутативной диаграммы, показанной на рис. 1.1 и 1.2, определяется по одной и той же формуле (1.17). Это следует из полной симметрии соотношений (1.23) и (1.5) для e_X и e_U в коммутативных диаграммах на рис. 1.1, 1.2 и 1.3.

Таким образом, в силу жёсткой взаимосвязи между собой единиц e_X и e_U *в системе синтеза* регулятор в обоих случаях получается одним и тем же. Взаимосвязь этих единиц иллюстрируется на рис. 1.4.

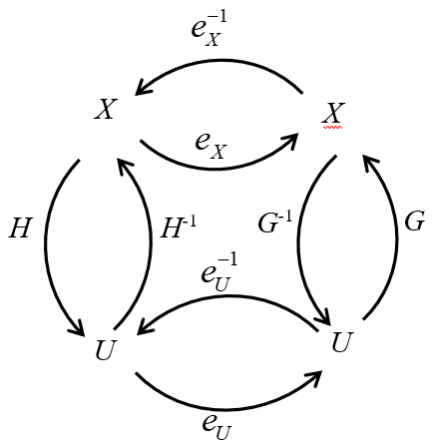


Рис. 1.4. Взаимосвязь единиц в системе синтеза-регулирования

Однако синтез регулятора нужно проводить по коммутативной диаграмме, изображенной именно на рис. 1.1 и 1.2, с использованием критерия управляемости (1.7), так как при $m<n$ только в векторе U компоненты являются действительно независимыми в отличие от вектора X, компоненты которого зависимы («запутаны» связями) в силу уравнения (1.1) модели объекта и уравнения (1.17) регулятора и не могут назначаться произвольно. Независимости компонент в U отвечает единичное изоморфное отображение e_U, назначаемое в форме единичной матрицы в критерии (1.7).

После синтеза изоморфного регулятора по указанным диаграммам для управления объектом, наоборот, используется коммутативная диаграмма *системы управления*, показанная на рис. 1.3, так как *в отличие от системы синтеза*, имеющей целью обеспечение равенства $U \equiv U_{\text{des}}$, *в системе управления* после синтеза *должна быть реализована цель* $X \equiv X_{\text{des}}$, состоящая в обеспечении равенства текущего состояния X желаемому состоянию X_{des} в каждый момент времени. Проверка выполнения этого равенства в коммутативной диаграмме на рис. 1.3 и, соответственно, в системе управления достигается *физическим замыканием обратной связи* от X к X_{des} посредством изоморфного отображения e_X. При этом следует иметь в виду, что в этой диаграмме под e_X понимается тождественное отображение-матрица (1.20), являющееся необыкновенным изоморфизмом в смысле теории, изложенной в 1-й части книги. Структура отображения-матрицы G характеризует передаточную функцию объекта управления от некоторого вектора управления U к соответствующему фактическому состоянию X, а структура отображения-матрицы $H=G^{-1}$ - передаточную функцию изоморфного регулятора от желаемого состояния X_{des} к требуемому управлению. Сличение фактического состояния с желаемым в общем случае MIMO-управления осуществляется посредством необыкновенного тождественного изоморфизма $e_X = e_X^{-1}$, замыкающего в системе управления *обратную связь*.

Таким образом, мы доказали, что *обратная связь является необходимым и достаточным атрибутом для реализации цели в любой системе управления*.

С учетом (1.3) *критерий* (1.7) *управляемости объекта* (1.1) может быть записан в виде

$$G^{-1}G = G^{-1}\Phi B = e_U = I_m \ . \qquad (1.25)$$

Здесь в начале определяется матрица $G = \Phi B$ и затем с учетом известной единичной матрицы I_m решается (1.25) относительно регулятора G^{-1}. Матрица

$G = ФВ$, как мы указывали применительно к (1.1) и (1.3), является передаточной функцией линейного объекта управления, часто обозначаемой буквой *W*.

Таким образом, критерий управляемости многомерных многосвязных линейных MIMO-объектов с учетом новых обозначений можно записать в виде:

$$W^{-1}W = I_m, \tag{1.26}$$

где *W*=*G*=*ФВ* – матричная передаточная функция объекта (1.1), (1.3); W^{-1}–обратная матрица с точностью до изоморфизма I_m к матрице *W*, представляющая собой *многомерный изоморфный регулятор* для объекта (1.1), (1.3); I_m – единичная матрица размера *m*. *Равенство* (1.26) *является критерием управляемости линейных MIMO-объектов* и может использоваться вместо более общего критерия (1.7), в котором под *G* может подразумеваться отображение, характеризующее структуру модели объекта, имеющее более общий вид.

Следует еще раз обратить внимание на то, что матричная передаточная функция *W* линейных MIMO-объектов в случае $m<n$ является прямоугольной матрицей размера $n \times m$ и поэтому обратной матрицы в обычном смысле не имеет. Матрица W^{-1} также является прямоугольной матрицей размера $m \times n$ и, тем не менее, является обратной к матрице *W*, но только внутри коммутативной диаграммы, представленной на рис. 1.1 и 1.2, то есть обратной с точностью до изоморфного отображения-матрицы I_m, являющейся в данном случае обычной единичной матрицей размера *m*. Матрица W^{-1} с учетом проведенных переобозначений должна удовлетворять соотношениям (1.3), (1.5), (1.6).

Из приведенных рассуждений следует важный, по сути, *фундаментальный вывод*: вычисляемый по простому критерию (1.26) *изоморфный регулятор* W^{-1} *вместе с тождественным отображением* e_X *естественным образом* осуществляет *обратную связь* (ОС), необходимую для реализации целей управления объектом. Сам факт существования изоморфного регулятора является одновременно и безусловным свидетельством управляемости объекта. То есть *существование ОС в форме композиции изоморфного регулятора и тождественного отображения* e_X (см. рис.1.3 и рис. 1.4: $G^{-1}e_X = H$, $H^{-1} = e_X^{-1}G$) *необходимо и достаточно для реализации как свойства управляемости объекта, так и целей управления*: существование регулятора означает идеальную управляемость объекта, а тождественное отображение e_X сопоставляет текущее фактическое состояние *X* желаемому состоянию-цели X_{des}, то есть реализует собственно обратную связь. Отметим, что в известных методах синтеза регуляторов и вообще в кибернетике сама необходимость ОС и ее структура обычно постулируются. *В нашем случае*

ОС возникает естественным образом как средство реализации свойства управляемости объекта и достижения цели управления, формализуемой изоморфизмом e_X .

При реализации ОС в форме изоморфного регулятора W^{-1} с учетом структуры e_X вида (1.20) желаемое состояние будет достигаться весьма быстро. Причем в управляемых многомерных «развязанных» MIMO-системах при $m=n$, когда компоненты вектора состояния независимы, и в скалярных SISO-системах - практически «мгновенно». Дело в том, что *такой изоморфный регулятор*, как следует из (1.26), *обеспечивает полную и точную* (с точностью до модели объекта) *компенсацию динамики* объекта управления и в этом смысле *является идеальным*. Как мы указывали в 14-й главе 1-й части книги, задача синтеза таких регуляторов ставилась уже давно, однако фундаментальное решение этой задачи получено не было, хотя, как мы увидим далее, некоторые эвристические решения в частных случаях весьма точно соответствовали полученному нами на основе научных предпосылок решению.

Вместе с тем реализовать такой регулятор с учетом ограниченных энергетических возможностей системы управления непросто. Требуемое *реально достижимое и физически реализуемое качество регулирования в системе управления* может быть обеспечено путем дополнения идеального изоморфного регулятора W^{-1}, реализующего «лишь» свойство управляемости объекта, некоторой «структурой», отвечающей собственно за качество. Эту «структуру» определим после некоторых предварительных рассуждений.

Рассмотрим, как может функционировать система управления, представленная на рис. 1.3, с изоморфным регулятором W^{-1}. С учетом переобозначений, принятых применительно к критерию управляемости (1.26), ее коммутативная диаграмма преобразуется к виду, показанному на рис. 1.5. На рис. 1.5 W – передаточная функция объекта (1.1), (1.3); W^{-1} – изоморфный регулятор, удовлетворяющий критерию (1.26); X_{set} - *заданное значение вектора состояния* или, как часто говорят, уставка регулятора (setpoint – англ.). Уставка X_{set} формируется на входе регулятора некоторой эталонной моделью W_{ref} (reference model – англ.) так, что

$$X_{\text{set}} = W_{\text{ref}} X_{\text{des}} .$$

Эталонная модель необходима для обеспечения требуемого качества регулирования. То есть желаемое состояние X_{des} объекта, относящееся к области его

допустимых состояний $X_{\text{des}} \subset X_{\text{reach}}$, в начале поступает на вход эталонной модели W_{ref} и с ее выхода в форме уставки X_{set} воздействует на вход системы регулирования, показанной на рис. 1.5.

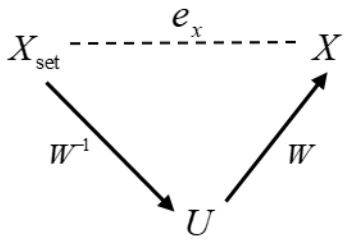


Рис. 1.5. Система регулирования с уставкой X_{set}

В системе регулирования уставка X_{set} воздействует на вход регулятора W^{-1}. На выходе регулятора формируется управление *U*, точно отвечающее указанному заданному состоянию X_{set}. С выхода регулятора управление *U* поступает непосредственно на объект *W* и если в отображениях-структурах W^{-1} и *W* регулятора и объекта не возникли какие-либо нарушения (неисправности, отказы), то выходное состояние *X* объекта будет точно отвечать заданному состоянию, то есть $X \equiv WW^{-1}X_{\text{set}} \equiv e_X X_{\text{set}} \equiv X_{\text{set}}$.

Таким образом, тождественное отображение-изоморфизм $e_X : X_{\text{set}} \to X$ вида (1.20), изображенное на рис. 1.5 пунктирной линией, реализуется не напрямую а посредством рассмотренного «*V*- процесса», включающего две ветви - регулятор W^{-1} и объект *W*. На самом деле в природе и при конструировании искусственных систем различные «процедуры управления» в форме *V*-процесса встречаются довольно часто и мы еще будем рассматривать их в дальнейшем. То, что природа повсеместно использует одинаковые, простые, проверенные «приемы», например, обратную связь, замыкающую такой *V*-процесс в форме изоморфизма $e_X^{-1} : X \to X_{\text{set}}$, в живой и неживой природе, является и основной исходной посылкой кибернетики [63]. При этом в кибернетике, в отличие от нашей теории, обратная связь принимается существующей по определению, ее собственная «природа» и причины возникновения не раскрываются.

Рассмотренная «процедура», точнее, структура управления объектом может быть развернута в «линейный», то есть по внешней форме разомкнутый «контур управления», показанный на рис. 1.6, хотя, на самом деле, в этом контуре неявно подразумевается, но не реализуется физически, ОС в форме отображения-изоморфизма $e_X : X_{\text{set}} \to X$ или, точнее, $e_X^{-1} : X \to X_{\text{set}}$.

$$X_{\text{des}} \xRightarrow{W_{\text{ref}}} X_{\text{set}} \xRightarrow{W^{-1}} U \xRightarrow{W} X$$

Рис. 1.6. Разомкнутый контур управления

В часто встречающемся на практике скалярном случае $m=n=1$ управления SISO-объектом *изоморфный регулятор* W^{-1} *представляет собой обычную обратную функцию к скалярной передаточной функции объекта* W, определяемую, с учетом (1.26), из совсем простого соотношения-критерия

$$W^{-1}W = 1. \tag{1.27}$$

Подчеркнем еще раз, что *в скалярном случае изоморфный регулятор* W^{-1} *получается простым обращением передаточной функции объекта* W.

В скалярном случае, как видно из (1.27), в контуре управления на рис. 1.6 состояние $X \equiv X_{\text{set}}$ реализуется «мгновенно», то есть *изоморфный регулятор идеально компенсирует динамику объекта*. В связи с этим *реально необходимое качество регулирования задается эталонной моделью* W_{ref} . Отметим, что эталонная модель часто используется в рамках и других подходов к синтезу контуров управления. Здесь же она сочетается с идеальным изоморфным регулятором и в композиции (произведении) с ним образует *обобщенный регулятор* (generalized regulator – англ.) W_{gen} вида

$$W_{\text{gen}} = W^{-1}W_{\text{ref}} . \tag{1.28}$$

С учетом (1.28) линейный, разомкнутый «контур управления» преобразуется к виду, показанному на рис. 1.7.

$$X_{\text{des}} \xRightarrow{W_{\text{gen}}} U \xRightarrow{W} X$$

Рис. 1.7. Обобщенный регулятор в контуре управления

В отличие от известных подходов, достоинством рассмотренной технологии синтеза регуляторов является практически полная независимость процедуры синтеза изоморфного регулятора от процедуры выбора эталонной модели, то есть *независимость процедур реализации идеальной управляемости объекта* (с помощью регулятора) *и обеспечения требуемого качества регулирования* (с помощью эталонной модели), что отвечает *общему принципу суперпозиции свойств системы*, рассмотренному в 9-й главе 1-й части книги. Кроме того, рассмотренная технология синтеза регуляторов может применяться не только в отношении линейных объектов вида (1.1), (1.3), но и в отношении любых многомерных объектов, отображения-структуры G которых (см. рис. 1.1) позволяют разрешить (может быть не аналитически, а численно) уравнение-критерий вида (1.7), (1.25)

относительно регулятора G^{-1}. Заметим, что требование изоморфизма на отображение-структуру *G* самого объекта не накладывается. Важно лишь, чтобы структура *G* объекта удовлетворяла критерию управляемости (1.7), (1.25).

Показанные на рис. 1.6 и рис. 1.7 «контуры управления» в терминах теории автоматического регулирования являются «контурами программного управления», абсолютно точно отрабатывающими желаемое состояние X_{des}, относящееся к области допустимых внутренних состояний $X_{\text{des}} \subset X_{\text{reach}}$ системы управления, с точностью до модели объекта *W*. Если модель не совсем адекватна объекту, то на выходе контуров будет наблюдаться состояние $X \neq X_{\text{des}}$. Как мы уже отмечали, для непрерывного контроля точного выполнения и обеспечения равенства $X \equiv X_{\text{set}}$ в условиях различных возмущений в естественных природных и в искусственных технических системах контуры управления замыкаются полной ОС, отвечающей коммутативной диаграмме системы регулирования, показанной на рис. 1.5, а именно, в контурах «физически» реализуется ОС в форме отображения $e_X = e_X^{-1} : X \to X_{\text{set}}$. В этом случае «контур управления», отвечающий замкнутой коммутативной диаграмме, показанной на рис. 1.5, также становится замкнутым и приобретает вид, представленный на рис. 1.8.

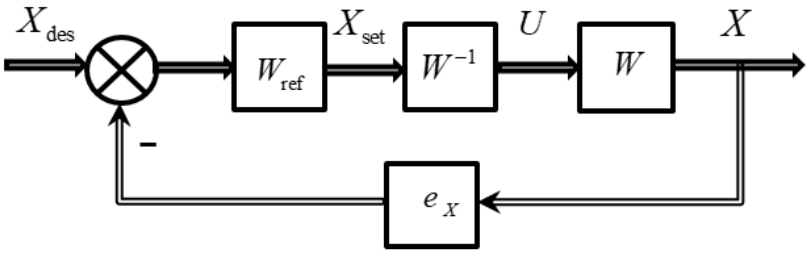


Рис. 1.8. Замкнутый контур управления

На рис. 1.8 эталонная модель W_{ref} сразу внесена в контур, охваченный обратной связью. Вместе с тем она может находиться и вне контура, охваченного ОС, – как показано на рис. 1.9. Нужно лишь иметь в виду, что структура эталонной модели в каждом из этих случаев будет разной.

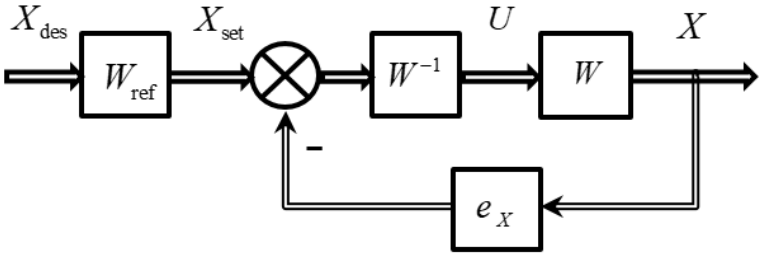


Рис. 1.9. Контур управления с внешней эталонной моделью

Например, в простейшем скалярном случае эталонная модель на рис. 1.8 для достаточно широкого класса SISO-объектов с передаточной функцией W может быть выбрана в виде

$$W_{\text{ref}}(p) = \frac{1}{Tp}. \tag{1.29}$$

Тогда с учетом равенства (1.27) и $e_X = 1$ передаточная функция замкнутого контура будет иметь вид

$$\Phi(p) = \frac{1}{Tp+1}. \tag{1.30}$$

Если же эталонная модель W_{ref} находится вне контура, охваченного ОС (см. рис. 1.9), то для обеспечения прежней общей передаточной функции (1.30) структура эталонной модели должна иметь вид

$$W_{\text{ref}}(p) = \frac{2}{Tp+1}, \tag{1.31}$$

так как на рис. 1.9 передаточная функция контура с обратной связью, стоящего после эталонной модели и отражающего коммутативную диаграмму, показанную на рис. 1.5, будет близка к одной второй. В любом случае на рис. 1.8 и рис. 1.9 известны все передаточные функции W, W^{-1} и отображение e_X (например, в виде $e_X = 1$ для скалярного объекта или в виде (1.20) для многомерного объекта), что позволяет выбрать эталонную модель W_{ref}, исходя из требуемого качества регулирования. Отметим, что, на самом деле, эталонная модель должна выбираться не только с учетом реализации необходимого качества регулирования, но и с учетом физической реализуемости регулятора в совокупности с эталонной моделью. Понятно, что эталонная модель выполняет и роль фильтра, сглаживающего «шумы», всегда присутствующие во входном сигнале. Если сигнал на выходе эталонной модели достаточно гладкий, то требования к физической реализуемости регулятора могут быть снижены.

В целом, критерии (1.26) и (1.27) позволяют определить *единственный регулятор* как в случае многомерного многосвязного объекта вида (1.1), (1.3), так и в случае скалярного объекта при $m=n=1$. В многомерном случае при $m<n$ единственный регулятор, как это было показано в примере, определяется с точностью до некоторого единственного класса.

Вместе с тем, в многомерном случае имеются особенности, связанные с более существенным проявлением в системе регулирования *системного эффекта* (*эмерджентности*). В случае многомерного объекта по аналогии с обработкой сигналов в информационной системе, рассмотренной в 13-й главе 1-й части книги, при подаче на вход *системы управления*, показанной на рис.1.3, где e_X

обязательно является необыкновенным изоморфизмом и в приведенном примере определяется по формуле (1.20), *произвольного желаемого сигнала* X_{des} такого, что $X_{\text{des}} \not\subset X_{\text{reach}}$, то есть *не принадлежащего множеству внутренне допустимых для системы*, система «притянет» этот сигнал к одному из допустимых для нее «внутренних» устойчивых состояний X_{reach} такому, что $X_{\text{reach}} \neq X_{\text{des}}$. В принципе, как показано в указанной главе, выходное состояние X_{reach} можно «дешифрировать» посредством «ключа»-изоморфизма e_X, то есть «вычислить» желаемое состояние X_{des}, которому соответствует наблюдаемое на выходе состояние, но реализовать «физически» это желаемое состояние X_{des} очевидно невозможно, так как оно недоступно для системы, лежит за пределами *множества ее внутренних устойчивых состояний*, то есть ее множества достижимости.

Таким образом, *при m<n нельзя произвольно задавать многомерные (векторные) желаемые состояния системы*, в том числе вполне допустимые для объекта управления, рассматриваемого отдельно, вне системы управления. *Компоненты желаемых векторов должны быть согласованы не просто в силу уравнений* (1.1), (1.3) *объекта управления, а в силу системы управления в целом*, то есть в силу системы, показанной на рис. 1.3 и включающей не только объект управления, но и изоморфный регулятор и необыкновенный изоморфизм e_X, выполняющий функцию обратной связи от текущего состояния X к желаемому состоянию X_{des}, так как $e_X = e_X^{-1}$. То есть подмножество векторов желаемых состояний должно принадлежать множеству допустимых (достижимых) для системы управления «внутренних» состояний: $X_{\text{des}} \subseteq X_{\text{reach}}$.

Для демонстрации соответствующих эффектов продолжим рассмотрение простого объекта (1.1), (1.3), (1.8), (1.9) с регулятором (1.17). Будем исследовать разомкнутый контур управления, показанный на рис. 1.6. Подадим на вход регулятора вполне допустимый для объекта желаемый входной сигнал $X_{\text{des}} = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}3 \end{bmatrix}^T$, где T – индекс транспонирования. Определим сигнал X на выходе системы управления в установившемся режиме (при $p = 0,\ t \to \infty$). Получим

$$X = e_X X_{\text{des}} = \left[-\frac{a_{22}}{a_{21}} \left(1 + k_1 \frac{b_{11} a_{22}}{\Delta^*} \right) \cdot 0{,}3 \ \vdots \ \left(1 + k_1 \frac{b_{11} a_{22}}{\Delta^*} \right) \cdot 0{,}3 \right]^T, \tag{1.32}$$

где $\Delta^* = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$.

Как видно, этот сигнал не равен желаемому. Если же сигнал (1.32) вновь подать на вход рассматриваемого контура в качестве желаемого, то сигнал на выходе контура будет равен сигналу (1.32) и уже меняться не будет при последующих подачах на вход сигнала (1.32). То есть состояние (1.32) является «внутренним» устойчивым состоянием системы управления, в которое она перейдет при первоначальном входном сигнале $X_{\text{des}} = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}3 \end{bmatrix}^T$. Нетрудно убедиться, что любой входной сигнал переводит систему управления в некоторое «внутреннее» устойчивое состояние.

Проблема заключается в том, что *до синтеза регулятора* множество «внутренних» устойчивых допустимых состояний («множество достижимости») X_{reach} *для системы управления* в общем случае получить невозможно, так как оно возникает одновременно с возникновением самой системы управления, то есть одновременно с замыканием коммутативной диаграммы на рис. 1.3 и рис. 1.4, и обусловлено проявлением «системного эффекта» (эмерджентности). Вместе с тем *с учетом результатов нашей теории этот «системный эффект» можно рассчитать*: после синтеза регулятора это множество может быть получено, как сейчас говорят, на «цифровом двойнике», то есть на цифровой модели системы управления. Множество допустимых состояний X_{reach} можно получить и в результате прямых экспериментальных, численных исследований указанного «цифрового двойника». Так или иначе, *проблема неопределенности «внутренних» устойчивых допустимых состояний многомерной системы управления окончательно не снимается*. Причем вряд ли эта проблема возникает только в рамках рассматриваемой технологии синтеза многомерных регуляторов. «Системные эффекты» должны возникать и возникают в контурах управления с любыми регуляторами и требуют тщательного исследования. В рамках нашей теории и технологии синтеза, по крайней мере, выясняется причина «не ожидаемых эффектов» и, исходя из нее, предлагается простой путь их парирования.

В многомерном случае, когда класс регуляторов W^{-1} по критерию (1.26) определен, то есть установлено, что объект (1.1) управляем, уравнение (1.1) модели объекта достаточно просто приводится к виду

$$\dot{X}_1 = A_1 X_1 + B_1 U \,. \tag{1.33}$$

Здесь новый вектор состояния X_1 имеет размер $n_1=m$, матрица A_1 – размер $n_1 \times n_1 = m \times m$, матрица B_1- размер $n_1 \times m = m \times m$. Приведение (1.1) к виду (1.33) в рассматриваемом линейном стационарном случае (A=const, B=const) осуществ-

ляется путем понижения порядка модели (1.1) методом достаточно простых выражений «свободных» компонент вектора X через другие компоненты и подстановки этих «свободных» компонент в оставшиеся уравнения модели (1.1). Под «свободными» в X понимаются компоненты, на которые никакие компоненты вектора U напрямую не воздействуют. Если же таких «свободных» компонент в модели (1.1) не окажется в виду особенностей структуры матрицы B, то указанное выше преобразование модели (1.1) путем понижения ее порядка от n до $n_1=m$ удается, тем не менее, осуществить. Иногда, наоборот, может возникнуть необходимость сохранения в преобразованной модели (1.33) «свободных» компонент исходной модели (1.1), так как цель управления состоит в регулировании именно «свободных» компонент. Такое преобразование линейной модели (1.1) к виду (1.33) также легко осуществимо.

Любое преобразование (1.1) к виду (1.33) приведет к необходимости изменения формы критерия (1.26). Он приобретет вид

$$W_1^{-1}W_1 = I_m, \tag{1.34}$$

где W_1 – матричная передаточная функция объекта (1.33) размера $m \times m$, W_1^{-1} – многомерная матричная передаточная функция изоморфного регулятора размера $m \times m$ более узкого единственного класса, чем класс W^{-1}.

Вполне очевидно, что после приведения модели объекта (1.1) к виду (1.33) форма соотношений (1.5), (1.6) не поменяется, но структура, например, матричной единицы e_X станет другой: матрица e_X размера $n \times n$ преобразуется в матрицу e_{X1} размера $m \times m$, причем $e_{X1} = I_m$, где I_m – единичная матрица, то есть W^{-1} станет обычной обратной к W.

Например, если в рассмотренном примере (1.1), (1.8) матрицу B задать в виде

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix}, \tag{1.35}$$

то есть обеспечить равенство $m=n$, то непосредственной подстановкой в (1.3), (1.7), (1.19) можно убедиться, что e_{X1} вместо (1.20) станет обычной единичной матрицей, то есть обычным изоморфизмом. Действительно, исходя из (1.1), (1.3) и (1.8) и с учетом (1.35), получим

$$\Phi = \begin{bmatrix} \dfrac{(p-a_{22})}{\Delta} & \dfrac{a_{12}}{\Delta} \\ \dfrac{a_{21}}{\Delta} & \dfrac{(p-a_{11})}{\Delta} \end{bmatrix}, \tag{1.36}$$

$$G = \begin{bmatrix} \dfrac{b_{11}(p-a_{22})}{\Delta} & \dfrac{b_{22}a_{12}}{\Delta} \\ \dfrac{b_{11}a_{21}}{\Delta} & \dfrac{b_{22}(p-a_{11})}{\Delta} \end{bmatrix}. \tag{1.37}$$

Тогда регулятор в соответствии с (1.7), (1.36), (1.37) можно найти из соотношения

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{b_{11}(p-a_{22})}{\Delta} & \dfrac{b_{22}a_{12}}{\Delta} \\ \dfrac{b_{11}a_{21}}{\Delta} & \dfrac{b_{22}(p-a_{11})}{\Delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{1.38}$$

Выписывая из (1.38) равенства для коэффициентов $k_{11}, k_{12}, k_{21}, k_{22}$, можно определить *единственный регулятор*

$$G^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{(p-a_{11})}{b_{11}} & \dfrac{-a_{12}}{b_{11}} \\ \dfrac{-a_{21}}{b_{22}} & \dfrac{(p-a_{22})}{b_{22}} \end{bmatrix}. \tag{1.39}$$

И, наконец, по формуле (1.19) определяем единицу e_{X1} на X_1, которая, как нетрудно убедиться, в данном случае равна обычной единичной матрице размера 2×2.

Указанные преобразования, по сути, соответствуют перепроецированию уравнений объекта из предельно расширенного пространства состояний X в другой координатный базис X_1, в котором размерность пространства состояний сужается до размерности пространства управлений, то есть движение объекта рассматривается в едином пространстве состояний-управлений. Понятно, что после преобразования (1.1) к виду (1.33) в контуре управления нужно будет использовать модель (1.33) с регулятором W_1^{-1}. «Линейный», разомкнутый контур управления в этом случае представлен на рис. 1.10. Применительно к этому контуру множество желаемых состояний будет не больше множества допустимых (достижимых) для системы управления состояний: $X_{1\text{des}} \subseteq X_{1\text{reach}}$. То есть какой бы вектор состояния из $X_{1\text{des}}$ мы не назначили в качестве желаемого, он будет

лежать в множестве внутренне допустимых $X_{1\text{reach}}$ и система сможет его физически реализовать.

$$X_{1\text{des}} \xRightarrow{W_{1\text{ref}}} X_{1\text{set}} \xRightarrow{W_1^{-1}} U \xRightarrow{W_1} X_1$$

Рис. 1.10. Разомкнутый контур управления в базисе X_1

Подадим, как мы делали ранее, на вход регулятора на рис. 1.10 желаемый входной сигнал $X_{1\text{des}} = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}3 \end{bmatrix}^T$. Понятно, что в этом случае сигнал X_1 на выходе системы управления в установившемся режиме будет в точности равен желаемому, так как $e_{X1} = I_m$.

Для контура, показанного на рис. 1.10, существенно проще, чем для исходного контура (см. рис. 1.6) построить замкнутый контур управления: в замкнутом контуре, показанном на рис. 1.11, отвечающем критерию (1.34) и модели (1.33), в обратной связи должна использоваться обычная единичная матрица I_m, отвечающая единице $e_{X1} = I_m$. В связи с этим на рис. 1.11 в обратной связи эта единичная матрица не показана, но подразумевается.

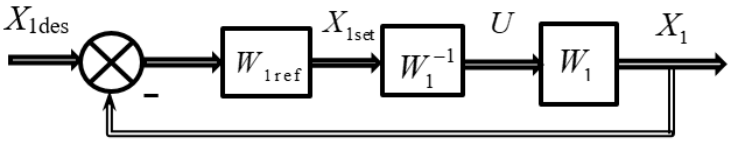


Рис. 1.11. Замкнутый контур управления в базисе X_1

Для исходного разомкнутого контура, представленного на рис. 1.6, ОС в замкнутом контуре, как видно из рис. 1.8, имеет существенно более сложную структуру, обусловленную наличием в ней единицы $e_X = e_X^{-1} : X \to X_{\text{set}}$ размера $n > m$, являющейся необыкновенным изоморфизмом. Управление объектом в контурах регулирования на рис. 1.6 и рис. 1.8 осуществляется в предельно расширенном пространстве состояний, что, как мы отмечали, приводит к различным «системным эффектам» и вызывает трудности в назначении желаемого вектора состояния. Можно ожидать, что более сложным для контура, показанного на рис. 1.8, будет и вопрос выбора передаточной функции W_{ref} эталонной модели. В связи с этим при построении системы управления многомерным многосвязным линейным MIMO-объектом целесообразно в его модели осуществлять переход к предельно суженному до размера вектора управления U пространству состояний.

Таким образом, всегда, по возможности, целесообразно приводить модель многомерного многосвязного объекта (1.1) к виду (1.33) и строить контур управления с регулятором, определяемым по критерию (1.34). При этом необязательно убеждаться в управляемости объекта по полной, расширенной модели (1.1), вычисляя регулятор по формуле (1.7). Можно сразу осуществлять преобразование модели (1.1) к виду (1.33). Вполне очевидно, что *осуществимость такого преобразования является еще одним критерием управляемости исходного объекта* (1.1). Для приведения системы дифференциальных уравнений (1.1) к виду (1.33) с требуемым составом компонент вектора состояния разработано достаточно много методов. Например, некоторые методы редукции (понижения порядка) моделей линейных объектов изложены в [6]. Здесь на методах указанных преобразований останавливаться не будем.

Если говорить на языке «теории вложения» [4-6, 46-49], то из приведенных здесь рассуждений можно сделать вывод, что при синтезе регулятора для MIMO-объекта модель объекта, характеризуемую вектором состояния размера $n > m$, без соответствующих преобразований не рекомендуется «вкладывать» в изоморфизм меньшего размера, соответствующий, например, размеру m вектора управления. Перед синтезом регулятора вектор состояния такой модели рекомендуется предварительно преобразовать в новый базис размера m, что существенно упростит как процедуру «вложения», так и синтез регулятора, построение контуров управления, назначение желаемых состояний и избавит от нежелательных, а иногда и непредвиденных «системных эффектов». В частности, к таким эффектам, как представляется, можно отнести выявленный факт не единственности регуляторов (единственности с точностью до класса), определяемых как в нашей теории, так и в «теории вложения» [4-6, 46-49]. В нашей теории, как показано выше, от такой не единственности можно избавиться путем преобразования координатного базиса пространства состояний объекта управления.

1.4. Примеры синтеза и исследования изоморфных регуляторов

Прежде чем переходить к примерам, сделаем несколько замечаний, вытекающих из рассмотренной технологии синтеза изоморфных регуляторов. Во-первых, как мы убедились, линейную управляемую систему (1.1) путем несложных манипуляций всегда можно привести к виду (1.33), в котором $n=m$. Во-вторых, как следует из условия (1.34) для синтеза многомерного регулятора или еще более простого условия (1.27) для скалярного регулятора, *характеристики как разомкнутого, так и замкнутого контуров управления, показанных на рис.* 1.10 *и рис.* 1.11, *практически полностью определяются только передаточной функцией эталонной модели*. Так применительно к SISO-объекту замкнутый контур

управления, представленный на рис. 1.11, с учетом (1.27) будет иметь вид, показанный на рис. 1.12.

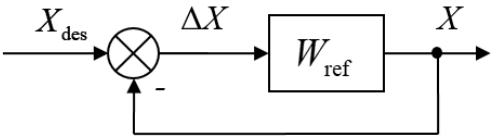


Рис. 1.12. Замкнутый контур управления с эталонной моделью

Если модель точно соответствует объекту, то в замкнутом контуре на рис. 1.11 передаточная функция «регулятор-объект» от заданного состояния X_{set} к текущему X близка к единичной. Такому контуру отвечает передаточная функция

$$\Phi = W_{ref}(I + W_{ref})^{-1}, \tag{1.40}$$

в структуру которой «вписывается» рассмотренная ранее в качестве примера передаточная функция (1.30).

Понятно, что замкнутый контур даже при некоторой неадекватности модели реальному объекту, будет обладать определенной робастностью, то есть нечувствительностью к малым отличиям модели от объекта. При правильно синтезированном изоморфном регуляторе, адекватной модели и отсутствии ограничений на управление движение объекта будет полностью и с абсолютной точностью определяться движением эталонной модели даже в разомкнутом по реальному выходу X, контуре. В этом смысле изоморфный регулятор является предельным по достижимому качеству переходных процессов.

Если по каким-либо причинам реальный объект существенно отличается от модели, использованной при синтезе регулятора W^{-1}, разомкнутый контур может оказаться недостаточно робастным. В этом случае используют замкнутый контур. При этом под эталонной моделью W_{ref} следует понимать обобщённую передаточную функцию, выполняющую как функцию задатчика желаемого движения X_{set} (то есть функцию исходной эталонной модели - см. рис. 1.10), так и функцию корректирующего устройства-«предкомпенсатора», компенсирующего указанное несоответствие модели объекту и обеспечивающего необходимую степень астатизма, робастности и устойчивости контура к шумам. В нашем случае эталонная модель-предкомпенсатор по смыслу отличается от «предкомпенсаторов», рассматриваемых, например, в [5], где «эквивалентные предкомпенсаторы» вводятся собственно для «компенсации» (исключения) ОС в контурах управления. Здесь, наоборот, предкомпенсатор необходим в контуре с ОС,

«компенсирующей» неадекватность модели объекту, то есть в замкнутом контуре.

Так как характеристики замкнутого и разомкнутого контуров определяются в основном структурой эталонной модели, синтез такой модели по заданным требованиям является ответственной и в общем случае нетривиальной задачей. Вместе с тем для многих объектов некоторые требования к эталонной модели могут быть существенно смягчены (например, по порядку астатизма и т.д.), что позволяет использовать относительно простые эталонные модели.

Пример 1. Продолжим рассмотрение и исследование объекта (1.1), (1.3) с матрицами (1.8), (1.36). Мы убедились, что при рассмотрении объекта в исходной форме регулятор можно определить с точностью до класса (1.17), но использовать такой регулятор на практике достаточно сложно. В связи с этим по результатам исследования была выработана рекомендация по понижению размера вектора состояния *X* до размера вектора управления *U*. Последуем этой рекомендации.

Запишем (1.1) с учетом (1.8) в виде

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_{11}u_1, \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2. \end{cases} \tag{1.41}$$

В форме Лапласа, понижая порядок (1.41) до меньшего размера *B* в (1.8), с учётом $x_2 = a_{21}(p - a_{22})^{-1}x_1 = ax_1$, где $a = a_{21}(p - a_{22})^{-1}$, получим

$$\begin{cases} x_1 = bu_1, \\ x_2 = ax_1, \end{cases} \tag{1.42}$$

где $b = \dfrac{b_{11}}{p - a_{11} - a_{12}a}$. Еще более упрощая (1.42), получим

$$x_2 = ab\,u_1 = W_O\,u_1, \tag{1.43}$$

где W_o - передаточная функция объекта, определяемая по формуле

$$W_O = ab = \frac{b_{11}a_{21}}{\Delta}. \tag{1.44}$$

В (1.44) в соответствии с (1.9) $\Delta = (p - a_{11})(p - a_{22}) - a_{12}a_{21}$.

Как мы знаем, в скалярном случае синтез регулятора сводится к обращению передаточной функции SISO-объекта. Следовательно, в данном случае регулятор определяется по формуле

$$G^{-1} = W_O^{-1}. \tag{1.45}$$

Результаты моделирования рассматриваемого объекта с регулятором (1.45) в разомкнутом и замкнутом контурах управления отражены в работе [3]. В частности моделирование идеального разомкнутого контура с регулятором (1.45) и эталонной моделью $W_{ЭМ} = k(Tp+1)^{-1}$ при k=1 и T=0,4, показало, что x_2 абсолютно точно отслеживает задаваемое этой моделью движение. При неточном знании элементов a_{ij} в (1.8), (1.41) в разомкнутом контуре появляется ошибка отработки x_2 порядка ошибки задания a_{ij}. На рис. 1.13 качественно показан вид переходного процесса (график 1) при a_{21}=1.25 (+25%).

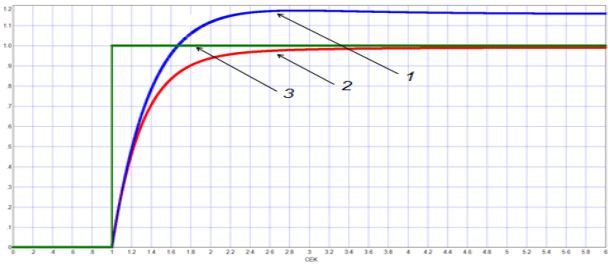


Рис. 1.13. Графики моделирования контуров управления объектом (1.41)

Замыкание контура обратной связью наделяет контур свойством робастности: график 2 показывает, что при увеличении коэффициента усиления до k =99 с одновременным увеличением T в $(1+k)$ раз даже при увеличении параметра a_{21} на 25%, переходный процесс практически совпадает с процессом в идеальном контуре. Задающее воздействие показано на графике 3. По оси абсцисс отложено время, по оси ординат – величина (амплитуда) сигналов в относительных единицах. Аналогичные результаты получены и при варьировании других элементов матриц в (1.8). Моделирование показало, что разомкнутый контур обладает хотя и недостаточной, но прогнозируемой робастностью, а для замкнутого контура диапазон варьирования элементов матриц в (1.8), при условии сохранения качества переходных процессов, может составлять десятки процентов.

Пример 2. Рассматривается объект с передаточной функцией [32]

$$W_o = \frac{e^{-\Delta_o p}}{T_o p + 1} \cdot \frac{1}{Tp+1} \cdot \frac{g}{p^2}. \tag{1.46}$$

Решается задача точного слежения x за заданным значением $x_{зад}$, формируемым на выходе эталонной модели (ЭМ) с передаточной функцией $W_{ЭМ}$. В этом случае регулятор определяется по формуле

$$S_R^{-1} = W_o^{-1} = \frac{p^2(1+T_o p)(1+Tp)}{ge^{-\Delta_o p}} \approx \frac{p^2(1+T_o p)(1+Tp)(1+\Delta_o p)}{g}. \qquad (1.47)$$

Здесь для регулятора используется принятое в 5-й главе 1-й части и в [32] обозначение $S_R^{-1} = G^{-1} = W_O^{-1}$. Результаты моделирования разомкнутого и замкнутого контуров с эталонными моделями

$W_{ЭМ} = \dfrac{1}{0.4p+1} \cdot \dfrac{1}{1.5p+1}$ - для разомкнутого контура и

$W_{ЭМ} = \dfrac{1}{0.4p+1} \cdot \dfrac{99}{1.5*100p+1}$ - для замкнутого контура

качественно показаны на рис.1.14 для ступенчатого и синусоидального входных сигналов: графики 1 - для разомкнутого контура, 2 – для замкнутого контура, 3 – задающие воздействия.

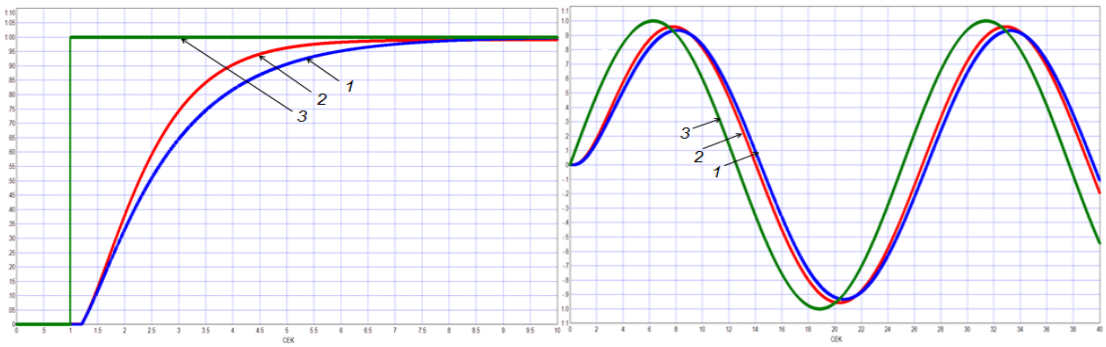


Рис. 1.14. Моделирование контуров управления объектом (1.46)

На рис.1.15 приведен качественный вид графиков для процессов в разомкнутом контуре (график 1) и в замкнутом контуре (график 2), когда на вход эталонной модели подавался зашумлённый нормальным белым шумом синусоидальный сигнал (график 3).

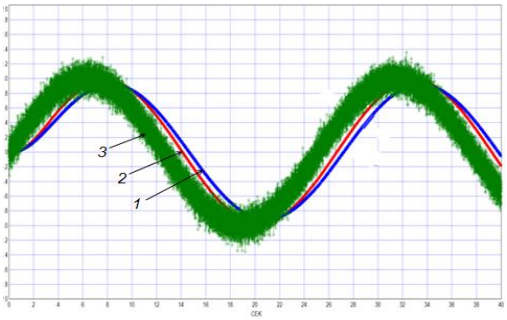


Рис. 1.15. Отработка зашумлённого сигнала при искажении параметра T

Амплитуда шума составляла 10% от амплитуды полезного сигнала. Одновременно с шумом в объект (1.46) вводилось искажение параметра T=1.25 сек (+25%). Видно, что качество процессов в разомкнутом контуре мало отличается от качества процессов в замкнутом контуре. При этом эталонная модель обеспечивает высокое качество фильтрации шумов. Таким образом, разомкнутый контур даже для сложных объектов при наличии существенных отклонений параметров от принятых в модели и при наличии шумов является достаточно робастным и в определённом смысле «предельным» по достижимому качеству переходных процессов. Очевидно, что замыкание контура обратной связью необходимо лишь в случае значительных (на десятки процентов) отклонений параметров объекта от принятых в модели.

Сравнение предлагаемого метода синтеза регулятора для объекта (1.46) с другими методами показало [32], что разработанный метод имеет преимущества как по уровню формализации процедур синтеза и исключения эвристических приёмов, так и по качеству переходных процессов и робастности контура.

Важной проблемой является выбор эталонных моделей, формализующих *цель управления* и полностью определяющих качество переходных процессов в контурах с изоморфным регулятором. Еще одним достоинством рассматриваемого метода является то, что назначение эталонной модели является отдельной задачей, практически не связанной с процедурой синтеза регулятора. Более того, эталонная модель может вводиться в контур разными способами.

Действительно, разомкнутый «линейный» контур, показанный на рис. 1.16, может быть представлен и в ином виде - см. рис. 1.17. Здесь эталонная модель $W_{ЭМ}$: $X_ж \to X$ в явном виде связывает X и желаемое состояние $X_ж$ с точностью до изоморфизма $W_о$, относительно которого в случае SISO-объекта можно рассматривать композиции всех отображений внутри коммутативной диаграммы (контура управления).

$$X_ж \xrightarrow{W_{ЭМ}} X_з \xrightarrow{(S_R)^{-1}} U \xrightarrow{W_о} X$$

Рис. 1.16. Разомкнутый контур для объекта с передаточной функцией W_O

$$\begin{tikzcd} x_ж \arrow[r, "(S_R)^{-1}"] \arrow[rr, bend right, "W_{ЭМ}"'] & u \arrow[r, "W_о"] & x \end{tikzcd}$$

Рис. 1.17. Контур управления объектом (1.46) с эталонной моделью в коммутативной диаграмме

Как видно из рис. 1.17, в этом случае

$$W_{ЭМ} = W_o S_R^{-1},$$

$$S_R^{-1} = W_o^{-1} W_{ЭМ} = \frac{p^2(1+T_o p)(1+Tp)}{g e^{-\Delta_o p}} \cdot W_{ЭМ} \approx \frac{p^2(1+T_o p)(1+Tp)(1+\Delta_o p)}{g} \cdot W_{ЭМ}, \qquad (1.48)$$

то есть, в отличие от (1.47), в данном случае регулятор включает в свою структуру $W_{ЭМ}$. Тем не менее, из рис. 1.16 и рис. 1.17 и выражений (1.47) и (1.48) следует, что передаточная функция от $X_ж$ к X в обоих случаях равна передаточной функции $W_{ЭМ}$, то есть контуры эквивалентны.

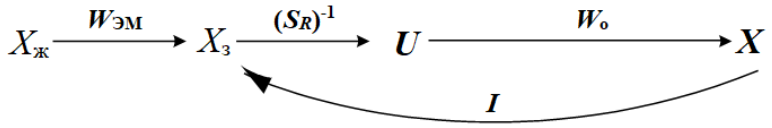


Рис. 1.18. Композиция отображений для слежения за эталонной моделью

Следует иметь в виду, что в качестве изоморфизма, относительно которого синтезируется регулятор в случае SISO-объекта, может использоваться не только тождественный изоморфизм $e_U \equiv I_m$ в соответствии с (1.2) и рис. 1.1, но и любое другое отображение-изоморфизм, входящее в коммутативную диаграмму управляемой системы, например, передаточная функция объекта W_o, отображение $W_{ЭМ}$, характеризующее структуру изоморфной эталонной модели на рис. 1.17, или отображение I: $X \to X_з$ на рис. 1.18, фактически являющееся «эталонной моделью» точного соответствия в обратной связи X заданному значению $X_з$. Это возможно в силу того, что все отображения, входящие в соответствующие коммутативные диаграммы, изначально являются обычными изоморфизмами одинакового «размера».

Смысл диаграммы, показанной на рис. 1.17, заключается в том, что она доказывает существование факторизации, то есть реализации изоморфного отображения $W_o = W_{ЭМ} S_R$ посредством композиции отображений S_R^{-1} и $W_{ЭМ}$. Эта композиция означает выполнение принципа суперпозиции применительно к отображению W_o: каждое из отображений в композиции локализует свою группу свойств контура управления, а в целом в контуре реализуются обе группы свойств. Причем *для управляемого объекта такая факторизация* W_o *обязательно существует* (в общем случае и для нелинейных ОУ). Отображение-регулятор S_R^{-1}: $X_ж \to U$ *при любом* $W_{ЭМ}$ является *средством* реализации и локализации свойства управляемости объекта (каждому $X_ж$ однозначно ставит в соответствие потребное управление U), а отображение $W_{ЭМ}$: $X_ж \to X$ для данного S_R^{-1} формализует и локализует *цель управления* - свойство обеспечения требуемого качества управ-

ления. То есть S_R^{-1} и $W_{ЭМ}$ можно синтезировать независимо. Для скалярного объекта это осуществляется весьма просто. Для многосвязных систем ($m>1$), как было показано, процедура синтеза регулятора и, соответственно, эталонной модели сложнее, но, тем не менее, является вполне формализованной. Вывод же состоит в том, что *если существует средство управления в форме регулятора* S_R^{-1}, то *достижима любая цель управления в форме ЭМ* $W_{ЭМ}$, назначаемая с учетом ограничений на ресурсы объекта управления. Эти ограничения формализуются в передаточной функции (модели) объекта W_o.

Таким образом, эталонная модель может не входить (см. рис. 1.18, рис. 1.9 и формулу (1.47)), либо входить (см. рис. 1.17, рис. 1.8. рис. 1.11 и формулу (1.48)) в качестве самостоятельной части в структуру синтезируемого регулятора. В обоих случаях передаточная функция «линейного» разомкнутого контура одна и та же и равна $W_{ЭМ}$.

Хотя проблема назначения эталонной модели является самостоятельной, тем не менее, при ее выборе должны учитываться особенности объекта и регулятора (например, с точки зрения его физической реализуемости в совокупности с эталонной моделью). В целом, проблема синтеза эталонной модели является не тривиальной, и в определенном смысле «внешней» по отношению к синтезу изоморфных регуляторов, как и вообще «внешней» является цель по отношению к разрабатываемой системе [51] в том смысле, что система строится с точностью до реализации некоторой извне заданной цели-изоморфизма (см. следствие 8 в 3-й главе 1-й части книги). Главное, чтобы цель была достижимой и реализуемой при ограничениях на ресурсы объекта управления.

Методы решения проблемы синтеза эталонной модели интенсивно развиваются. Ее выбор может быть осуществлён, например, по инженерным критериям качества, а также по методикам, рассмотренным в [32, 33, 37, 52] и в других работах. Здесь акцент делался на рассмотрение методики синтеза изоморфных регуляторов, исследование и демонстрацию их свойств, а в качестве эталонных моделей выбирались простые передаточные функции, назначаемые по инженерным критериям качества. Полученные результаты важны для практики с учетом высокой актуальности решения задач синтеза линейных регуляторов для систем различного назначения [32, 33, 37, 52-56].

Таким образом, разработана технология синтеза изоморфных регуляторов на основе теории, изложенной в [38, 57, 58], а также в 5-й главе 1-й части книги и в этой главе. Показано, что изоморфные регуляторы являются простыми по структуре, а процедура их синтеза как для объектов с одним входом и одним вы-

ходом, так и для многомерных многосвязных объектов максимально формализована и в общем случае сводится к обращению матричной передаточной функции объекта управления по правилам, определяемым структурой коммутативной диаграммы системы управления. При этом требуемое качество переходных процессов полностью определяется и обеспечивается выбором эталонной модели. В этом смысле изоморфные регуляторы обладают свойством «предельности» по уровню достижимого качества переходных процессов: задача синтеза декомпозируется в соответствии с принципом суперпозиции – обеспечение управляемости объекта локализуется в регуляторе, а обеспечение требуемого качества управления - в эталонной модели. Соответственно, регулятор и эталонную модель можно синтезировать независимо, но с учетом структуры объекта управления.

Приведенные примеры подтверждают указанные свойства изоморфных регуляторов и их робастность в отношении значительных параметрических и шумовых возмущений в структуре объекта и в контурах управления. Хотя, по сути, примеры 1 и 2 приведены как методические, тем не менее нужно иметь в виду, что использованные в них модели и передаточные функции отражают процессы, протекающие в реальных объектах. Так в примере 1 рассматривается простая модель продольного короткопериодического движения самолета, позволяющая управлять угловой скоростью тангажа и углом атаки посредством отклонения руля высоты (стабилизатора). Пример 2, вообще говоря, нельзя назвать простым, так как в нем рассматривается достаточно сложная передаточная функция, содержащая, наряду с инерционными, два интегрирующих звена и звено запаздывания, характеризующих в совокупности продольное движение вертолета с участием летчика в контуре слежения за заданной высотой полета с присущими «среднему пилоту» параметрами модели человека-оператора.

1.5. Сравнительные исследования некоторых алгебраических методов формализованного синтеза регуляторов для следящих систем

В работе [66] нами было проведено сравнение известного алгебраического метода [37, 64, 65] формализованного синтеза регуляторов для следящих систем с нашим простым методом формализованного синтеза, основанным на использовании изоморфных регуляторов. Оба метода по применяемому математическому аппарату являются алгебраическими, но отличаются начальными посылками и процедурами синтеза регуляторов. В силу этого их сравнение представляло большой интерес. Сравнительные исследования методов были выполнены на примере разработки регулятора для управления высотой полета вертолета.

Отметим, что до выполнения исследований, результаты которых обобщены в [66], в работе [32] нами было проведено сравнительное исследование большого числа методов синтеза регулятора для следящей системы на примере решения прикладной задачи. В [32] было показано, что даже для класса простых линейных стационарных динамических систем класса SISO, часто используемых в приборных комплексах, методы синтеза регуляторов сложны и слабо формализованы. Применительно к объекту с передаточной функцией (1.46) на основе различных наиболее формализованных подходов к синтезу было разработано большое количество регуляторов: 3 варианта регуляторов на основе метода обратных задач динамики [67], регуляторы в вариантах пропорционально-дифференциального (ПД) и пропорционально-интегрально-дифференциального (ПИД) управления по критерию оптимального модуля [68], 2 варианта регуляторов по критерию симметричного оптимума [69], регулятор на основе указанного выше алгебраического метода [37, 64, 65], регулятор в форме Ресвика [67], регулятор, оптимальный по критерию технического оптимума [69]. По результатам сравнительных исследований этих регуляторов было установлено, что среди множества рассмотренных подходов к синтезу преимуществом обладает именно алгебраический метод (АМ) [37, 64, 65]. Это относится как к уровню формализации процедуры синтеза, так и к качеству получаемых переходных процессов. В связи с этим сравнение с АМ в работе [66] нашего, в своей основе также алгебраического, метода синтеза изоморфных регуляторов одновременно означало его косвенное сравнение с методами, проанализированными в [32]. Актуальность такому сравнению придавало также то, что указанное преимущество АМ в уровне формализации процедур синтеза и в конечных показателях регулирования было сопряжено с определенными трудностями при разработке регулятора и его реализации в инженерной практике, связанными со сложностью процедуры синтеза, основанной на факторизации передаточной функции объекта управления.

В [66] было отмечено, что разработанный на основе общего принципа изоморфизма [38] метод синтеза изоморфных регуляторов (МСИР) [3], имеет, как и АМ [37, 64, 65], алгебраическую основу. Отличаются же методы исходными посылками и процедурой синтеза. Несмотря на достаточно сложную, на первый взгляд, основанную на морфизмах, теорию формирования структуры изоморфного регулятора для управляемых систем весьма общего вида, изложенную здесь и ранее в [3, 38], структура изоморфного регулятора для одномерных, скалярных систем, наиболее часто используемых на практике, получилась весьма простой, не требующей при инженерном синтезе знаний основ высшей алгебры.

Как показано в [3, 66] и в этой главе, регуляторы, синтезированные на основе МСИР, обладают важными положительными качествами. В частности,

наряду с простотой синтеза, к числу их достоинств относится возможность получения практически идеальных, предельно достижимых по инженерным критериям качества, переходных процессов, качество которых полностью определяется выбором эталонной модели (ЭМ). При этом, как показано здесь и в [3], выбор ЭМ, по сути, не зависит от структуры регулятора, так как общая задача синтеза строго декомпозируется на формализованную и весьма простую задачу синтеза регулятора и на задачу выбора ЭМ, например, в форме желаемой (эталонной) передаточной функции (ПФ) $W_{ЭМ}$, удовлетворяющей заданным критериям качества.

В рамках МСИР первым синтезируется регулятор, который для конкретного управляемого объекта класса SISO является единственным и определяется однозначно, а затем выбирается $W_{ЭМ}$. Регулятор реализует свойство управляемости объекта (формализует обратную связь от заданного состояния объекта к потребному для его реализации управлению), а за формализацию заданной извне цели управления отвечает ЭМ с ПФ $W_{ЭМ}$. Вообще говоря, как показано в [3], собственно задача выбора ЭМ лежит за пределами МСИР и ее решение может быть осуществлено с использованием множества известных методов.

В отличие от МСИР, в рамках АМ [37, 64, 65] и многих других методов, вначале назначается $W_{ЭМ}$ и затем с учетом ее структуры и структуры ПФ объекта синтезируется регулятор. В АМ структура ПФ регулятора жестко определяется как желаемой ПФ, так и ПФ объекта, подвергаемой по определенным правилам специальной процедуре факторизации.

Из [37, 64, 65, 3] следует, что как в рамках МСИР, так и при использовании АМ, выбор $W_{ЭМ}$ является самостоятельной задачей. Ее решение может быть осуществлено на основе различных подходов: например, $W_{ЭМ}$ может выбираться в виде ПФ в форме Вышнеградского [3], либо с использованием фильтров Баттерворта [25], либо на основе других методов, рассмотренных, например, в [3, 52]. В [65] дана рекомендация выбирать $W_{ЭМ}$ в классе биномиальных передаточных функций вида $W=1/(p+1)^n$, так как они обладают монотонным переходным процессом без перерегулирования. Следует отметить, что функции подобного вида уже использовались в классической работе [63] для анализа общих свойств обратной связи.

Таким образом, оба подхода к синтезу регуляторов, основанные на АМ и МСИР, опираются на использование желаемой (эталонной) ПФ $W_{ЭМ}$, но обладают определенными особенностями. Возникает естественная задача их сравнения. Как и в работе [32], здесь и в статье [66] сравнение методов производится

на примере решения практической задачи синтеза регулятора для следящей системы.

Постановка задачи. Рассматривается задача синтеза регулятора для управления вертолетом в вертикальном канале. Применительно к анализируемому режиму полета вертолета его ПФ, как объекта управления, была идентифицирована в виде

$$W_{об}(p) = \frac{2.6}{p \cdot (2 \cdot p + 1)}, \tag{1.49}$$

где p – переменная преобразования Лапласа. Сигналом управления u (выход регулятора) является приращение общего шага винта ($\Delta ОШ$) относительно балансировочного значения; рассогласованием ΔH (вход регулятора) – разность желаемой и фактической (по данным радиовысотомера – РВ) геометрических высот полета. Необходимо каждым из исследуемых методов синтезировать регулятор, обеспечивающий минимум указанной разности высот, определяемой в соответствии с некоторым численным критерием.

Методика синтеза изоморфных регуляторов. Согласно МСИР [3, 38] построим робастный контур управления объектом (1.49) с изоморфным регулятором $(S_R)^{-1}$ – см. рис. 1.19 [3]. Решается задача точного слежения выходом объекта H за заданным значением $H_{зад}$, формируемым эталонной моделью с передаточной функцией $W_{ЭМ}$. В данном случае оператор I, связывающий H и $H_{зад}$, является скалярной единицей (см. рис. 1.19) [3], то есть тривиальным изоморфизмом (взаимно однозначным отображением).

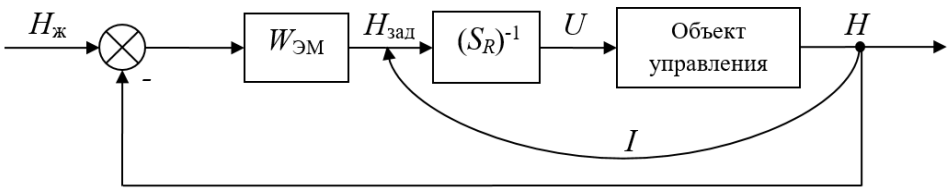


Рис. 1.19. Контур управления объектом для МСИР

Тогда изоморфный с точностью до изоморфизма I регулятор определяется по формуле

$$I = W_{об} \cdot S_R^{-1} \quad \rightarrow \quad S_R^{-1} = W_{об}^{-1}, \tag{1.50}$$

с учетом которой контур управления преобразуется к виду, показанному на рис. 1.20. Как видно из рис. 1.20, качество процессов в контуре при использовании МСИР полностью определяется структурой желаемой ПФ $W_{ЭМ}$, которую можно

выбрать, исходя из структуры желаемой ПФ $W=W_{ЭМ}(1+W_{ЭМ})^{-1}$ замкнутого контура: $W_{ЭМ} = W(1-W)^{-1}$.

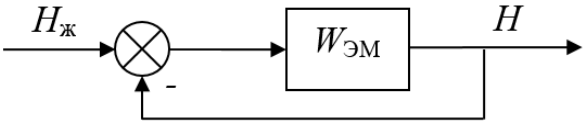


Рис. 1.20. Преобразованный контур управления объектом для МСИР

Из рис. 1.19 видно, что согласно МСИР ПФ обобщенного регулятора (далее - регулятора), включающего изоморфный регулятор $(S_R)^{-1}$ и эталонную модель $W_{ЭМ}$, от ΔH к управлению u имеет вид $R=W_{об}^{-1}\cdot W_{ЭМ}$. Исходя из ПФ объекта (1.49), имеющей второй порядок полинома знаменателя, для физической реализуемости регулятора принимаем

$$W_{ЭМ} = \frac{K}{T_1 \cdot p + 1} \cdot \frac{1}{T_2 \cdot p + 1}. \qquad (1.51)$$

В (1.51) в соответствии с методикой обеспечения астатизма и робастности замкнутого контура управления, предложенной в [3], назначаем коэффициент усиления $K >> 1$. Тогда регулятор можно определить по формуле

$$R(p) = \frac{p \cdot (2 \cdot p + 1)}{2.6} \cdot \frac{K}{T_1 \cdot p + 1} \cdot \frac{1}{T \cdot (K+1) \cdot p + 1}. \qquad (1.52)$$

Для упрощения реализации $R(p)$ запишем его в форме

$$R(p) = \frac{K}{2.6} \cdot \left(\frac{2 \cdot p}{0.1 \cdot p + 1} + 1 \right) \cdot \frac{p}{T \cdot (K+1) \cdot p + 1}. \qquad (1.53)$$

В (1.53) постоянная времени 0.1 сек выбрана эмпирически из соображений физической реализуемости регулятора и наличия для этих целей в (1.52) второго (дополнительного) инерционного звена с малой постоянной времени.

Аналитический алгебраический метод. Суть АМ изложена в [37, 64, 65]. Как показано в [32], АМ по многим критериям является лучшим среди других известных методов синтеза регуляторов. Структура контура управления применительно к АМ представлена на рис. 1.21 [37, 64]. Потребуем [37], чтобы $W_{об}(p) \cdot R(p) = \frac{1}{T \cdot p}$. Тогда при замыкании системы $W_{об} \cdot R$ единичной обратной связью получим ПФ от $H_ж$ к H в виде $\frac{1}{T \cdot p + 1}$.

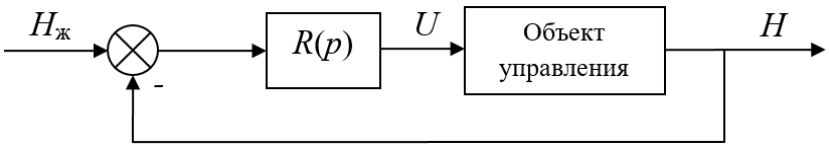


Рис. 1.21. Контур управления объектом для АМ

Из уравнения

$$W_{об}(p)\cdot R(p)=\frac{2.6\cdot R(p)}{p\cdot(2\cdot p+1)}=\frac{1}{T\cdot p} \tag{1.54}$$

получим

$$R(p)=\frac{2\cdot p+1}{2.6\cdot T}. \tag{1.55}$$

По аналогии с МСИР для физической реализуемости регулятора (1.55) введем апериодическое звено с малой постоянной времени, получим

$$R(p)=\frac{1}{2.6\cdot T}+\frac{2\cdot p}{2.6\cdot T\cdot(0.1\cdot p+1)}. \tag{1.56}$$

Здесь, как и в (1.53), постоянная времени 0.1 сек выбрана эмпирически.

Тестирование методов. Полученные регуляторы (1.53), (1.56) тестировались *на полной нелинейной модели* летательного аппарата (далее ЛА), ПФ которого от управления $u=\Delta ОШ$ к выходу $H=H_{рв}$ (геометрическая высота полета) была приближенно идентифицирована в виде (1.49). Рассматривалась следующая тестовая ситуация: полет над рельефом на заданной геометрической высоте. Тестирование проводилось при T=1; 2; 3 сек. Коэффициент усиления в (1.53) принимал значения K= 99; 999; 9999. В качестве показателя качества регулятора рассматривалась величина

$$I=\frac{1}{80}\int_{20}^{100}\left|H_{ж}(t)-H(t)\right|dt, \tag{1.57}$$

где $H_{ж}$(t) - желаемая геометрическая высота полета, H(t) - фактическая геометрическая высота полета ЛА. Предполагалось, что за 20 сек от начала моделирования завершатся переходные процессы, начавшиеся при включении системы управления. Получение информации от объекта управления и синтез управления осуществлялись с частотой 100 Гц.

В результате моделирования выяснилось, что:

1. лучшая обработка задающего воздействия осуществляется при T=1 сек;
2. при синтезе управления по МСИР целесообразно использовать большие коэффициенты усиления K, например, K=9999.

Некоторые результаты моделирования представлены на рис.1.22 и рис. 1.23. По результатам исследований было установлено, что МСИР и АМ практически эквивалентны по качеству отслеживания желаемой траектории.

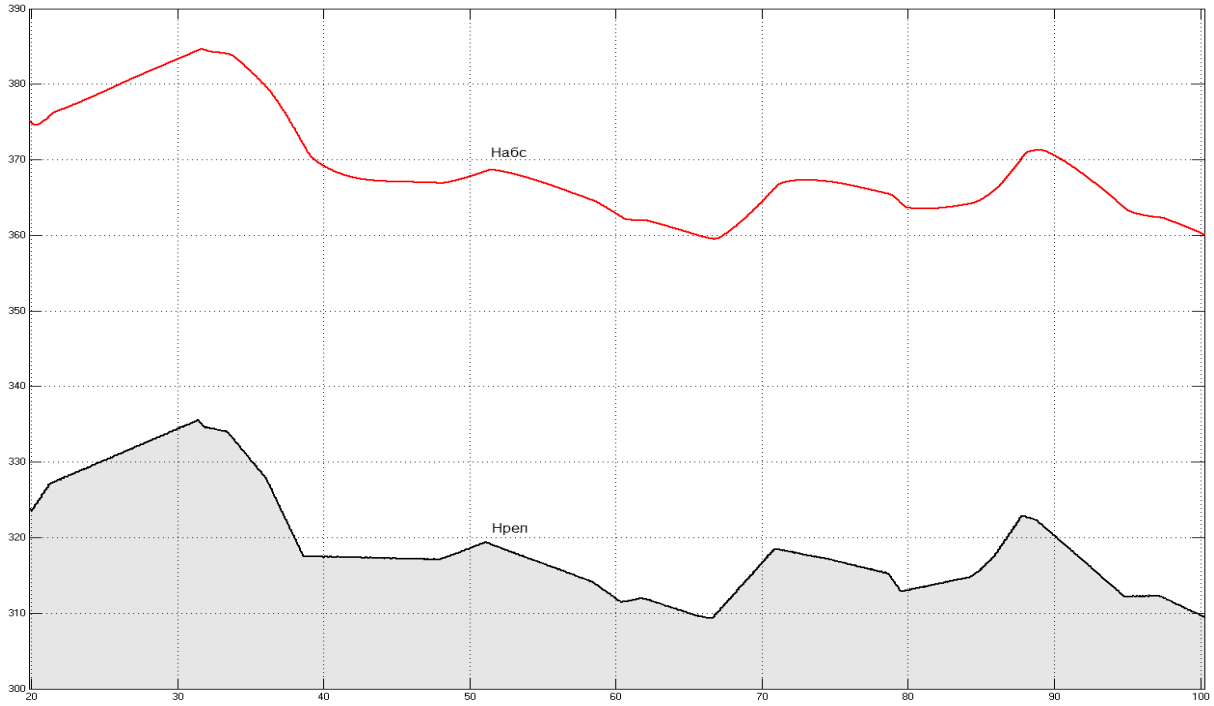


Рис. 1.22. МСИР. Качество регулятора *I*=0.85

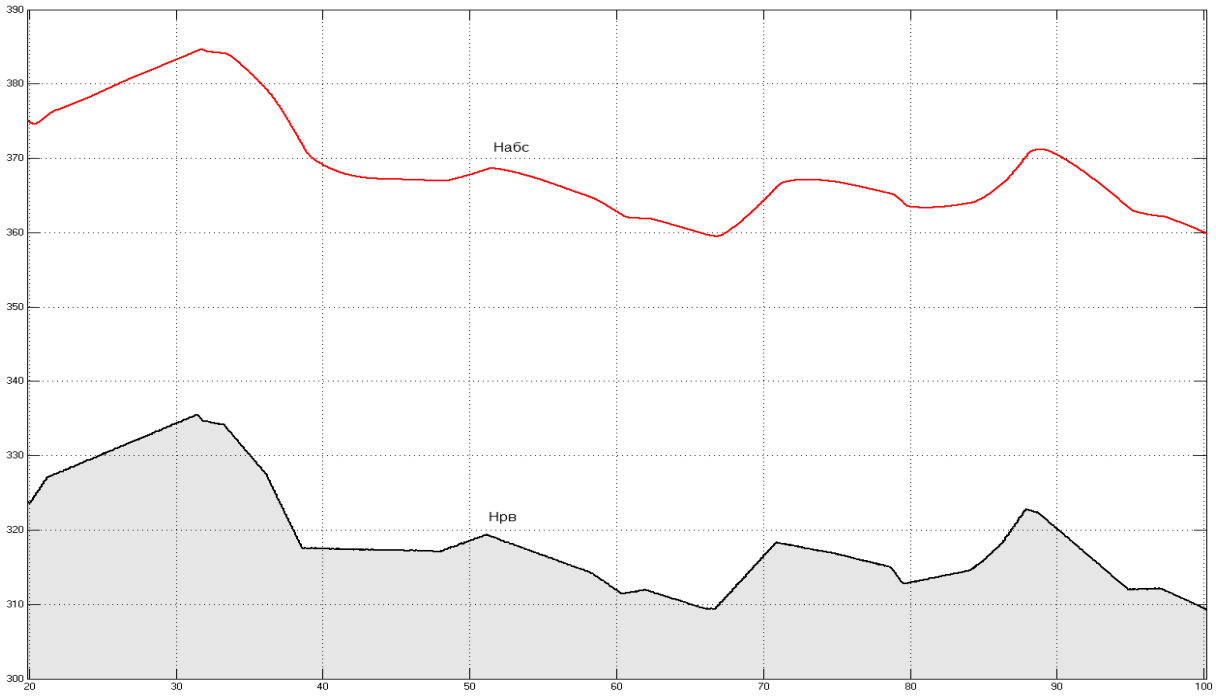


Рис. 1.23. АМ. Качество регулятора *I*= 0.84

Исследование робастности методов. Исследовалась устойчивость регуляторов, синтезированных на основе МСИР и АМ, к неточности определения параметров ПФ объекта управления (робастность регуляторов) при ошибке до ± 50%. Моделирование проводилось при следующих возможных вариантах ошибок в (1.49):

1. K=2.6 + 50%;
2. K=2.6 - 50%;
3. T=2 сек + 50%;
4. T=2 сек - 50%;
5. K=2.6 + 50% и T=2 сек + 50%;
6. K=2.6 + 50% и T=2 сек - 50%;
7. K=2.6 - 50% и T=2 сек + 50%;
8. K=2.6 - 50% и T=2 сек - 50%.

Результаты моделирования сведены в табл.1.1. Графики для вариантов 1-8 по виду аналогичны графикам, приведенным на рис. 1.22 и 1.23, и здесь не показаны. Из таблицы 1.1 видно, что:

1. методы отличаются менее чем на 6 %, т.е. с инженерной точки зрения практически не различимы по качеству управления;
2. в среднем, при ошибочном определении ПФ объекта управления, оба метода имеют одинаковую робастность.

Таблица 1.1. Результаты моделирования при ошибке ± 50%

Вариант	МСИР, I	АМ, I
1	1.19	1.19
2	0.54	0.51
3	0.75	0.77
4	1.04	1.06
5	1.02	1.03
6	1.46	1.47
7	0.56	0.54
8	0.63	0.62

Следует отметить, что для обеспечения робастности регулятора, синтезированного на основе МСИР, в данном случае была применена методика, предложенная в [3] и основанная на применении большого коэффициента усиления. Вместе с тем, при выборе $W_{эт}$ в рамках МСИР (см. рис. 1.20), как и в рамках АМ (см. (1.54) и рис. 1.21), можно назначить $W_{ЭМ}(p) = \dfrac{1}{T \cdot p}$. Тогда передаточные функции контуров с регуляторами, синтезированными на основе МСИР и АМ, полностью совпадут. Это дополнительно объясняет эквивалентность синтезированных скалярных регуляторов, выявленную при моделировании.

Вместе с тем, отметим, что к преимуществам МСИР относится полная формализация и предельная простота процедуры синтеза изоморфного регулятора: как видно из (1.50), изоморфный регулятор определяется тривиальным обращением ПФ объекта. В рамках МСИР проще и выбор желаемой передаточной функции $W_{ЭМ}$: при условии обеспечения заданного качества регулирования и робастности, нужно исходить лишь из требования физической реализуемости обобщенного регулятора $R=W_{об}^{-1}\cdot W_{ЭМ}$. Точнее, с учетом полной компенсации динамики объекта изоморфным регулятором (см. (1.50) и рис. 1.19), требование физической реализуемости локализуется лишь в отношении желаемой передаточной функции $W_{ЭМ}$, а это, как правило, обеспечивается по умолчанию и является дополнительным преимуществом МСИР.

Выводы. Таким образом, были предложены и исследованы регуляторы для отработки желаемой геометрической высоты полета вертолета на основе двух формализованных методов синтеза: на основе метода синтеза изоморфных регуляторов [3, 38] и на основе алгебраического метода [37, 64, 65]. По результатам моделирования обоснован выбор целесообразных значений коэффициентов рассмотренных регуляторов.

Показано, что при выборе рациональных значений коэффициентов, точности отслеживания желаемой геометрической высоты полета с использованием рассмотренных регуляторов отличаются весьма незначительно, что означает практически полную эквивалентность регуляторов. Показано также, что при неточной идентификации ПФ объекта управления, оба метода в среднем имеют одинаковую робастность. Эквивалентность регуляторов в рассматриваемой задаче продемонстрирована и аналитическим расчетом.

В целом, исходя из изложенного в п.п. 1.4-1.5 можно констатировать, что к выявленным преимуществам изоморфных регуляторов относятся:

– простая формализованная процедура синтеза для линейных объектов и особенно для систем класса SISO, исключающая применение эвристических приемов;
– локализация в эталонной модели всех требований к качеству управления;
– обеспечение предельно достижимого (формализуемого в виде эталонной модели) качества управления не только в задачах стабилизации, но и в задачах слежения за заранее неизвестными задающими воздействиями;
– возможность исключения необходимости измерения управляемой координаты и высокая предсказуемость ее значений по задающему воздействию при условии адекватности модели объекту управления;

– простой контроль соответствия параметров модели, заложенной в структуру регулятора, реальным параметрам объекта управления по принципу «канал-модель» путем сравнения выхода эталонной модели с выходом «канала», то есть с измерениями управляемой координаты (при ее доступности для измерений);
– высокая надежность и предсказуемость результатов управления непосредственно не измеряемыми координатами объекта (при условии адекватности модели объекту управления);
– приемлемая и предсказуемая робастность простого «линейного» разомкнутого контура с изоморфным регулятором при относительно малом отличии параметров модели, заложенной в его структуру, от реальных параметров объекта управления;
– достаточно простая реализация замкнутого робастного контура с требуемым качеством управления в случае существенного отличия параметров модели, заложенной в структуру регулятора, от реальных параметров объекта управления;
– требование физической реализуемости изоморфного регулятора существенно смягчается за счет выбора эталонной модели, исключающей использование производных высоких порядков. Если же они необходимы, то могут быть сформированы в результате обработки достаточно гладких сигналов, формируемых на выходе эталонной модели, а не путём дифференцирования зашумленных сигналов, поступающих с выходов объекта управления;
– возможность существенного сглаживания и фильтрации шумов в задающем воздействии посредством эталонной модели.

К недостаткам, на наш взгляд, можно отнести:

– достаточно высокую сложность, в сравнении с системами класса SISO, процедуры формализованного синтеза изоморфных регуляторов и выбора эталонных моделей для многосвязных систем;
– относительно низкий уровень унификации структур изоморфных регуляторов в сравнении, например, с ПИД-регуляторами, в силу уникальности передаточных функций объектов управления. Вместе с тем, недостаток отчасти компенсируется отсутствием необходимости подбора структур и параметров регулятора. Кроме того, для многих классов объектов управления, имеющих типовые передаточные функции, структура изоморфных регуляторов и эталонных моделей может быть унифицирована по мере накопления опыта проектирования и пополнения соответствующих баз данных.

1.6. Обсуждение результатов, заключение

В заключение этой главы, исходя из изложенного, сделаем важное замечание: определять *систему управления* как отношение на прямом (декартовом) произведении множеств входов (управлений) и произвольных желаемых выходов (состояний), как это иногда делается в литературе [8, 43-45], не всегда допустимо, так как в общем случае не все элементы этого произведения достижимы системой. Система управления как раз «вырезает» из указанного декартова произведения множеств только достижимые (внутренне допустимые) для нее элементы.

Структура изоморфных регуляторов, прямо отражающая структуру модели объекта управления, подтверждает правомерность утверждения известного в теории систем *закона необходимого разнообразия* [50]: мы убедились, что регулятор, реализующий управляемость объекта и обеспечивающий достижение цели управления, должен иметь «разнообразие» не меньшее «разнообразия» самого управляемого объекта. Под «разнообразием» здесь понимается совокупность всех формальных показателей, характеризующих модель объекта: например, количество и структура уравнений, количество и значения параметров этих уравнений. Вообще, как мы убедились, *между моделью объекта и регулятором в системе управления должно обеспечиваться полное и точное взаимно однозначное, точнее взаимно обратное, соответствие*.

Акцентируя внимание на системных аспектах рассмотренной технологии синтеза регуляторов отметим, что еще одним критерием управляемости многомерных многосвязных объектов, помимо простых проверяемых равенств (1.7), (1.25), (1.26), является осуществимость перехода от их предельно расширенного пространства состояний к предельно сжатому пространству управлений. Вообще о наличии двух таких предельных пространств и состояний в любой системе – предельно расширенной и предельно сжатой размерности - мы говорили в соответствующих утверждениях, сформулированных в форме следствия 10 к основной лемме в 3-й главе и в форме утверждений в 13-й главе 1-й части книги. Как следует из результатов, полученных в данной главе, эти и другие утверждения 13-й главы, относящиеся к системам обработки информации, нашли подтверждение и применительно к системам управления, то есть являются, вообще говоря, общесистемными.

При анализе теоретических положений технологии синтеза регуляторов были выявлены и проявились при рассмотрении конкретных примеров и некоторые другие общесистемные закономерности, вытекающие из общего принципа изоморфизма, основной леммы нашей алгебраической теории и теоремы о

реализации. Так, в этой главе нами было показано (см. рис. 1.1), что если изоморфный с точностью до изоморфизма $e_U \equiv I_m$ регулятор $H = G^{-1}$такой, что удовлетворяются равенства (1.7), (1.25), (1.26), существует, то многомерный объект (1.1), (1.3) управляем с точностью до изоморфизма $e_U \equiv I_m$, то есть с точностью до вектора *U*, воздействующего на состояние системы. Равенства (1.7), (1.25), (1.26) и эквивалентное им равенство

$$G^{-1}G = G^{-1}(\Phi B) = H(\Phi B) = e_U = I_m \ , \tag{1.58}$$

представляют в разных формах *критерий управляемости MIMO-объектов* и одновременно позволяют определить изоморфный регулятор. Равенство (1.58) позволяет вычислить изоморфный регулятор $H = G^{-1}$в форме Лапласа. Если регулятор существует, то есть уравнение (1.58) разрешимо относительно $H = G^{-1}$, то система управляема. Таким образом, *в нашем случае управляемости с точностью до изоморфизма* в отличие, например, от управляемости по Р. Калману, *критерий управляемости прямо связан с процедурой вычисления регулятора*. Более того, *существование регулятора как раз и является критерием управляемости*, что вполне логично.

В силу того, что, как видно из (1.2), $e_U \equiv e_U^{-1}$, из рис. 1.1 следует также равенство

$$e_U^{-1} = G^{-1}H^{-1} = G^{-1}G = (\Phi B)^{-1} \cdot (\Phi B) = I_m \, , \tag{1.59}$$

эквивалентное равенству (1.58), в котором $G = \Phi B$, $G^{-1} = (\Phi B)^{-1}$ - см. (1.3). Отсюда следует, что регулятор $H = G^{-1}$ должен определяться из равенства (1.58) или из эквивалентного равенства (1.59).

Возникает вопрос: после определения регулятора $G^{-1} = H$ по формуле (1.58) можно ли раскрывать скобки в равенстве $H = G^{-1} = (\Phi B)^{-1}$ по обычным правилам алгебры матриц и писать

$$H = G^{-1} = (\Phi B)^{-1} = B^{-1} \cdot \Phi^{-1} = B^{-1} \cdot (pI - A) \tag{1.60}$$

с учетом того, что для линейного объекта фундаментальная матрица $\Phi = (pI - A)^{-1}$ известна и всегда является обыкновенным изоморфизмом, то есть имеет обычную обратную $\Phi^{-1} = (pI - A)$? Если такая операция правомерна, то из (1.60) можно будет вычислить и матрицу B^{-1}. С этим связан и вопрос: но можно ли в (1.60) определять обратную для фундаментальной матрицы по правилам обыч-

ных матриц, ведь регулятор *в системе синтеза* на рис. 1.1 определяется по особым правилам - с точностью до изоморфизма $e_U \equiv e_U^{-1}$? Кроме того нужно учитывать, что B при $m<n$ является прямоугольной матрицей и обычная обратная для нее не существует. Далее будем специально рассматривать наиболее сложный случай $m<n$, так как при $m=n$ исключаются важные особенности синтеза регулятора для MIMO-объектов, на которые мы обращали внимание в этой главе.

Ответ на эти вопросы такой: *в общем случае при* $m<n$ *скобки в* (1.60) *раскрывать по обычным правилам матричной алгебры вне контекста системы синтеза, показанной на рис.* 1.1, *нельзя и выражение в правой части этого соотношения является неправильным*. Этот ответ поясняет коммутативная диаграмма на рис. 1.24, детализирующая диаграмму, представленную на рис. 1.1, и эквивалентная ей. Коммутативная диаграмма на рис. 1.24 построена на основе следующей *мультипликативной формы записи* модели объекта управления

$$\begin{cases} Y(p) = BU(p), \\ X(p) = \Phi(p)Y(p). \end{cases} \tag{1.61}$$

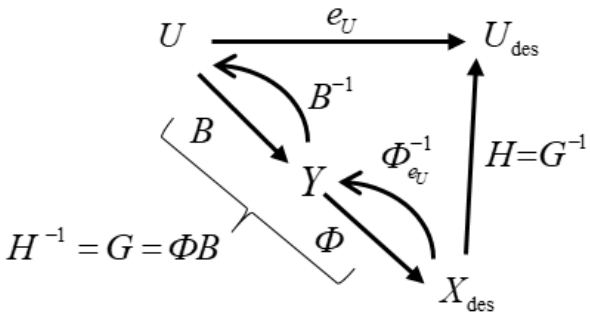


Рис. 1.24. Коммутативная диаграмма для определения обратных B^{-1} и $\Phi_{e_U}^{-1}$

Мультипликативная модель (1.61) в форме Лапласа при нулевых начальных условиях получена на основе *аддитивной формы* (1.1), (1.3) из уравнения

$$X(p) = (pI\text{-}A)^{-1} BU(p) = \Phi(p)Y(p). \tag{1.62}$$

В уравнении (1.62) $Y(p)= BU(p)$ - некоторая переменная, характеризующая «внутреннее» состояние объекта управления.

Мы уже отмечали, что представленная на рис. 1.1 коммутативная диаграмма и соответственно детализирующая ее эквивалентная диаграмма на рис. 1.24, формализуют *систему синтеза регулятора*, в которой *цель синтеза* задается обыкновенным изоморфизмом (1.2) $e_U \equiv I_m$. *В системе* же, как мы неоднократно подчеркивали, *все обратные для отображений определяются по особым правилам*

– *с точностью до системообразующего изоморфизма-цели*. В данном случае – с точностью до изоморфизма (1.2) $e_U \equiv I_m$ по правилам, формализуемым соотношениями (1.4) – (1.6), отвечающим основной лемме нашей теории. В связи с этим, как видно из рис. 1.24, обратная $\Phi_{e_U}^{-1}$ к фундаментальной матрице $\Phi = (pI - A)^{-1}$ *в диаграмме* должна удовлетворять условиям

$$\Phi \cdot \Phi_{e_U}^{-1} = e_X , \tag{1.63}$$

$$\Phi_{e_U}^{-1} \cdot \Phi = e_Y . \tag{1.64}$$

Таким образом, под обратной $\Phi_{e_U}^{-1}$ внутри коммутативной диаграммы на рис. 1.24, то есть *в системе синтеза регулятора*, понимается *обратная с точностью до изоморфизма* $e_U \equiv I_m$ к фундаментальной матрице Φ объекта. При этом фундаментальная матрица остается прежней и определяется по формуле $\Phi = (pI - A)^{-1}$ с учетом обычных правил обращения матриц заранее, до включения объекта в систему синтеза регулятора. Так как в случае $m < n$ единица e_X на *X*, как мы показали в этой главе в равенстве (1.20), не равна обычной единичной матрице, то есть $e_X \neq I_n$, то обратная $\Phi_{e_U}^{-1} \neq (pI - A)$. То есть

$$\Phi_{e_U}^{-1} \neq \Phi^{-1} = (pI - A) , \tag{1.65}$$

что следует из (1.63) при $e_X \neq I_n$.

Вообще говоря это обычный с точки зрения нашей алгебраической теории систем, но *достаточно революционный с точки зрения традиционной теории систем и теории управления результат*: *фундаментальная матрица* $\Phi = (pI - A)^{-1}$, являясь изоморфизмом и будучи «свободной», то есть *вне системы синтеза регулятора, вне коммутативной диаграммы имеет одну обратную, а именно* $\Phi^{-1} = (pI - A)$, *а в системе синтеза регулятора, внутри коммутативной диаграммы - другую, а именно* $\Phi_{e_U}^{-1}$. *Причем эти обратные, как видно из* (1.65), *при* $m < n$ *не совпадают*!

Кроме того, из коммутативной диаграммы на рис. 1.24 и из (1.64) следует, что единица e_Y на *Y* не обязана совпадать с единицей e_X на *X*, хотя *Y* и *X* одного

размера n и представляют собой соответственно «внутреннее» и «внешнее» состояние одного и того же объекта (1.61), так как помимо (1.64) единица e_Y на Y в коммутативной диаграмме должна удовлетворять и уравнению

$$B \cdot B^{-1} = e_Y . \tag{1.66}$$

Причем должны выполняться также равенства

$$e_Y^{прав} = \Phi_{e_U}^{-1} \cdot \Phi = B \cdot B^{-1} = e_Y^{лев} = e_Y , \quad e_Y e_Y = e_Y \tag{1.67}$$

и равенство

$$B^{-1} \cdot B = e_U^{-1} = e_U \equiv I_m , \tag{1.68}$$

аналогичные равенствам (1.5) и вытекающие из основной леммы.

Из сказанного выше и соотношений (1.63) – (1.68) можно сделать *важный общесистемный вывод*: *принцип относительности в алгебре*, сформулированный нами в форме следствия 5 к основной лемме и теореме о реализации в 3-й главе и достаточно детально рассмотренный в 11-й главе 1-й части книги, *относится и к изоморфным отображениям*, входящим в композиции с другими отображениями в системах, но не являющимся в этих системах системообразующими, то есть не являющимся изоморфизмами-целями, на которых реализуются соответствующие системы. Это означает, что *изоморфизмы-первосистемы, кроме не имеющих «внутренней структуры» скаляров, при включении их в более крупные системы не в качестве системообразующих изоморфизмов-целей могут менять в этих системах свои первоначальные свойства* (*менять обратные*) – см. следствие 1 к основной лемме в 3-й главе 1-й части книги.

Применительно к технологии синтеза регуляторов из сказанного следуют свои, более «узкие» выводы.

Во-первых, существование матрицы B^{-1}, удовлетворяющей всем равенствам (1.66) – (1.68), означает управляемость объекта (1.61), то есть *может служить дополнительным критерием управляемости*. Если объект управляем, то в дополнение к равенствам (1.66) – (1.68) матрица B^{-1}, как видно из диаграммы на рис. 1.24, должна удовлетворять и уравнению

$$B^{-1} = e_U^{-1} \cdot H \cdot \Phi = I_m \cdot H \cdot \Phi = H \cdot \Phi . \tag{1.69}$$

Матрицу B^{-1} можно сразу вычислить из очень простого уравнения (1.68) и затем подставить в (1.69). *Если* (1.69) *при известных* B^{-1} *и* $\Phi = (pI - A)^{-1}$ *разрешимо относительно регулятора* $H = G^{-1}$, *то объект управляем*. Таким образом, (1.69) *является еще одним простым критерием управляемости*.

Задача синтеза регулятора и определения управляемости, таким образом, может быть сведена к задаче определения обратной матрицы B^{-1} *с точностью до изоморфизма* $e_U \equiv e_U^{-1}$. При этом еще раз подчеркнем, что обратная B^{-1} для прямоугольной матрицы *B* в обычном смысле не существует. *Выражение* (1.69) *позволяет реализовать еще один способ вычисления регулятора в дополнение к равенствам типа* (1.7), (1.25), (1.26), (1.58). Если же для синтеза регулятора сразу использовать указанные равенства, то вычислять обратную B^{-1} нет необходимости.

Во-вторых, возможность вычисления такой обратной B^{-1}, *которая удовлетворяет всем уравнениям* (1.66) – (1.69), *означает, что матрицы* Φ *и* B *в коммутативной диаграмме управляемой системы коммутируют с точностью до изоморфизма* $e_U \equiv e_U^{-1}$, *то есть образуют композицию* $H = \Phi B$ *с точностью до этого изоморфизма, что и означает, в свою очередь, существование регулятора* $H = G^{-1}$. Существование композиции $H = \Phi B$ с точностью до изоморфизма $e_U \equiv e_U^{-1}$ означает, что у отображений Φ и B вектор-состояние (множество) Y на рис. 1.24 является общим, то есть вектор управлений *U* с имеющимся составом компонент «накрывает» (может воздействовать на) все пространство компонент вектора *Y*. При этом интересно отметить, что если даже система управляема, то *существование композиции* $H = \Phi B$ *с точностью до изоморфизма* $e_U \equiv e_U^{-1}$ *отнюдь не означает, что существует такая же композиция* $H = \Phi B$ *с точностью до изоморфизма* $e_X \equiv e_X^{-1} = I_n$, то есть в случае, когда для синтеза регулятора используется «неправильная» система. Мы показали это в параграфе 1.2 при анализе возможности использования диаграммы, представленной на рис. 1.3, для синтеза регулятора и в параграфе 1.3 на числовом примере – см. соотношения (1.8) – (1.15).

Проиллюстрируем на этом же числовом примере сформулированный выше общесистемный вывод об обратных для фундаментальной матрицы, вывод о возможном неравенстве единиц e_Y и e_X при $m < n$ и аналитически выведенные утверждения об обратной матрице B^{-1}. В начале получим матрицу B^{-1} из (1.68) с учетом (1.8):

$$B^{-1}B = \begin{bmatrix} b_{11}^{-1} & l_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ 0 \end{bmatrix} = I_m = 1 .$$

Здесь в матрице

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} b_{11}^{-1} & l_{12} \end{bmatrix} \tag{1.70}$$

введен пока неизвестный произвольный элемент l_{12}, который может быть определен позже из равенств (1.66), (1.67), (1.69). Далее из (1.63), имея в виду (1.8), (1.9), с учетом (1.20) и $\Phi = (pI - A)^{-1}$ определим обратную $\Phi_{e_U}^{-1}$. Получим равенство

$$\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} (p-a_{22}) & a_{12} \\ a_{21} & (p-a_{11}) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{b_{11}(p-a_{22})}{\Delta}k_1 & \dfrac{(p-a_{22})}{a_{21}}\left(1-k_1\dfrac{b_{11}(p-a_{22})}{\Delta}\right) \\ \dfrac{b_{11}a_{21}}{\Delta}k_1 & \left(1-k_1\dfrac{b_{11}(p-a_{22})}{\Delta}\right) \end{bmatrix}, \tag{1.71}$$

где $\varphi_{11}...\varphi_{22}$ - пока неизвестные элементы матрицы $\Phi_{e_U}^{-1}$, k_1 - некоторый произвольный коэффициент в структуре регулятора (1.17). Для того, чтобы убедиться в правильности наших выводов, достаточно определить матрицы $\Phi_{e_U}^{-1}$ и B^{-1} для какого-либо одного регулятора из класса (1.17) и одного процесса движения объекта, характеризуемого матрицами (1.8). Для простоты будем рассматривать установившееся движение объекта при $p = 0$ $(t \to \infty)$ с регулятором (1.17) при $k_1 = 1$. В этом случае из (1.9) следует, что $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ и из (1.71) можно записать простые уравнения для определения элементов $\varphi_{11}...\varphi_{22}$ матрицы $\Phi_{e_U}^{-1}$. Эти уравнения здесь опустим и сразу запишем вычисленные элементы:

$$\varphi_{11} = b_{11}, \quad \varphi_{12} = \frac{\Delta + b_{11}a_{22}}{a_{21}}, \quad \varphi_{21} = 0, \quad \varphi_{22} = 0 \ .$$

Таким образом,

$$\Phi_{e_U}^{-1} = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & (\dfrac{\Delta + b_{11}a_{22}}{a_{21}}) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \ . \tag{1.72}$$

Обычная обратная $\Phi^{-1} = (pI - A)$ для $\Phi = (pI - A)^{-1}$ при $p = 0$ $(t \to \infty)$ равна $\Phi^{-1} = -A$, то есть, как видно из (1.8),

$$\Phi^{-1} = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{bmatrix}. \tag{1.73}$$

Сравнивая (1.72) и (1.73) убеждаемся, что $\Phi_{e_U}^{-1} \neq \Phi^{-1}$. Более того, как видно из (1.72), определитель матрицы $\Phi_{e_U}^{-1}$ равен нулю и, тем не менее, она является обратной к фундаментальной матрице Φ *в коммутативной диаграмме* на рис. 1.24, то есть отображение Φ является в диаграмме изоморфизмом с точностью до изоморфизма $e_U \equiv e_U^{-1}$, но поменяло свои свойства (обратную матрицу) в сравнении со свойствами, имевшимися у этого отображения вне коммутативной диаграммы.

Вычислим единицу e_X по формуле (1.63). Получим

$$\Phi \cdot \Phi_{e_U}^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} -a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & (\frac{\Delta + b_{11}a_{22}}{a_{21}}) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} -b_{11}a_{22} & -a_{22}(\frac{\Delta + b_{11}a_{22}}{a_{21}}) \\ b_{11}a_{21} & (\Delta + b_{11}a_{22}) \end{bmatrix} = e_X. \tag{1.74}$$

Нетрудно убедиться, что при $p = 0$ $(t \to \infty)$ e_X в (1.74) совпадет с (1.20). Далее по формулам (1.67) после простых вычислений определим $e_Y^{прав}$ и $e_Y^{лев}$:

$$e_Y^{прав} = \Phi_{e_U}^{-1} \cdot \Phi = \begin{bmatrix} b_{11} & (\frac{\Delta + b_{11}a_{22}}{a_{21}}) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{a_{22}}{\Delta} & \frac{a_{12}}{\Delta} \\ \frac{a_{21}}{\Delta} & -\frac{a_{11}}{\Delta} \end{bmatrix} = \cdots = \begin{bmatrix} 1 & -(\frac{b_{11} + a_{11}}{a_{21}}) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{1.75}$$

$$e_Y^{лев} = B \cdot B^{-1} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11}^{-1} & l_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & b_{11}l_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{1.76}$$

Учитывая, что в коммутативной диаграмме должны выполняться равенства (1.67), то есть $e_Y^{прав} = e_Y^{лев}$, после приравнивания (1.75) и (1.76) нетрудно получить ранее введенный в (1.70) неизвестный элемент l_{12}

$$l_{12} = -(\frac{b_{11} + a_{11}}{b_{11}a_{21}}). \tag{1.77}$$

После подстановки (1.77) в (1.76) можно убедиться, что $e_Y^{прав} = e_Y^{лев} = e_Y$ и $e_Y e_Y = e_Y$. При этом из сравнения (1.75) и (1.74) видно, что, как мы ожидали,

$e_Y \neq e_X$, хотя эти единицы характеризуют соответственно «внутреннее» и «внешнее» состояние одного и того же объекта (1.61).

Подставив (1.77) в (1.70), окончательно находим матрицу

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} b_{11}^{-1} & -(\frac{b_{11}+a_{11}}{b_{11}a_{21}}) \end{bmatrix}, \tag{1.78}$$

удовлетворяющую всем соотношениям в коммутативной диаграмме на рис. 1.24. После подстановки фундаментальной матрицы $\Phi = (pI - A)^{-1}$ при $p = 0$ $(t \to \infty)$ и обратной матрицы B^{-1} из (1.78) в (1.69) можно вычислить регулятор $H = [k_1 \vdots k_2]$ по формуле

$$\begin{bmatrix} b_{11}^{-1} & -(\frac{b_{11}+a_{11}}{b_{11}a_{21}}) \end{bmatrix} = [k_1 \vdots k_2] \cdot \begin{bmatrix} -\frac{a_{22}}{\Delta} & \frac{a_{12}}{\Delta} \\ \frac{a_{21}}{\Delta} & -\frac{a_{11}}{\Delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-k_1 \frac{a_{22}}{\Delta} + k_2 \frac{a_{21}}{\Delta}) & \vdots & (k_1 \frac{a_{12}}{\Delta} - k_2 \frac{a_{11}}{\Delta}) \end{bmatrix}.$$

Из этой формулы следуют равенства:

$$b_{11}^{-1} = -k_1 \frac{a_{22}}{\Delta} + k_2 \frac{a_{21}}{\Delta}, \quad -(\frac{b_{11}+a_{11}}{b_{11}a_{21}}) = (k_1 \frac{a_{12}}{\Delta} - k_2 \frac{a_{11}}{\Delta}). \tag{1.79}$$

В (1. 79) один из коэффициентов можно выразить через другой. Например, из первого уравнения получим

$$k_2 = \frac{\Delta}{b_{11}a_{21}} + k_1 \frac{a_{22}}{a_{21}}. \tag{1.80}$$

Тогда, подставляя коэффициент k_2 в регулятор $H = [k_1 \vdots k_2]$, получим

$$H = \begin{bmatrix} k_1 \vdots \frac{\Delta}{b_{11}a_{21}} + k_1 \frac{a_{22}}{a_{21}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \vdots \left(1 + k_1 \frac{b_{11}a_{22}}{\Delta}\right) \frac{\Delta}{b_{11}a_{21}} \end{bmatrix}. \tag{1.81}$$

Сравнивая (1.81) с регулятором $H = G^{-1}$ (1.17) при $p = 0$ $(t \to \infty)$ убеждаемся, что регулятор вычислен нами правильно. Вместе с тем, как мы видели, вычисление регулятора посредством предварительного расчета матрицы B^{-1} существенно сложнее, чем рассмотренный ранее метод расчета на основе критерия управляемости (1.7). Для того, чтобы довести проверку до конца, подставим (1.80) во второе уравнение в (1.79) и после несложных вычислений получим $k_1 = 1$, как мы и полагали в начале наших расчетов.

Таким образом, все проверки наших теоретических выводов завершены: мы убедились, что даже обыкновенные изоморфизмы (в нашем примере фундаментальная матрица), если они не являются системообразующими изоморфизмами-целями, могут менять в системах и соответствующих коммутативных диаграммах свои первоначальные свойства (менять обратные), то есть подтверждается весьма высокая общность принципа относительности в алгебре и вообще в теории систем, что *является также строгим формально-математическим обоснованием причин проявления эффекта эмерджентности, то есть «системного эффекта» в системах различной природы* и доказательством следствия 11 (об эмерджентности) к основной лемме, сформулированного нами в 3-й главе 1-й части книги; подтверждено также существование такой матрицы B^{-1}, которая удовлетворяет всем равенствам (1.66) – (1.68) и позволяет вычислить регулятор по формуле (1.69), что означает управляемость объекта (1.61) и *служит дополнительным критерием управляемости*; подтвержден и вывод о возможном неравенстве единиц e_Y и e_X при $m < n$.

В целом в главе изложена прикладная технология синтеза регуляторов нового класса – изоморфных регуляторов, - опирающаяся на общий принцип изоморфизма и соответствующие ему основную лемму и теорему о реализации. *Изоморфные регуляторы являются идеальными в смысле полной компенсации динамики объекта управления. В контуре управления они хорошо сочетаются с эталонными моделями, обеспечивающими требуемое качество регулирования.* Наличие изоморфного регулятора в контуре управления резко упрощает и по существу делает независимой процедуру формирования эталонной модели. Технология является универсальной и применима как для скалярных SISO-объектов с одним входом и одним выходом, так и для многомерных многосвязных MIMO-объектов достаточно общего вида. В главе на уровне теории и на примерах продемонстрированы некоторые особенности синтеза и преимущества изоморфных регуляторов. Другие нюансы синтеза продемонстрированы в последующих главах этой части книги.

Возникает вопрос, а существуют ли другие известные, в том числе эвристические методы синтеза регуляторов, близкие по сути и смыслу к разработанному нами теоретическому методу и прикладной технологии синтеза? Анализ показал, что некоторые эвристические методы синтеза регуляторов с использованием обратной модели объекта были известны и ранее. Так в [70] на основе весьма общего алгебраического (геометрического) подхода рассмотрено применение *процедуры «динамической компенсации»* в «узкой» и «расширенной задачах регулирования», исходя из известной, по сути, постулируемой структуры обратной

связи (регулятора). В [72] рассмотрен «*метод обратных операторов*», базирующийся «на идее компенсации динамических характеристик объекта управления» и заранее определенной структуре регулятора. В определенном смысле идейно близки к нашему *метод обратных задач динамики* [67] и *алгебраический метод* [37, 65], с которыми, как было указано выше, проводились сравнительные исследования применительно к достаточно сложным объектам управления. Но наиболее близким к нашему, а в частных результатах и полностью совпадающим с нашим является достаточно подробно рассмотренный в [25] со ссылкой на [26] *метод динамической компенсации* для синтеза регуляторов применительно как к скалярным, так и к многомерным системам, разработанный, как и рассмотренные выше методы, исходя из эвристических, «физических» соображений. Близость, а иногда и идентичность результатов, полученных в рамках нашей теории, исходя из научно обоснованных предпосылок общего принципа изоморфизма, и результатов, опирающихся на эвристические, «физические» посылки, описанных в [25, 26, 32, 37, 65-67, 70, 72], лишь подтверждает правильность используемой нами аксиоматики и всех последующих, полученных на ее основе формально-математических результатов и выводов. Вместе с тем нужно иметь в виду, что наши результаты относятся не только к линейным объектам управления классов SISO и MIMO, но и к объектам более общего вида, в том числе – к нелинейным.

Важно подчеркнуть, что далеко не все недостатки метода динамической компенсации, декларированные в [25] (недостаточно высокая робастность регуляторов, возможность возникновения явлений неустойчивости, сложность синтеза регуляторов для заведомо неустойчивых объектов, сложность обеспечения физической реализуемости регуляторов) нашли подтверждение в наших достаточно обширных исследованиях применительно к изоморфным регуляторам, а некоторые недостатки могут быть эффективно парированы как путем некоторой предварительной «коррекции» самого объекта управления, что продемонстрировано, например, в [26] в отношении неустойчивости объекта управления, так и путем подбора рациональных эталонных моделей, что продемонстрировано в наших примерах в отношении, например, робастности и физической реализуемости регуляторов. В целом, *идентичность некоторых результатов, полученных в* [25, 26] *на основе метода динамической компенсации, а также в* [32, 66] *на основе метода обратных задач динамики и алгебраического метода, исходя из эвристических посылок, и результатов, полученных нами в рамках алгебраической теории систем, опирающейся на общий принцип изоморфизма, свидетельствует об их объективной мотивированности, правильных содержательных основаниях и взаимно проверяемой достоверности*.

Вообще помимо актуальных прикладных, практических аспектов технологии синтеза изоморфных регуляторов *важным теоретическим результатом, имеющим большое самостоятельное значение, является формирование простых, быстро проверяемых критериев управляемости многомерных многосвязных линейных и нелинейных объектов управления*, описываемых алгебраическими соотношениями вида (1.25), (1.26) для линейных объектов и вида (1.7) для нелинейных объектов достаточно широких классов.

Указанные критерии являются существенно менее громоздкими и более удобно и легко проверяемыми в сравнении с известными матричными (ранговыми) критериями Р. Калмана [8, 45, 59] и, например, ленточными критериями, предложенными в работах [6, 60]. К тому же критерии Р. Калмана и ленточные критерии можно применять только к линейным системам. *В нашей теории применительно к линейным системам предложен и простой дополнительный легко проверяемый критерий, состоящий в оценке возможности уменьшения размерности вектора состояния объекта до размерности вектора управлений*.

Отметим, что разработанные на основе общего принципа изоморфизма теоретический формально-математический метод и прикладная технология синтеза изоморфных регуляторов хотя и имеют высокий уровень научной обоснованности и формализации всех процедур синтеза, тем не менее не претендуют на некую абсолютность и исключительность. Их нужно рассматривать как еще один, дополнительный к известным (см., например, [5, 6, 16, 25, 27, 48, 65, 67, 72]), системный, комплексный, универсальный инструментарий в арсенале разработчиков, который может быть использован с учетом особенностей объектов управления, а также предпочтений и квалификации специалистов-проектировщиков.

В целом, разработанная технология не «отменяет» многочисленные известные и развивающиеся методы синтеза регуляторов как для многомерных многосвязных MIMO-объектов (см., например, [5, 6, 16, 25, 39-42, 46-49, 71, 72]), так и для скалярных SISO-объектов (см., например, [9-31, 37, 52]). Вместе с тем, если задаваться вопросом о том, что отличает рассмотренную технологию от известных методов синтеза регуляторов, то можно выделить следующие ее «интегральные» особенности:

- *новую технологию отличает максимальная формализация процедур синтеза регуляторов для SISO и MIMO-объектов, практически исключающая привлечение эвристик* при синтезе контуров управления различными объектами, а также единая научно-обоснованная аксиоматическая и формально-математическая методологическая основа в общей структуре новой парадигмы в алгебраической теории систем;

- *новые, существенно более простые и легко проверяемые критерии управляемости* MIMO-объектов;

- *возможность реализации регуляторов практически предельного качества* для SISO и MIMO-объектов достаточно общего вида.

Предварительные результаты исследования и апробации разработанной технологии позволяют надеяться, что со временем она станет новым мощным инструментарием в арсенале инженеров-разработчиков.

Литература к Главе 1 Раздела 1 Части 2:

1. *Калман Р.Е.* Идентификация систем с шумами // УМН. 1985. Т. 40. Вып.4 (244). С. 27-41.
2. URL: http://commonmind.ru/press/220125b.pdf (дата доступа - 27.12.2022 г.)
3. *Кулабухов В.С.* Синтез регуляторов для следящих систем на основе принципа изоморфности // Мехатроника, автоматизация, управление. 2017. Том 18, №8. С. 507-515.
4. *Буков В.Н., Кулабухов В.С., Максименко И.М., Рябченко В.Н.* Вложение систем // АиТ. 1999. №8. С. 61-73.
5. *Буков В.Н.* Вложение систем. Аналитический подход к анализу и синтезу матричных систем. Калуга: Изд-во научн. литературы Н.Ф. Бочкаревой, 2006. 720с.
6. *Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Рябченко В.Н.* Матричные методы в теории и практике систем автоматического управления летательных аппаратов. М.: Изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016.
7. *Беллман Р.* Процессы регулирования с адаптацией. М.: Наука, 1964. 360 с.
8. *Калман Р., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971. [Kalman R.E., Falb P.L., Arbib M. Topics in Mathematical Systems Theory, Mc Graw Hill, New York, , 1969]
9. Техническая кибернетика. Теория автоматического регулирования. Книга 1,2,3 / Под ред. В.В. Солодовникова. М.: Машиностроение, 1967.
10. *Фельдбаум А.А., Бутковский А.Г.* Методы теории автоматического управления. М.: Наука, 1971.
11. Основы автоматического управления / Под ред. В. С. Пугачева. М.: Наука, 1974.
12. *Бесекерский В.А., Попов Е.П.* Теория систем автоматического регулирования. М.: Наука, 1975.
13. *Ройтенберг Я.Н.* Автоматическое управление. М.: Наука, 1978.
14. *Солодовников В.В., Плотников В.Н., Яковлев А.В.* Основы теории и элементы систем автоматического регулирования. М.: Машиностроение ,1985.
15. Теория автоматического управления. В 2-х ч. / Под ред. А. А. Воронова. М.: Высш. шк., 1986.
16. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А.А.Красовского. М.: Наука, 1987.
17. *Бесекерский В.А., Изранцев В.В.* Системы автоматического управления с микроЭВМ. М.: Наука, 1987.
18. *Острём К., Виттенмарк Б.* Системы управления с ЭВМ. М.: Мир, 1987.
19. *Мита Ц., Хара С., Кондо Р.* Введение в цифровое управление. М.: Мир, 1994.

20. *Емельянов С.В., Коровин С.К.* Новые типы обратной связи: Управление при неопределенности. М.: Наука. Физматлит, 1997.
21. *Филипс Ч., Харбор Р.* Системы управления с обратной связью. М.: Лаборатория базовых знаний, 2001.
22. *Бесекерский В.А., Попов Е.П.* Теория систем автоматического управления. СПб.: Профессия, 2003.
23. *Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высшая школа, 2003.
24. *Ерофеев А.А.* Теория автоматического управления. СПб.: Политехника, 2003.
25. Методы классической и современной теории автоматического управления: Учебник в 5-и тт.; 2-е изд., перераб. и доп. / Под ред. К.А. Пупкова, Н.Д. Егупова – М.: Изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004.
26. *Первозванский А.А.* Курс теории автоматического управления. М.: Наука, 1986.
27. *Ким Д.П.* Теория автоматического управления. Том 1, 2. М.: Физматлит, 2004.
28. *Дорф.Р., Бишоп Р.* Современные системы управления. М.: Лаборатория базовых знаний, 2004.
29. *Подчукаев В.А.* Теория автоматического управления. М.: Физматлит, 2005.
30. Теория автоматического управления. / Под ред. В. Б. Яковлева. М.: Высш. шк., 2009.
31. *Bhattacharyya S.P., Datta A., Keel L.H.* Linear Control Theory: Structure, Robustness, and Optimization. CRC Press LLC. NY, 2009.
32. *Булгаков В.В., Кулабухов В.С.* Сравнительный анализ формализованных методов синтеза регулятора для следящей системы // Приборы. 2013. №1(151). С. 39-44.
33. *Филимонов А.Б., Филимонов Н.Б.* Синтез следящих систем на основе аппарата линейно-квадратичной оптимизации // Мехатроника, автоматизация, управление. 2016. Том 17. № 12. С. 795-800.
34. *Мееров М.В.* Синтез структур систем автоматического регулирования высокой точности. М.: Наука, 1967. 424 с.
35. *Гайдук А.Р.* Синтез систем управления при слабо обусловленной полноте объектов // Изв. РАН Автоматика и телемеханика. 1997. №4. С. 133-144
36. *Тютиков В.В., Вершинин И.В., Соколов А.Б.* Метод больших коэффициентов при синтезе параметрически грубых систем модального управления // Мехатроника, автоматизация, управление. 2016. Том 17. № 12. С. 801-808.
37. *Ким Д.П.* Алгебраический метод синтеза линейных непрерывных систем управления // Мехатроника, автоматизация, управление. 2011. №1. С. 9-15.
38. *Кулабухов В.С.* Принцип изоморфности в задаче реализации и его приложения к анализу свойств систем управления // В сборнике: XII Всероссийское

совещание по проблемам управления ВСПУ-2014. Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН. 2014. С. 438-448.

39. *Ильясов Б.Г., Саитова Г.А.* Исследование многосвязных систем автоматического управления сложными динамическими объектами на основе парадигмы Б.Н. Петрова // Проблемы управления. 2021. № 3. С. 3–15.
40. *Гайдук А.Р., Колоколова К.В.* Синтез систем автоматического управления неустойчивыми многомерными объктами // Научный вестник НГТУ. Том 66, № 1, 2017, с. 26–40. DOI: 10.17212/1814-1196-2017-1-26-40
41. *Тимаков С.Н., Богданов К.А., Нефедов С.Е.* Метод последовательного замыкания мод движения многомерных, многосвязных динамических систем // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. “Приборостроение”. 2014. № 5. С. 40-59.
42. *Сольницев Р.И, Малина А.С.* Метод иерархического макромоделирования для анализа многомерных и многосвязных систем автоматического регулирования // Известия СПбГЭТУ: Информатика и компьютерные технологии. 2018. «ЛЭТИ» № 8. С.13-18.
43. *Takahara Yasuhiko* Realization Theory for General Stationary Linear Systems and General System Theoretical Characterization of Linear Differential Equation Systems. Faculty of Engineering, Tokyo Institute of Technology, Meguro-ku, Tokyo, Received October 9, 1972.
44. *Месарович М., Такахара Я.* Общая теория систем: математические основы. М.: Мир, 1978.
45. *Калман Р.* Об общей теории систем управления. Труды 1 Конгресса ИФАК. М.: Изд. АН СССР, т. 2. 1961. С. 521–547. [Kalman R.E. On the General Theory of Control System //Proc. of 1st IFAC Congress, Moskow, 1960]
46. *Буков В.Н., Рябченко В.Н.* Технология вложения многосвязных систем // В сб. Современные методы управления многосвязными динамическими системами / Под ред. А.А Красовского. Вып. 1. М.: Энергоатомиздат, 2003. С. 119-134.
47. *Буков В.Н., Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н.* Алгебраические основания технологии вложения систем // В сб. Современные методы управления многосвязными динамическими системами / Под ред. А.А Красовского. Вып. 1. М.: Энергоатомиздат, 2003. С. 135-198.
48. *Буков В.Н., Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н.* Анализ и синтез многосвязных систем (обзор) // В сб. Современные методы управления многосвязными динамическими системами / Под ред. А.А Красовского. Вып. 1. М.: Энергоатомиздат, 2003. С. 233-298.
49. *Буков В.Н., Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н.* О неединственности решений в классической теории управления // В сб. Современные методы управления

многосвязными динамическими системами / Под ред. А.А Красовского. Вып. 1. М.: Энергоатомиздат, 2003. С. 427-438.

50. *Эшби У. Р.* Введение в кибернетику. — М.: Иностранная литература, 1959. (Ashby W. R. Introduction to Cybernetics. — Chapman & Hall, 1956.)
51. *Кулабухов В.С.* Федеративно-интегрированная распределённая модульная авионика // Авиакосмическое приборостроение. 2015. №12. С. 11-31.
52. Синтез законов управления в технических системах: Учеб. посо-бие. Ч.1. Инженерные методы синтеза законов управления в технических системах по эталонным математическим моделям / Нейдорф Р.А., Иванов Б.А., Обухов П.С. и др.; Под общ. ред. Р.А.Нейдорфа, З.Х.Ягубова. Ухта: УГТУ, 2000. 168 с.
53. *Younkin G.W.* Industrial Servo Control Systems: Fundamentals and Applikations. Marcel Dekker. NY, 2003.
54. *Nakamura M., Goto S., Kyura N.* Mechatronic Servo System Control: Problems in Industries and their Theoretical Solutions. Spriger-Verlag. NY, 2004.
55. *Bhattacharyya S.P., Datta A., Keel L.H.* Linear Control Theory: Structure, Robustness, and Optimization. CRC Press LLC. NY, 2009.
56. *Feuer A., Morse A.S.* Adaptive control of single-input, single-output linear systems // IEEE Trans. On Automat. Control. 1978. V. AC-23. N. 4. P. 557-569.
57. *Kulabukhov V.* Linear Isomorphic Regulators // CMTAI2016. MATEC Web of Conf. 2017. T. 99. C. 03008. (doi:10.1051/matecconf/20179903008)
58. *Кулабухов В.С.* Общий принцип изоморфизма в теории систем // Cloud of Science. 2018. Т.5. №3. С. 400-472.
59. *Kalman R.E.* Contributions to the theory of optimal control // Bulletin de la Sociedad Matematica Mexicana. 1960. №5. P. 102-119.
60. *Мисриханов М.Ш.* Ленточные критерии управляемости и наблюдаемости линейных динамических систем // В сб. Современные методы управления многосвязными динамическими системами / Под ред. А.А Красовского. Вып. 2. М.: Энергоатомиздат, 2003. С. 249-268.
61. *Красовский А.А.* Науковедение и состояние теории процессов управления // АиТ. 2000. №4. С. 3-34.
62. *Красовский А.А., Наумов А.И.* Аналитическая теория самоорганизующихся систем управления с высоким уровнем искусственного интеллекта // Изв. РАН. Т и СУ. 2000. №6.
63. *Винер Н.* Кибернетика или управление и связь в животном и машине / Перев. с англ. Второе издание. М.: Сов. радио, 1968. 328 с.
64. *Ким Д.П.* Синтез оптимальных по быстродействию непрерывных линейных регуляторов // Автоматика и телемеханика. 2009. Выпуск 3. С. 5–14.

65. *Ким Д.П.* Алгебраические методы синтеза систем автоматического управления. М.: Физматлит, 2014. 164 с.
66. *Кулабухов В.С., Булгаков В.В.* Сравнительные исследования некоторых алгебраических методов формализованного синтеза регуляторов для следящих систем // Приборы. 2017. №12(210). С. 13-18.
67. *Крутько П.Д.* Обратные задачи динамики управляемых систем: Линейные модели. М.: Наука, 1987. 304 с.
68. *Гурецкий Х.* Анализ и синтез систем управления с запаздыванием. Пер. с польского. М.: Машиностроение, 1974. 328 с.
69. *Башарин А.В., Новиков В.А., Соколовский Г.Г.* Управление электроприводами. Л.: Энергоиздат, Ленигр. отделение. 1982. 392 с.
70. *Уонэм М.* Линейные многомерные системы управления: Геометрический подход. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980. 376 с.
71. *Александров А.Г.* Синтез регуляторов многомерных систем. М.: Машиностроение, 1986. 282 с.
72. Основы теории многосвязных систем автоматического управления летательными аппаратами: Учеб. пособие / Бабак С.Ф. и др.; Под ред. М.Н. Красильщикова. М.: Изд-во МАИ, 1995. 288 с.

Глава 2

Синтез изоморфных регуляторов для исполнительных устройств систем управления

2.1. Синтез регулятора для газового привода на основе анализа экспериментальных данных

Системы управления летательных аппаратов (ЛА) в качестве исполнительных элементов содержат большое количество приводов рулевых поверхностей, обеспечивающих создание необходимых управляющих сил и моментов. Современные привода отличаются значительным разнообразием принципов действия и конструктивного исполнения. Наиболее часто применяют электрогидравлические и электромеханические рулевые приводы, алгоритмы управления которыми хорошо отработаны [1…5]. Высокие требования к надежности систем управления обусловили необходимость применения на современных ЛА разнородных по принципам действия и комбинированных приводов [6, 7], а также рассмотрения различных струйных исполнительных устройств [8], пневматических и газовых приводов [6, 9] в качестве альтернативы традиционно применяемым приводам.

Для управления рулевыми поверхностями некоторых типов летательных аппаратов преимущественное применение нашли газовые привода (ГП). В силу особенностей рабочего тела (сжимаемый газ) алгоритмы и законы управления такими приводами обладают существенными особенностями. Теоретические модели и соответствующие им передаточные функции (ПФ), а также амплитудно-фазовые частотные характеристики (АФЧХ) ГП рассмотрены в литературе, например, в [9]. Однако, как показывает практика, теоретические частотные характеристики ГП не в полной мере соответствуют реально наблюдаемым в экспериментах характеристикам.

Далее рассматривается решение практической задачи синтеза регулятора для одного из типов ГП по частотным характеристикам, полученным в результате натурного эксперимента при стендовых испытаниях. Исследовались несколько образцов ГП данного типа. Проведение экспериментальных работ и по-

лучение частотных характеристик осуществляла независимая группа исследователей, поэтому вопрос корректности предоставленных экспериментальных данных не обсуждается.

Первой задачей, которая решалась, была задача формирования математической модели ГП в форме ПФ, аппроксимирующей экспериментальные данные. По полученной ПФ был синтезирован фильтр (регулятор), улучшающий запасы устойчивости замкнутой системы управления ГП по амплитуде и фазе. Показано, что использованная методика синтеза, основанная на инженерном анализе частотных характеристик ГП, позволяет добиться желаемого результата – получить фильтр, реализующий заданные требования к ФЧХ. Вместе с тем эта методика слабо формализована, достаточно трудоемка и эвристична. В связи с этим нами при решении той же задачи разработки регулятора для ГП была продемонстрирована возможность применения более простой и регулярной процедуры синтеза, основанной на использовании теории изоморфного регулятора [10,11] и имеющей определенные преимущества в сравнении с другими формализованными процедурами синтеза регуляторов [12, 13]. При этом использовалась та же ПФ ГП, что и в первом случае, но требования к характеристикам замкнутого следящего контура были формализованы в виде некоторой эталонной ПФ. В результате был разработан изоморфный регулятор для управления ГП, реализующий заданные требования.

Идентификация ПФ ГП по экспериментальным данным. На рисунках 2.1…2.6 представлены экспериментальные ЛАФЧХ четырех образцов ГП при трех уровнях входного сигнала: низкий, средний, высокий соответственно. На всех рисунках по оси 0X – частота в [рад/сек], по оси 0Y – амплитуда в [дБ] или фаза в [°]. Соответствующие сведения о запасах устойчивости по амплитуде и фазе представлены в табл. 2.1. Также приведен требуемый теоретический запас [9].

Таблица 2.1. Запасы устойчивости газового привода

Уровень входного сигнала	Запас устойчивости	
	Амплитуда, дБ	Фаза, °
низкий	32	65
средний	24	60
высокий	20	55
Требуемый запас	14	45

При всех уровнях входного сигнала на графиках присутствуют участки ЛАЧХ с наклоном -20 дБ/дек и -40 дБ/дек. Кроме того, при всех представленных уровнях входного сигнала запасы по амплитуде и фазе (см. табл. 2.1) превышают требуемые, т.е. замкнутая система устойчива.

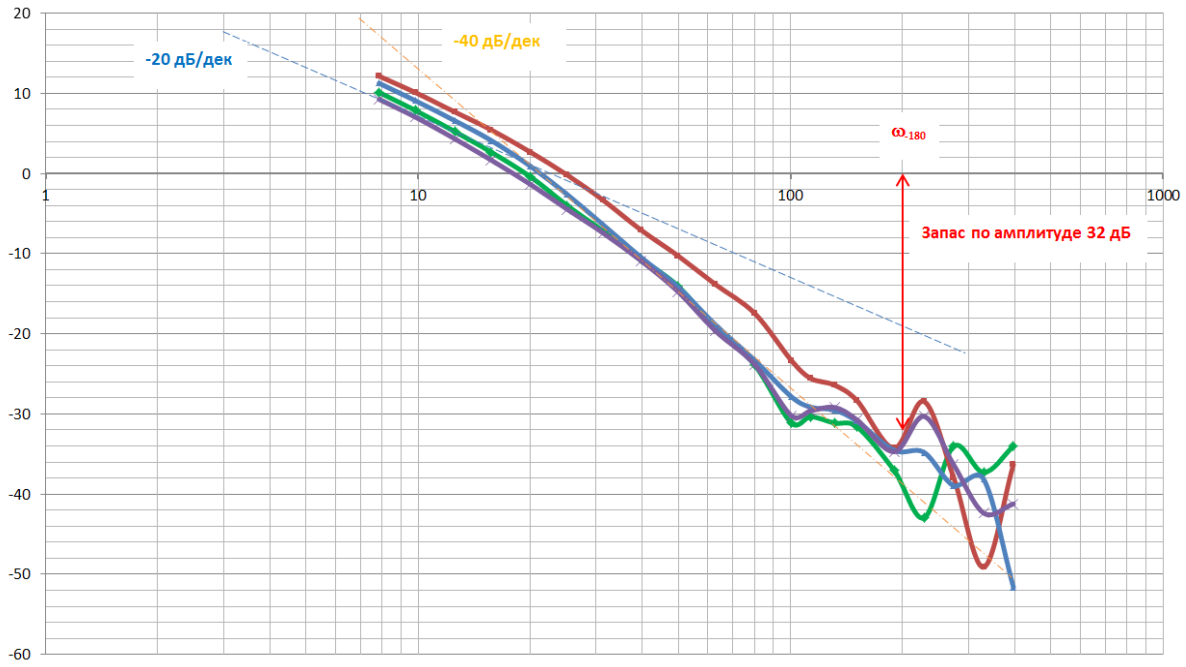


Рис. 2.1. Экспериментальные ЛАЧХ при низком уровне входного сигнала

Рис. 2.2. Экспериментальные ФЧХ при низком уровне входного сигнала

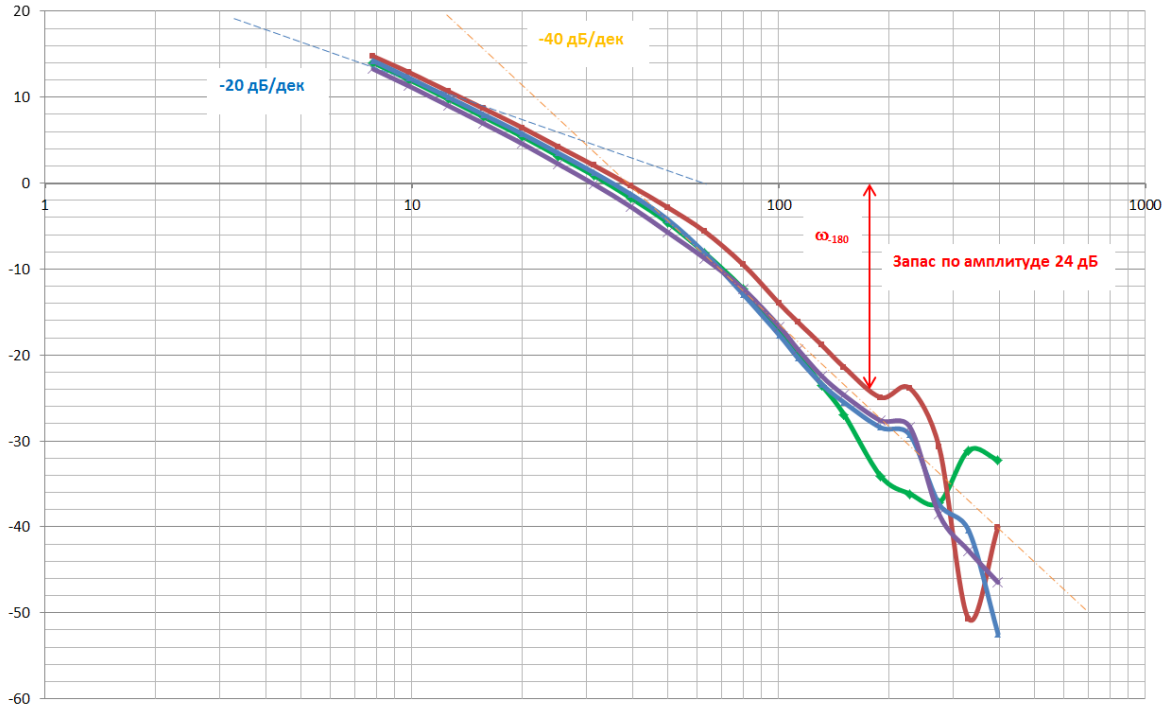


Рис. 2.3. Экспериментальные ЛАЧХ при среднем уровне входного сигнала

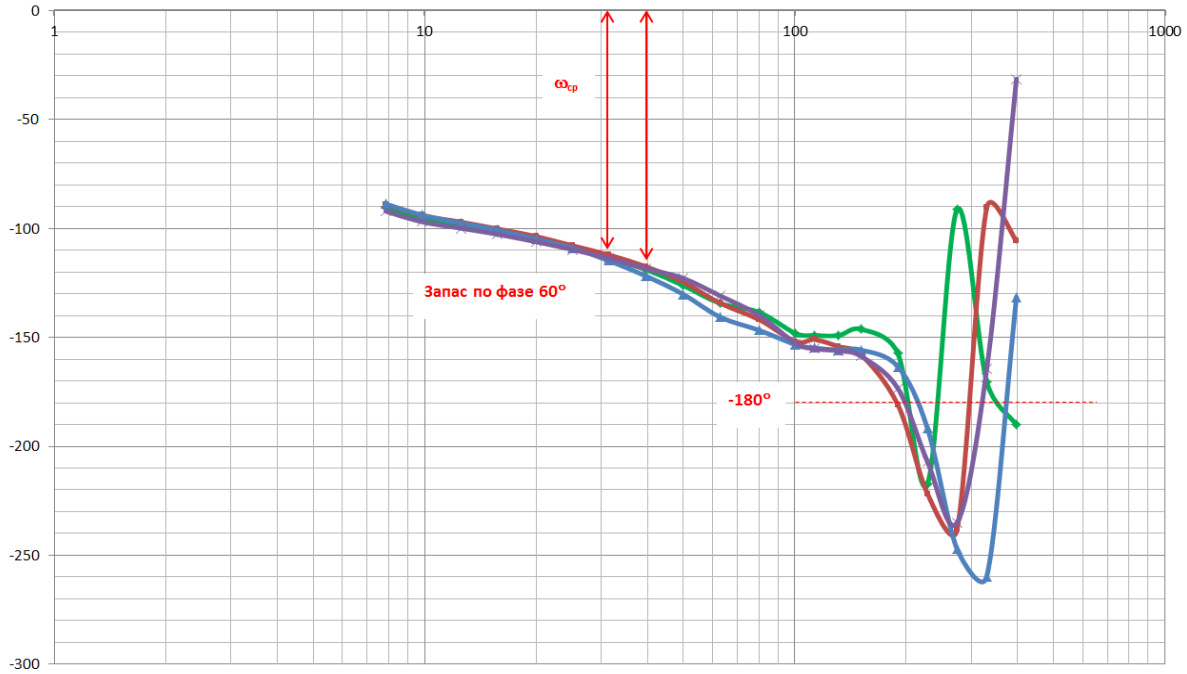


Рис. 2.4. Экспериментальные ФЧХ при среднем уровне входного сигнала

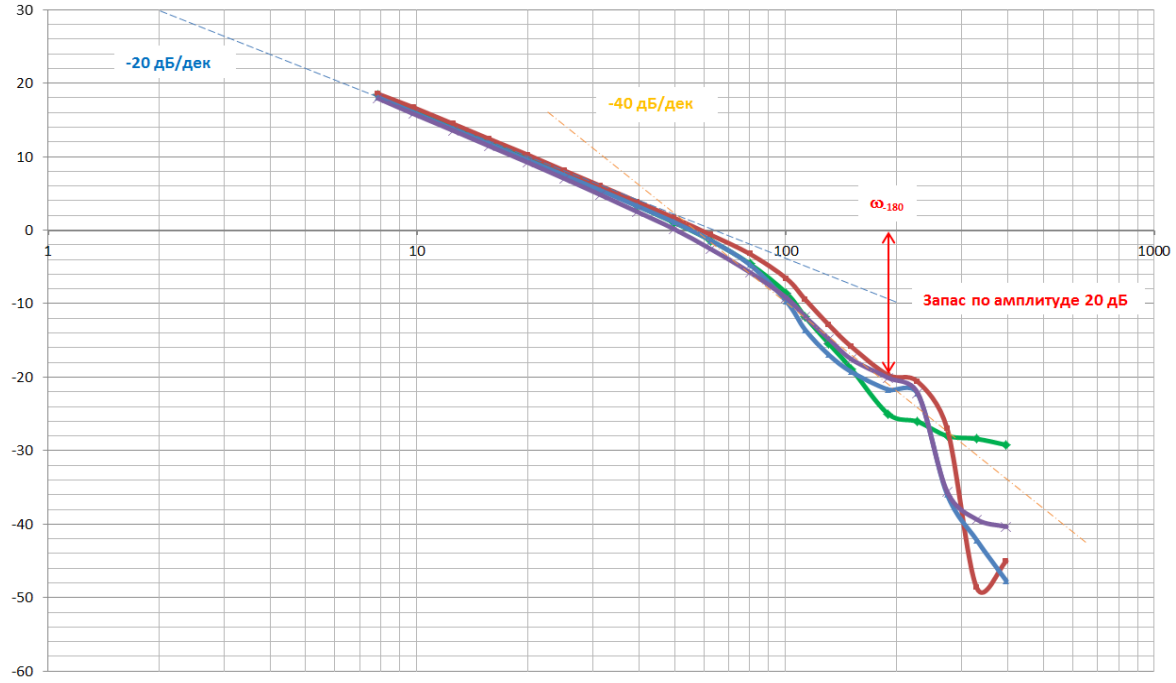


Рис. 2.5. Экспериментальные ЛАЧХ при высоком уровне входного сигнала

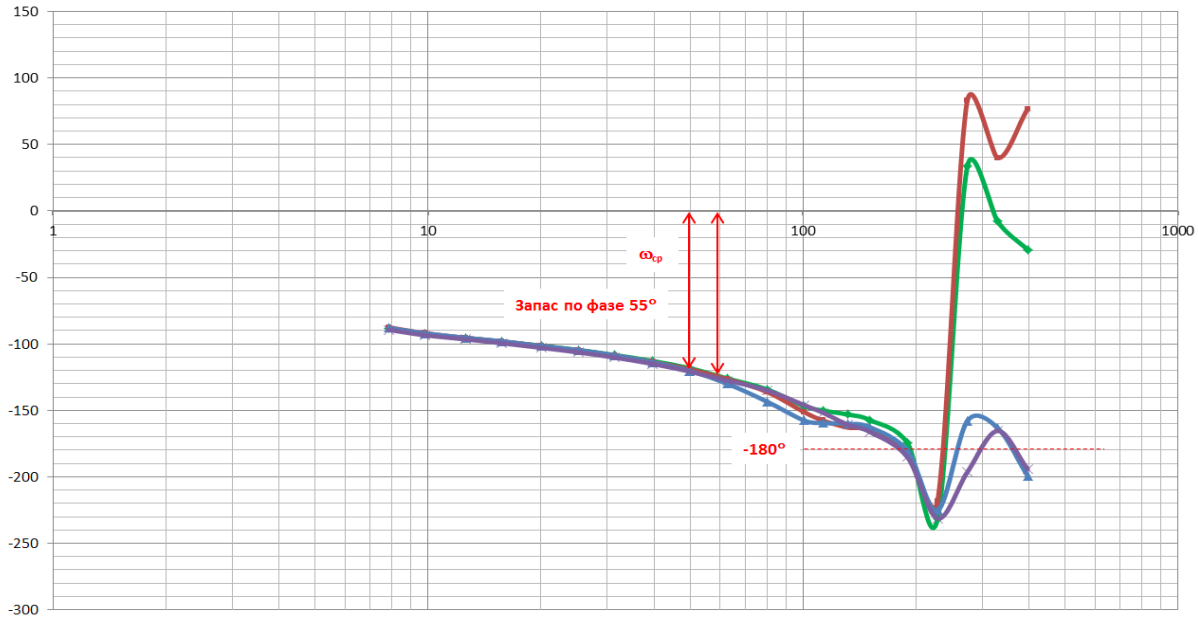


Рис. 2.6. Экспериментальные ФЧХ при высоком уровне входного сигнала

Таким образом, даже в худшем случае (высокий уровень входного сигнала) возможно дополнительное усиление входного сигнала на 6 дБ (в 2 раза) без потери устойчивости замкнутой системы.

При низком уровне входного сигнала, начиная с частоты 200 рад/сек, ЛАЧХ отклоняются от участка с наклоном -40 дБ/дек. ФЧХ отклоняется от теоретических значений [9], начиная с частоты 60 рад/сек.

При среднем уровне входного сигнала, начиная с частоты 190 рад/сек, ЛАЧХ отклоняются от участка с наклоном -40 дБ/дек. ФЧХ отклоняется от теоретических значений, начиная с частоты 100 рад/сек.

При высоком уровне входного сигнала, начиная с частоты 190 рад/сек, ЛАЧХ отклоняются от участка с наклоном -40 дБ/дек. ФЧХ отклоняется от теоретических значений, начиная с частоты 100 рад/сек.

На более высоких частотах идентифицировать передаточную функцию газового привода (ПФ ГП), исходя из теоретической структурной схемы [9], невозможно. Кроме того, начиная с указанных частот, характеристики отдельных образцов ГП начинают значительно «расходиться» друг от друга. Такие индивидуальные особенности ГП также не могут быть учтены в рамках единой ПФ.

Исходя из изложенного выше (и с учетом наклона участков ЛАЧХ), возможны 2 варианта аппроксимации ПФ ГП: интегратор + апериодическое звено (вариант 1) и апериодическое звено + апериодическое звено (теоретический вариант 2). При этом теоретический вариант 2 является предпочтительным еще и потому, что на низких частотах при высоком уровне входного сигнала ФЧХ= –88.4°, что невозможно для ПФ ГП с интегратором.

На рисунках 2.7-2.9 приведены возможные аппроксимации ПФ ГП при разных уровнях входного сигнала. При низком уровне входного сигнала ПФ ГП:

$$W(p) = \frac{49.3}{0.0159 \cdot p + 1} \cdot \frac{1}{1.99 \cdot p + 1}.$$

Максимальная ошибка по амплитуде 6.8 дБ на частоте 63 рад/сек, максимальная ошибка по фазе 4° на частоте 12.6 рад/сек.

При среднем уровне входного сигнала ПФ ГП:

$$W(p) = \frac{55.5}{0.0163 \cdot p + 1} \cdot \frac{1}{1.41 \cdot p + 1}. \quad (2.1)$$

Максимальная ошибка по амплитуде 0.4 дБ на частоте 63 рад/сек, максимальная ошибка по фазе 2° на частоте 7.9 рад/сек.

При высоком уровне входного сигнала ПФ ГП:

$$W(p) = \frac{91.4}{0.0125 \cdot p + 1} \cdot \frac{1}{1.4 \cdot p + 1}.$$

Максимальная ошибка по амплитуде составляет 0.3 дБ на частоте 63 рад/сек, максимальная ошибка по фазе составляет 2° на частоте 7.9 рад/сек.

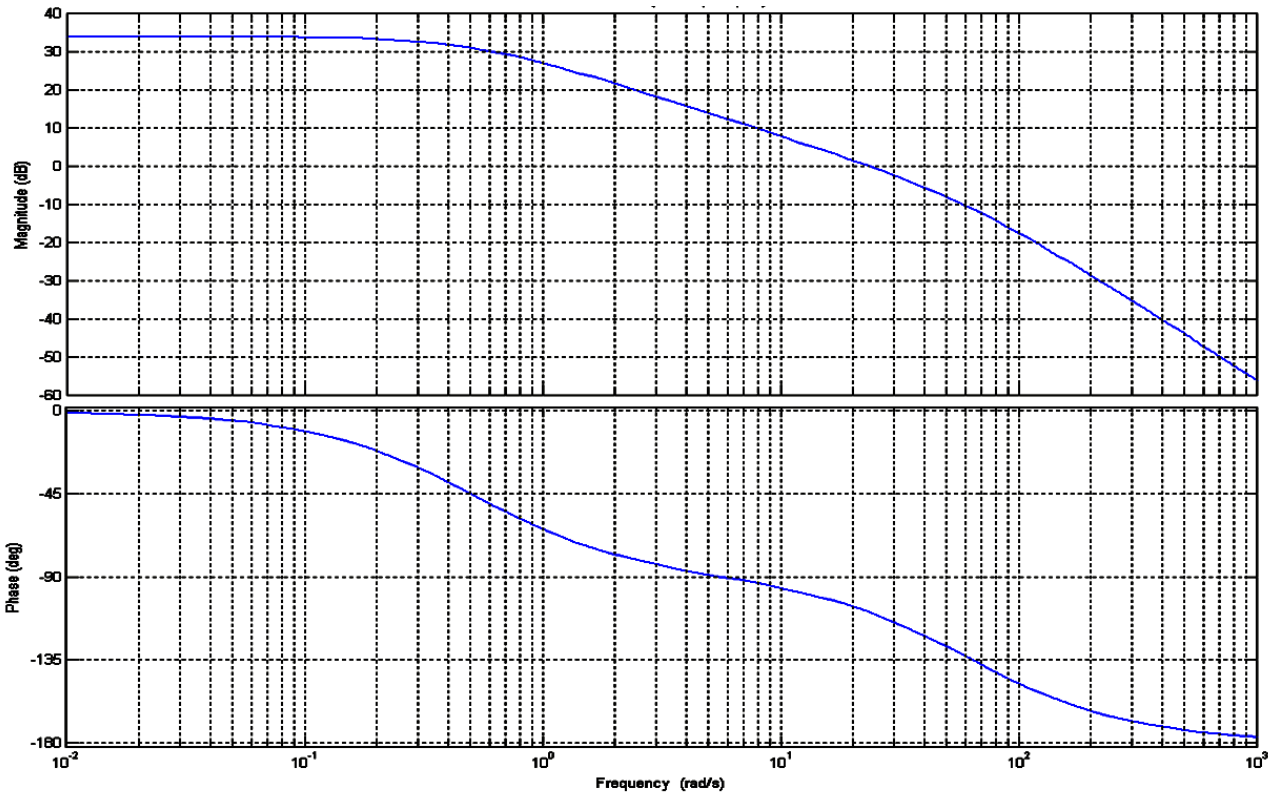


Рис. 2.7. Аппроксимация ПФ ГП при низком уровне входного сигнала

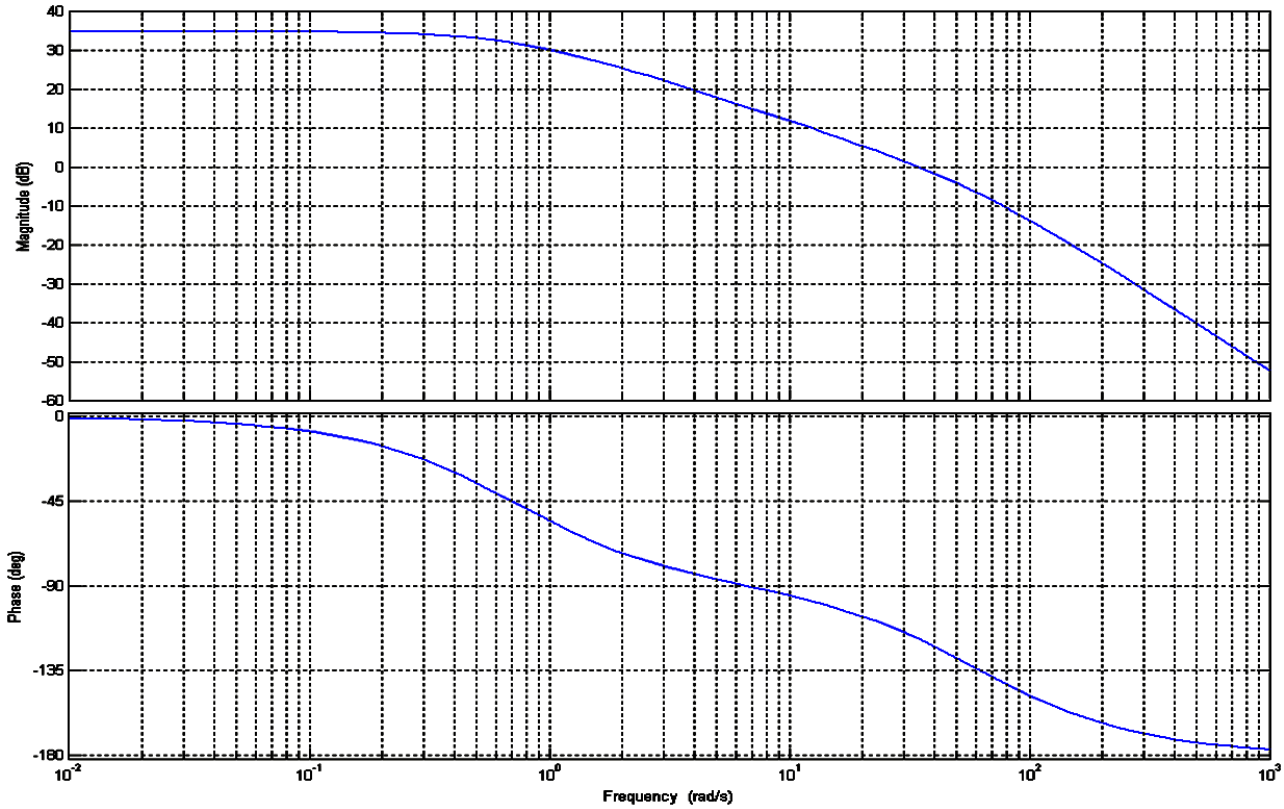


Рис. 2.8. Аппроксимация ПФ ГП при среднем уровне входного сигнала

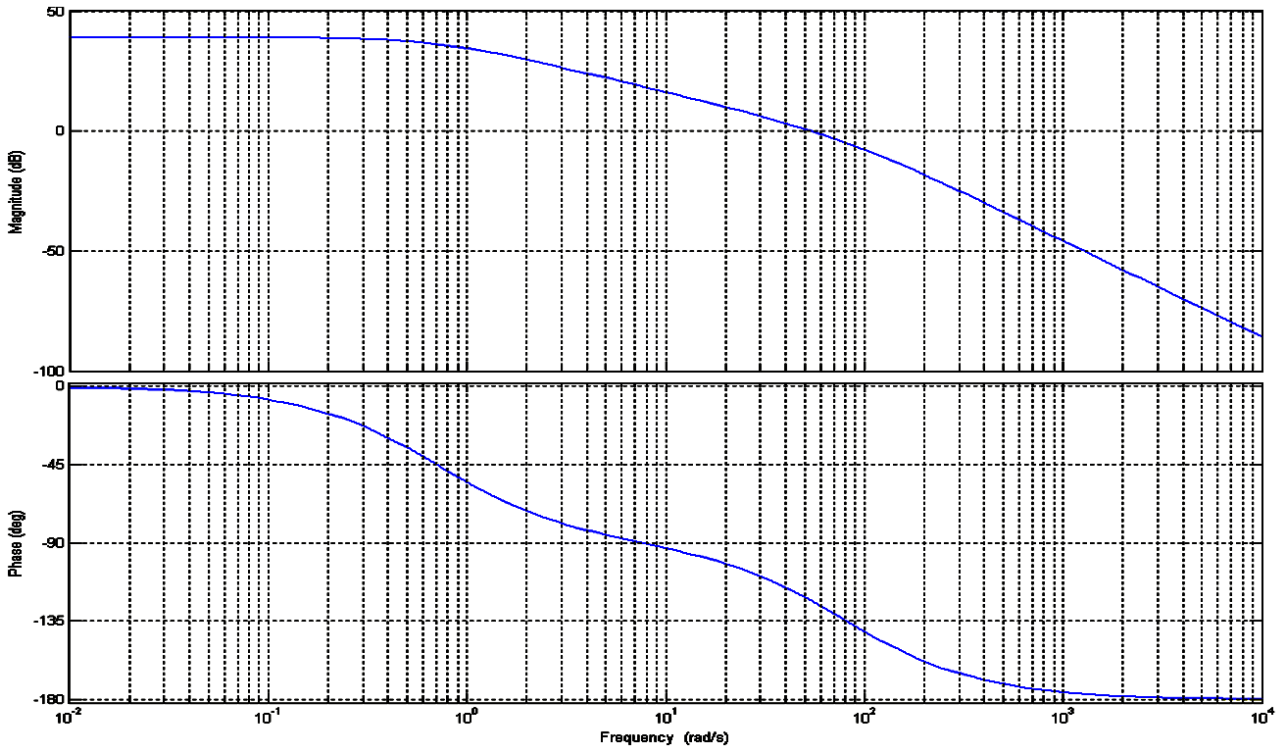


Рис. 2.9. Аппроксимация ПФ ГП при высоком уровне входного сигнала

Сведем коэффициенты аппроксимации ПФ ГП в табл. 2.2.

Таблица 2.2. Коэффициенты аппроксимации ПФ ГП

Уровень входного сигнала	K	T_1, сек	T_2, сек
низкий	49.3	0.0159	1.99
средний	55.5	0.0163	1.41
высокий	91.4	0.0125	1.4

Исходя из полученных данных:

– коэффициент усиления K можно аппроксимировать как $K(I) = 0.0127 \cdot I^2 - 0.309 \cdot I + 50.744$;

– постоянную времени T_1 можно аппроксимировать как $T_1(I) = 3 \cdot 10^6 \cdot I^2 + 0.0002 \cdot I + 0.0139$;

– постоянную времени T_2 можно аппроксимировать как $T_2(I) = 0.0007 \cdot I^2 - 0.0686 \cdot I + 3.014$.

Здесь I – уровень входного сигнала, [мА]. Идентификация ПФ ГП закончена.

Таким образом, по экспериментальным данным сформирована математическая модель ГП в форме ПФ, которую можно использовать для синтеза регулятора.

Синтез фильтра ФЧХ. В ряде практических задач и соответствующих приложений теории вместо термина «регулятор» используют термин «фильтр». Под фильтром понимают звено, стоящее перед ГП. Фильтр и ГП охватывают единичной обратной связью для отработки задающего воздействия. Фильтр нужен для сглаживания колебаний ФЧХ ГП на высоких частотах – см. рис. 2.2, 2.4, 2.6. В нашем случае потребуем, чтобы ФЧХ ГП после коррекции не пересекали асимптоту -160° в диапазоне частот 200 рад/сек …400 рад/сек. Уровень -160° выбран, исходя из среднего значения ФЧХ ГП при среднем и высоком уровнях входного сигнала в диапазоне частот 100…150 рад/сек – см. рис. 2.4, 2.6.

Сведем требуемые поправки Δ к экспериментальным ФЧХ в таблицу 2.3. Здесь поправка Δ=(-160°- $\varphi_э$), $\varphi_э$ – фаза, полученная в эксперименте на определенной частоте. Если Δ < 0, то требуемая поправка считается равной нулю.

Таблица 2.3. Требуемые поправки к экспериментальным ФЧХ

Уровень входного сигнала	Фаза	Частота, рад/сек					
		150.8	189.7	28.2	74.1	29.9	96.6
низкий	$\varphi_э$,°	-128	-158	-236	-237	-250	-263
	Δ,°	0	2	76	77	90	103
средний	$\varphi_э$,°	-159	-181	-222	-247	-260	-190
	Δ,°	0	21	62	87	100	30
высокий	$\varphi_э$,°	-166	-185	-232	-196	-165	-199
	Δ,°	6	25	72	36	5	39
	max Δ,°	6	25	76	87	100	103

Требуемые поправки max Δ представлены также на рис. 2.10. Из того, что максимальные требуемые приращения ФЧХ > 90° следует, что нужен фильтр минимум второго порядка, например, следующего вида:

$$W_ф(p) = \frac{a \cdot p^2 + b \cdot p + 1}{c \cdot p^2 + d \cdot p + 1} \ . \qquad (2.2)$$

Параметры фильтра (2.2) следует выбирать так, чтобы максимально полно выполнить требования табл. 2.3 по требуемым поправкам.

Для поиска параметров a, b, c, d использовался метод наименьших квадратов, минимизирующий сумму квадратов отклонений поправок от требуемых поправок на опорных частотах. При запуске метода из нескольких начальных точек значений параметров (так называемый «мультистарт») были получены отличающиеся решения. Ниже приведены графики ЛАФЧХ для некоторых возможных вариантов фильтра (2.2) – см. рис. 2.11, 2.12. На рис. 2.11, 2.12 точки, удовлетворяющие требованиям табл. 2.3, выделены зеленым цветом, неудовлетворяющие – красным.

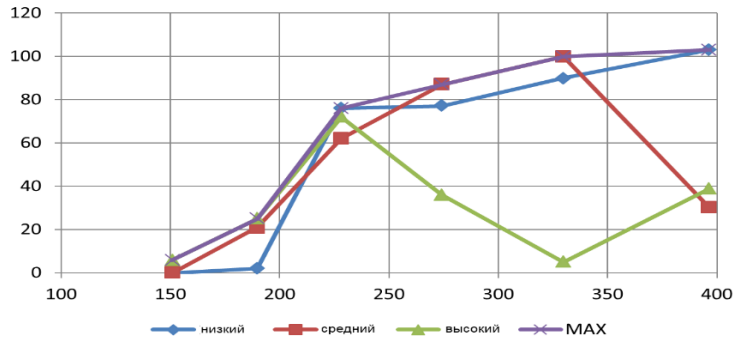


Рис. 2.10. Требуемые поправки к экспериментальным ФЧХ

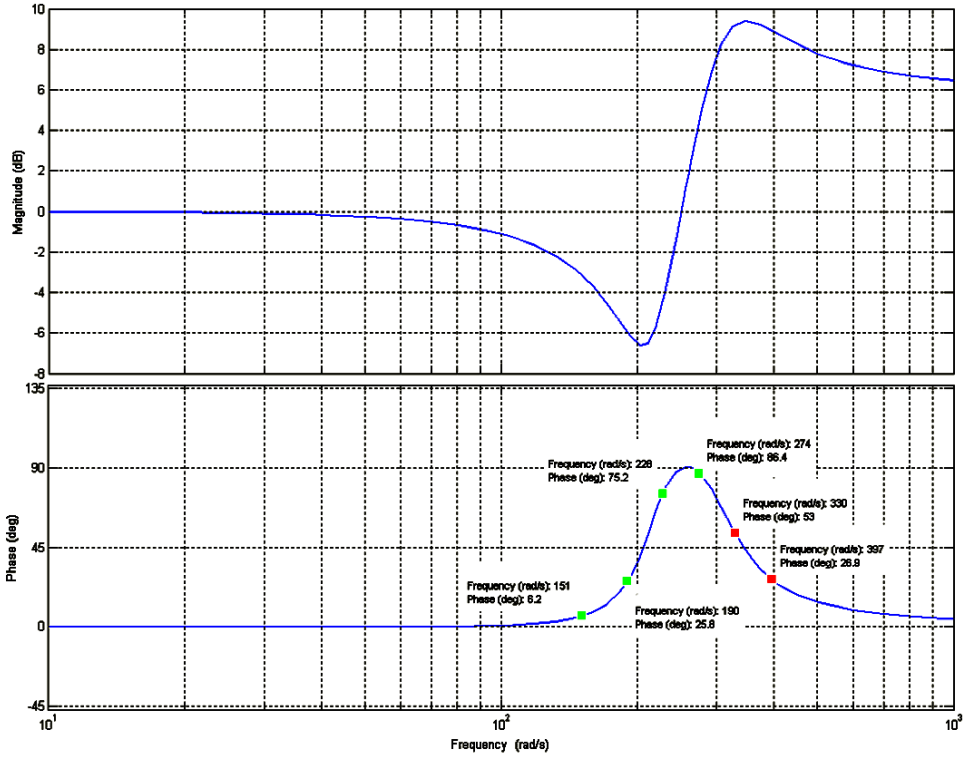


Рис. 2.11. Вариант №1 фильтра ФЧХ

Сведем полученные варианты фильтров в табл. 2.4. Отметим, что если поправка больше эталона (max Δ из табл. 2.3), то это допустимо (см. ***зеленые*** значения курсивом в табл. 2.4): скорректированная ФЧХ будет выше уровня -160°.

Поправки меньше эталона выделены в табл. 2.4 жирным **красным** цветом.

На рис. 2.13 приведены данные согласно табл. 2.4. По горизонтальной оси – номер опорной частоты; по вертикальной – поправка в градусах. Синим пунктиром на рис. 2.13 отмечен эталонный фильтр (max Δ из табл. 2.3); двойной линией – целесообразный корректирующий фильтр №3 (см. далее).

$W_ф(p)$=(2.15e-5·p^2 + 0.001332·p + 1) / (1.065e-5·p^2 + 0.00139·p + 1)

Из табл. 2.4 следует, что по совокупности параметров целесообразно использовать корректирующий фильтр №3 вида

$$W_ф = \frac{2.05\cdot 10^{-5}\cdot p^2+0.0014\cdot p+1}{4.18\cdot 10^{-6}\cdot p^2+0.0017\cdot p+1} \ . \qquad (2.3)$$

Рассмотренная методика при синтезе фильтра использует экспериментальные ФЧХ. Несмотря на некоторую громоздкость и эвристичность, методика позволяет добиться желаемого результата – получить фильтр, реализующий заданные требования к ФЧХ. Для упрощения и регуляризации процедур синтеза была апробирована другая методика, основанная на использовании изоморфного регулятора [10, 11, 13].

$W_ф(p)$= (2.05e-5·p^2 + 0.0014·p + 1) / (4.18e-6·p^2 + 0.0017·p + 1)

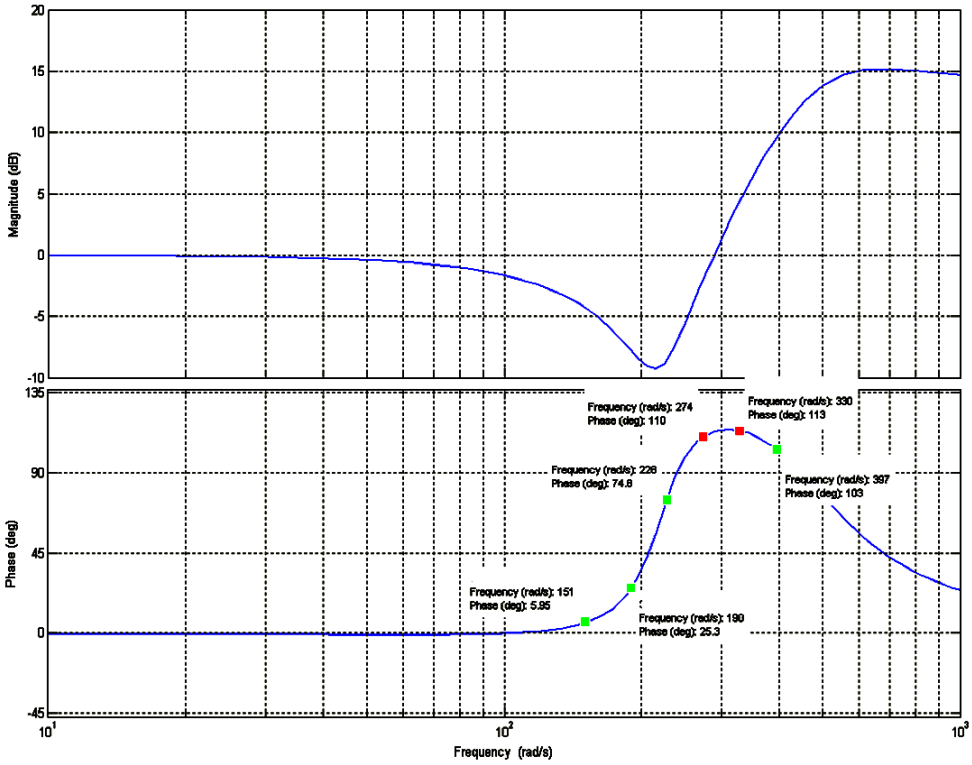


Рис. 2.12. Вариант №3 фильтра ФЧХ

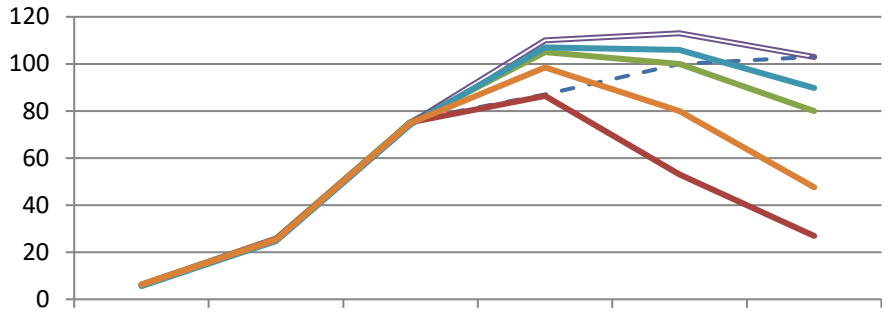


Рис. 2.13. Некоторые возможные варианты фильтра ФЧХ

Таблица 2.4. Характеристики некоторых возможных вариантов фильтра ФЧХ

ПФ фильтра	Поправка при ω [рад/с], °						СКО ошибки,°
	51	90	228	274	330	397	
$(2.15e\text{-}5\cdot p^2 + 0.001332\cdot p + 1)/(1.065e\text{-}5\cdot p^2 + 0.00139\cdot p + 1)$	6.2	5.8	5.2	6.4	**53**	**6.9**	36.5
$(2.08e\text{-}5\cdot p^2 + 0.001397\cdot p + 1) / (6.38e\text{-}6\cdot p^2 + 0.0016\cdot p + 1)$	6.3	5.5	5.4	***05***	00	**80**	11.9
$(2.05e\text{-}5\cdot p^2 + 0.0014\cdot p + 1) / (4.18e\text{-}6\cdot p^2 + 0.0017\cdot p + 1)$	6	5.3	4.8	***10***	***13***	03	**10.8**
$(2.06e\text{-}5\cdot p^2 + 0.0014\cdot p + 1) / (5.3e\text{-}6\cdot p^2 + 0.0017\cdot p + 1)$	5.6	4.7	4.2	***07***	***06***	**9.7**	10.1
$(2.11e\text{-}5\cdot p^2 + 0.001364\cdot p + 1) / (8.5e\text{-}6\cdot p^2 + 0.0015\cdot p + 1)$	6.2	5.3	4.9	***8.5***	**79.9**	**47.6**	24.5
$(1.436e\text{-}5\cdot p^2 + 0.000758\cdot p + 1) / (5.744e\text{-}6\cdot p^2 + 0.001516\cdot p + 1$	**-5**	**-3**	**8.7**	**4.2**	103	**85.6**	31.4
Эталонный фильтр, °	6	25	76	87	100	103	0

Синтез изоморфного регулятора. Методика синтеза изоморфного регулятора (ИР) рассмотрена в работах [10, 11] и является строго формализованной. Структура замкнутого контура управления с ИР, в соответствии с [10], представлена на рис. 2.14, где W – ПФ ГП, $W_{ИР}$ – ПФ ИР, $W_{эм}$ – эталонная модель (ЭМ). В [10] и здесь в 1-й главе 2-й части книги доказано, что для объекта с одним входом и одним выходом

$$W_{ИР} = W^{-1} \tag{2.4}$$

и, следовательно, контур преобразуется к эквивалентному виду, показанному на рис. 2.15. Таким образом, при применении ИР задача синтеза сводится, по сути, к выбору эталонной модели.

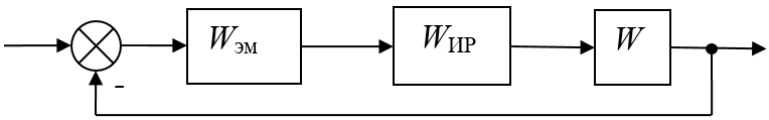


Рис. 2.14. Замкнутый контур управления с изоморфным регулятором

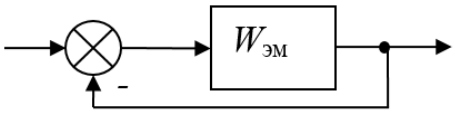


Рис. 2.15. Эквивалентный контур управления

Как и при синтезе фильтра, процедура идентификации ПФ ГП по экспериментальным данным остается обязательной. Пусть по результатам идентификации получена ПФ ГП вида (2.1). Может быть учтен и более общий вид ПФ – с учетом полученных аппроксимаций ее параметров при различных уровнях входного сигнала. Далее можно рассмотреть два варианта:

1) считая полученную ПФ фильтра (2.3) идеальной, интересно получить реализующую ее эталонную модель $W_{эм}$. В этом случае необходимо сравнивать контур, показанный на рис. 2.15, с контуром на рис. 2.16;

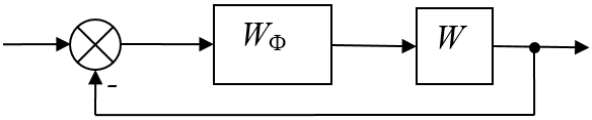


Рис. 2.16. Замкнутый контур с фильтром

2) считая ПФ ГП W известной, воспользуемся рис. 2.14 и описанной здесь и в работах [10, 11, 13] методикой синтеза ИР. В этом случае для ЭМ сразу должна выбираться ПФ $W_{эм}$ такая, чтобы замкнутый контур на рис. 2.15 обеспечивал требуемую АФЧХ.

Вариант 1 не представляет практической ценности и позволяет лишь убедиться, что при полученной ПФ фильтра (2.3) нетрудно вычислить некоторую эквивалентную ему ЭМ с ПФ $W_{эм}$. Это можно сделать, приравняв между собой ПФ замкнутых контуров на рис. 2.16 и рис. 2.15. Далее останавливаться на этом варианте не будем.

Более интересным и практичным является вариант 2. В этом случае после идентификации ПФ ГП, например, в виде (2.1), сразу определяется изоморфный

регулятор по формуле (2.4). А далее ПФ $W_{эм}$ может быть назначена по необходимой нам «идеальной» АФЧХ с учетом аппроксимаций параметров в ПФ ГП. В рассматриваемом случае требования к замкнутому единичной обратной связью контуру «ГП + регулятор» были заданы заказчиком в виде эталонной ПФ

$$\Phi_{ЭМЗ} = \frac{1}{0.00123 \cdot p^2 + 0.035 \cdot p + 1} \quad . \tag{2.5}$$

Здесь $\Phi_{эмз}$ – ПФ эталонной модели замкнутого контура. Для указанной ПФ: перерегулирование – 17%, время регулирования (входа переходного процесса в трубку значений ±5%) – $T_{рег}$=0.18 сек, частота среза – $\omega_{ср}$=28.3 рад/с. Исходя из (2.5), сразу определяется требуемая ПФ ЭМ разомкнутого контура (см. рис. 2.15)

$$W_{ЭМ} = \frac{1}{0.00123 \cdot p^2 + 0.035 \cdot p} \quad . \tag{2.6}$$

Далее, как видно из рис. 2.14, с учетом (2.1), (2.4) и (2.6) может быть получена структура обобщенного регулятора, представляющего собой произведение $W_Р = W_{ИР} \cdot W_{ЭМ}$:

$$\mathrm{W}_{ИР} \cdot \mathrm{W}_{ЭМ} = \frac{0.0163 \cdot p + 1}{55.5} \cdot \frac{1.41 \cdot p + 1}{1} \cdot \frac{1}{p \cdot (0.00123 \cdot p + 0.035)} = \frac{0.023 \cdot p^2 + 1.426 \cdot p + 1}{0.0683 \cdot p^2 + 1.943 \cdot p} \quad .$$

Полученную ПФ обобщенного регулятора можно упростить и получить в более привычной форме ПИД-регулятора или ПИ-регулятора:

$$\mathrm{W}_Р = \mathrm{W}_{ИР} \cdot \mathrm{W}_{ЭМ} = \frac{0.023 \cdot p^2 + 1.426 \cdot p + 1}{0.0683 \cdot p^2 + 1.943 \cdot p} \approx \frac{0.5148}{p} + 0.716 - 0.0133 \cdot p \approx \frac{0.5148}{p} + 0.716 \quad .$$

Все приведенные выше регуляторы практически эквивалентны. Их исследования при различных входных сигналах показали, что графики переходных процессов для этих регуляторов почти неразличимы. В качестве примера на рис. 2.17-2.19 приведены графики реакций указанных регуляторов на ступенчатый, линейный и периодический входной сигналы. Окончательный выбор наиболее предпочтительного варианта регулятора осуществляется по результатам его отработки с ГП в замкнутом контуре.

Заключение. На основе анализа экспериментальных ЛАЧХ газового привода, как объекта управления, идентифицирована его ПФ, а также получены наилучшие аппроксимации параметров ПФ при различных уровнях входного сигнала. Показано, что запасы по амплитуде и фазе ЛАЧХ ГП в худшем случае (при высоком уровне входного сигнала) составляют 20 дБ и 55° при достаточных

теоретических запасах 14 дБ и 45° соответственно, т.е. замкнутая система устойчива.

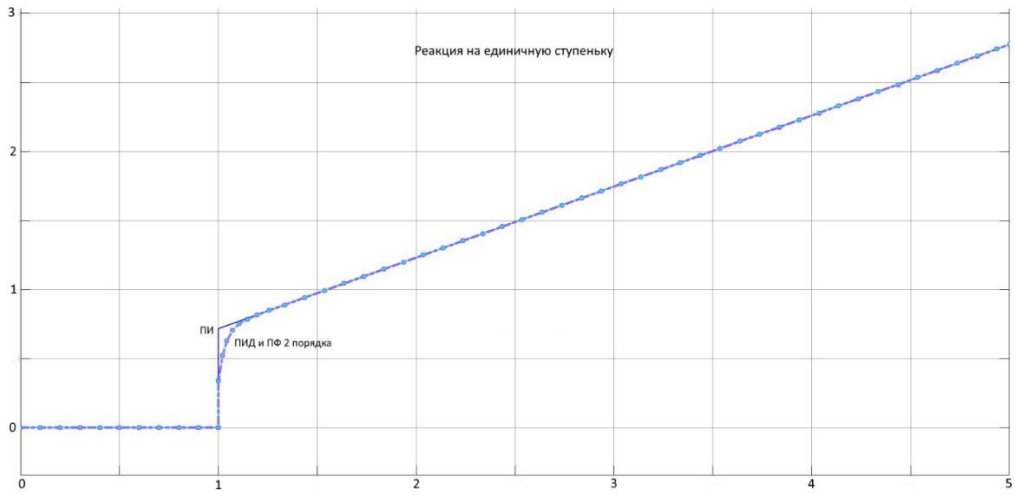


Рис. 2.17. Реакции регуляторов на единичную ступеньку

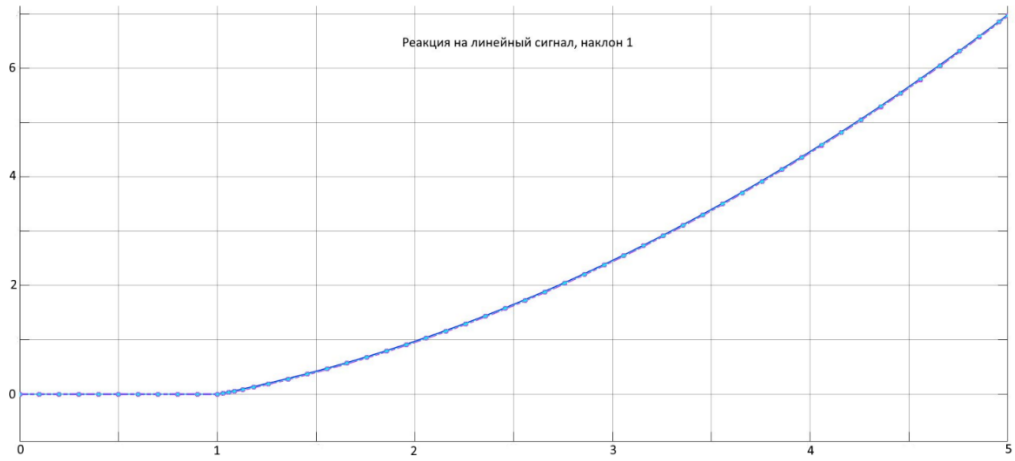


Рис. 2.18. Реакции регуляторов на линейный сигнал

Начиная с частот 190..200 рад/сек, ЛАЧХ отклоняются от теоретических значений. ФЧХ отклоняются от теоретических значений, начиная с частот 60..100 рад/сек. Кроме того, начиная с указанных частот, характеристики отдельных образцов привода начинают «расходиться» друг от друга. Такие индивидуальные особенности приводов не могут быть учтены в рамках единой передаточной функции. В связи с этим, исходя из усредненных значений ЛАЧХ и ФЧХ, определена лучшая аппроксимация передаточной функции привода в виде (2.1) для среднего уровня входного сигнала, а также определены формульные зависимости для аппроксимации коэффициента усиления и постоянных времени в ПФ (2.1) при других уровнях сигнала.

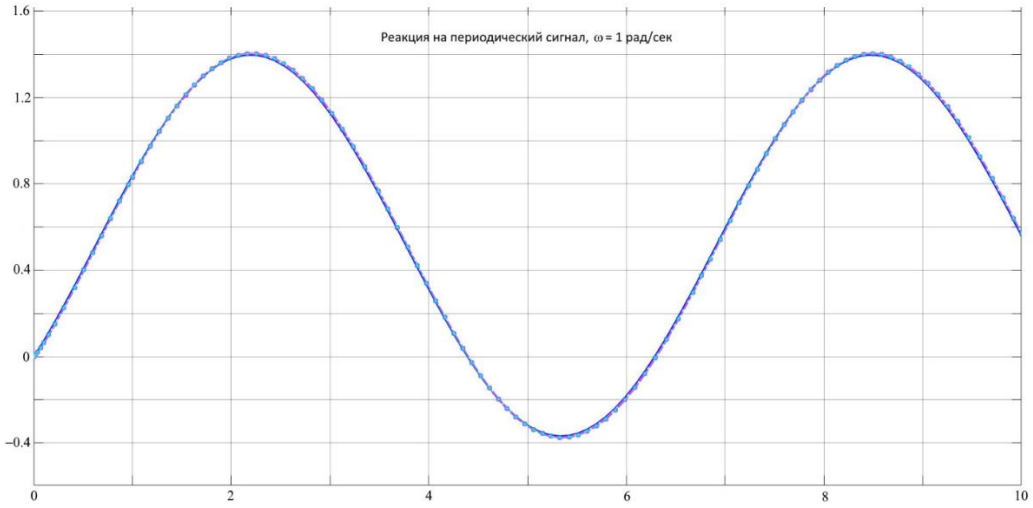


Рис. 2.19. Реакции регуляторов на периодический сигнал

Таким образом, по экспериментальным данным была сформирована математическая модель ГП в форме ПФ, которая позволила синтезировать фильтры и регулятор, отвечающие заданным требованиям, предъявляемым к замкнутому контуру управления приводом.

Лучшим из синтезированных фильтров для выравнивания ФЧХ в диапазоне частот 200 рад/сек .. 400 рад/сек оказался фильтр (2.3), который обеспечивает дополнительный запас устойчивости по амплитуде 8...10 дБ на частоте ω_{-180} (значение частоты ω_{-180} получено до коррекции). Предлагаемый фильтр также обеспечивает выравнивание ФЧХ, которая после коррекции не пересекает уровень -180°.

В целом, рассмотренная методика синтеза фильтра по экспериментальным ФЧХ, несмотря на некоторую сложность и эвристичность, позволила построить фильтр, реализующий заданные требования к ФЧХ ГП.

Для упрощения и регуляризации процедур синтеза была апробирована методика, основанная на теории изоморфного регулятора и положительно себя зарекомендовавшая при решении ряда задач [10, 11, 13]. Методика опирается на результаты идентификации ПФ ГП вида (2.1) по его полным ЛАЧХ и задание требований со стороны заказчика к качеству управления в замкнутом контуре в форме эталонной модели вида (2.5). На основе методики по ПФ ГП вида (2.1) был синтезирован изоморфный регулятор и с его помощью были получены три варианта обобщенного регулятора, представляющего собой произведение $W_{Р}=W_{ИР}\cdot W_{ЭМ}$, которые по результатам исследования при различных входных сигналах оказались практически эквивалентны. Окончательный выбор наиболее предпочтительного варианта обобщенного регулятора осуществляется с учетом

простоты его схемотехнической реализации по результатам отработки с ГП в замкнутом контуре. Рассмотренные методики синтеза фильтра и изоморфного регулятора и результаты их исследования обобщены в работе [14].

2.2. Синтез изоморфного регулятора для позиционного привода с вентильным двигателем с использованием датчика углового положения ротора

Рассматривается методика синтеза изоморфного регулятора для позиционного привода с вентильным двигателем с использованием только датчика углового положения ротора двигателя. Приведены результаты математического моделирования. Исследована робастность изоморфного регулятора.

Для информационного обеспечения системы управления использовался наблюдатель, построенный на основе нелинейного фильтра Калмана. Величины токов двигателя также оценивались в наблюдателе. Идентификация параметров математической модели рассматриваемого двигателя осуществлялась по его паспортным данным и данным практических испытаний [15]. Полученные параметры математической модели двигателя представлены в таблице 2.5.

Таблица 2.5. Параметры модели ВД

R, Ом	L_d, мГн	L_q, мГн	ψ_0, Вб	p, б/р	m, б/р	J_{rot}, кг·м^2	k_i, б/р	k_u, б/р
0,126	0,0252	0,0580	0,0047	4	3	$1{,}19\cdot10^{-5}$	2,3	- 0, 05

Теоретические аспекты и методика синтеза изоморфных регуляторов подробно изложены в главе 1 этой части книги и в работе [10]. Примеры синтеза изоморфных регуляторов для различных объектов управления, в том числе для приводов, приведены в работах [10, 13, 14, 16]. Здесь воспользуемся отработанными методиками применительно к вентильному двигателю.

Синтез изоморфного регулятора. При синтезе позиционного регулятора считалось, что объект управления имеет один вход U_q и один выход Θ_r и в общем виде может быть записан в форме:

$$\Theta_r = f\,(U_q). \tag{2.7}$$

На вход регулятора должно поступать задающее воздействие $\Theta_r^{зад}$, соответствующее заданному угловому положению ротора. По значению $\Theta_r^{зад}$ регулятором должно быть сформировано заданное значение напряжения $U_q^{зад}$, подаваемое на объект управления. Регулятор должен обеспечить полную управляемость объекта и в общем виде уравнение для регулятора может быть записано в форме [10]:

$$U_q^{зад} = f^{-1}(\Theta_r^{зад}). \tag{2.8}$$

Как видно из уравнений (2.7) и (2.8), функции, отражающие структуру объекта и регулятора, взаимно обратны. Заданное значение напряжения $U_q^{зад}$, формируемое на выходе регулятора, и напряжение U_q на входе объекта управления должны точно и взаимно однозначно соответствовать друг другу $U_q^{зад}=1\cdot U_q$, то есть между U_q и $U_q^{зад}$ имеется единичное изоморфное преобразование. Единичное оно только в этом скалярном примере [10]. Сказанное поясняется коммутативной диаграммой на рис. 2.20. Регулятор с «передаточной функцией» f^{-1} будем называть изоморфным [10].

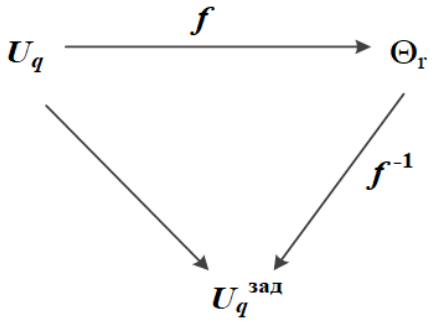


Рис. 2.20. Коммутативная диаграмма, где f – объект, f^{-1}– регулятор

Структура робастного контура управления с изоморфным регулятором показана на рис. 2.21 [10]. Т.к. изоморфный регулятор полностью компенсирует динамику объекта управления, то качество регулирования переходных процессов задается эталонной моделью с передаточной функцией $W_{эт}$. На вход контура поступает желаемое значение положения ротора $\Theta_r^{ж}$. На выходе эталонной модели формируется заданное значение положения ротора для отработки изоморфным регулятором $\Theta_r^{зад}$.

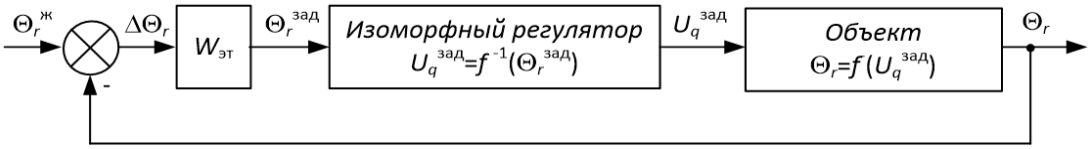


Рис. 2.21. Контур управления с изоморфным регулятором

Полный регулятор является произведением передаточной функции эталонной модели $W_{эт}$ и изоморфного регулятора с передаточной функцией f^{-1}- см. рис. 2.22.

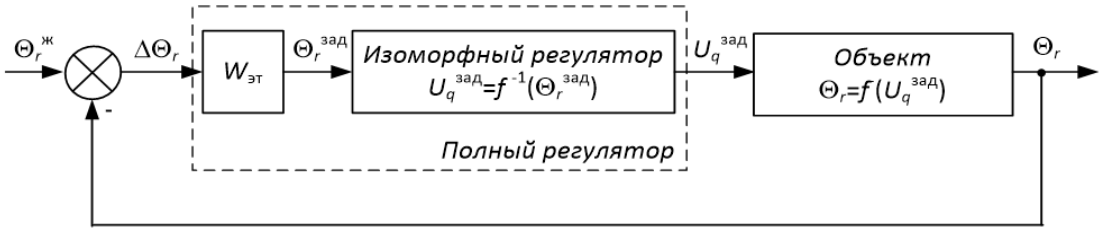


Рис. 2.22. Структура полного регулятора в контуре управления

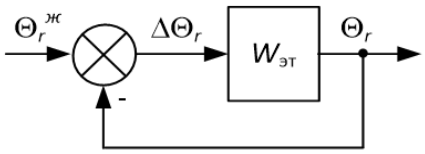


Рис. 2.23. Структура контура после преобразования

Если учесть, что в контуре на рис. 2.21 и на рис. 2.22 произведение $f^{-1}\cdot f = 1$, то этот контур преобразуется к простейшему виду, показанному на рис. 2.23. Как видно из рис. 2.23, динамика контура управления с изоморфным регулятором определяется только структурой эталонной модели. Так если

$$W_{эт} = (T\cdot s)^{-1}, \tag{2.9}$$

то передаточная функция замкнутого контура будет апериодическим звеном с передаточной функцией

$$\Phi(s) = (T\cdot s+1)^{-1}. \tag{2.10}$$

В случае выбора

$$W_{эт} = k\cdot(T\cdot s+1)^{-1}, \tag{2.11}$$

передаточная функция замкнутого робастного контура с большим коэффициентом усиления

$$\Phi(s) = \frac{k}{T\cdot s+1+k} = \frac{k}{(1+k)\left[\frac{T}{(1+k)}s+1\right]} \approx \frac{1}{T^*\cdot s+1}\ ,\ \text{где}\ T^* = \frac{T}{(1+k)}, \tag{2.12}$$

при достаточно большом k обеспечит астатизм по управляемой координате. При этом T^* в (2.12) становится в $(1+k)$ раз меньше T и время переходного процесса резко сокращается в сравнении с исходным контуром, что может снизить устойчивость. Для обеспечения прежнего времени переходного процесса одновременно с увеличением коэффициента усиления в k раз нужно в $(1+k)$ раз увеличить и T. Тогда для робастного контура нужно назначить

$$W_{эт} = k\left(T(1+k)s+1\right)^{-1}, \tag{2.13}$$

где T - прежняя (до назначения большого коэффициента усиления) постоянная времени. Передаточная функция робастного контура, показанного на рис. 2.23, приобретёт вид

$$\Phi(s) = \frac{k}{T(1+k)s+1+k} = \frac{k}{(1+k)(T\cdot s+1)} \approx \frac{1}{T\cdot s+1} \tag{2.14}$$

и при достаточно большом k будет практически точно соответствовать по динамике передаточной функции исходного контура с постоянной времени T.

Определим структуру функции f^{-1}, исходя из структуры функции f объекта управления. Для этого воспользуемся системой уравнений модели ВД:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{di_d}{dt} &= \frac{1}{L_d}\left(p\omega_m L_q i_q - Ri_d + U_d\right)\\
\frac{di_q}{dt} &= \frac{1}{L_q}\left(U_q - Ri_q - p\omega_m L_d i_d - \psi_0 p\omega_m\right)\\
\frac{d\omega_m}{dt} &= \frac{1}{J_{rot}}\left(0{,}5pm(\psi_0 i_q + (L_d - L_q)i_d i_q) - M_c\right)\\
\frac{d\theta_r}{dt} &= \omega_m
\end{aligned}\right\}. \qquad (2.15)$$

Вводя оператор дифференцирования $s = \frac{d}{dt}$ и преобразуя (2.15) последовательной подстановкой уравнений друг в друга, после достаточно громоздких вычислений получим выражение:

$$m\cdot p^4\cdot i_q^2\cdot L_d\cdot L_q^2\cdot(L_q - L_d)\cdot \mathbf{s^3\Theta_r^3} + M_c\cdot R\cdot L_d\cdot L_q\cdot p^2\cdot \mathbf{s^2\Theta_r^2} +$$
$$+m\cdot p^2\cdot((L_q - L_d)\cdot(i_q^2\cdot R^2\cdot L_q - U_d^2\cdot L_d) + \psi_0^2\cdot R^2 + \psi_0\cdot R\cdot U_d\cdot(2L_d - L_q))\cdot \mathbf{s\Theta_r} + M_c\cdot R^3 =$$
$$= m\cdot p\cdot R\cdot(\psi_0\cdot R + U_d\cdot(L_d - L_q))\cdot \mathbf{U_q},$$

связывающее напряжение U_q и положение ротора Θ_r. Отсюда может быть получено точное выражение для функции $U_q^{зад} = f^{-1}(\Theta_r^{зад})$. Если же пренебречь высокими степенями производных задающего воздействия $\Theta_r^{зад}$ (в формуле выделены красным цветом), то выражение для изоморфного регулятора получим в виде:

$$U_q^{зад} = A + B\cdot s\cdot\Theta_r^{зад} = f^{-1}(\Theta_r^{зад}), \qquad (2.16)$$

где

$$A = \frac{M_C\cdot R^2}{mp(\psi_0\cdot R + U_d\cdot(L_d - L_q))}, \qquad (2.17)$$

$$B = \frac{(L_q - L_d)\cdot(L_q\cdot R^2\cdot i_q^2 - U_d^2\cdot L_d) + \psi_0^2\cdot R^2 + \psi_0\cdot R(2L_d - L_q)\cdot U_d}{R(\psi_0\cdot R + U_d\cdot(L_d - L_q))}. \qquad (2.18)$$

Остается выбрать передаточную функцию $W_{эт}$ в виде (2.9) или (2.13). Возможен и другой выбор $W_{эт}$, но виды (2.9) и (2.13) являются простейшими.

Конечно, введение в нелинейном уравнении (2.15) оператора дифференцирования $s = d/dt$ вместо оператора Лапласа является вынужденным и достаточно

грубым приемом. Тем не менее, в данной задаче этот прием оказался приемлемым, так как коэффициенты при высоких степенях производных задающего воздействия $\Theta_r^{зад}$ весьма малы и ими можно пренебречь. При строгом решении задачи необходимо было вначале линеаризовать уравнение (2.15) на шаге интегрирования, затем применить к линеаризованному уравнению преобразование Лапласа. В данном случае эта дополнительная громоздкая процедура не потребовалась.

Пусть $W_{эт}$ определяется видом (2.9) – т.е. является интегратором. Тогда в соответствии с рис. 2.22 полный регулятор (далее будем называть его просто «регулятором») будет определяться выражением:

$$W_r = (T\cdot s)^{-1}\cdot(A + B\cdot s\cdot\Theta_r^{зад}) = A(T\cdot s)^{-1}+B(T)^{-1}\Theta_r^{зад}. \qquad (2.19)$$

Контур управления, приведенный на рис. 2.21, преобразуется к виду

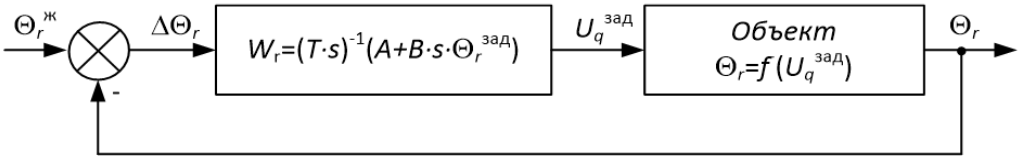


Рис. 2.24. Контур управления с изоморфным регулятором

В регуляторе (2.19) назначению подлежит только постоянная времени T. Регулятор по структуре близок к пропорционально-интегральному, но переходный процесс должен быть близким к апериодическому с постоянной времени T.

При выборе $W_{эт}$ в форме (2.13) регулятор будет определяться выражением:

$$W_r = k\left(T\left(1+k\right)s+1\right)^{-1}(A+B\cdot s\cdot\Theta_r^{зад}). \qquad (2.20)$$

В регуляторе (2.20) назначению подлежат коэффициент усиления k и постоянная времени T, например, при k=99 ошибка регулирования составит примерно 1%. Переходный процесс должен быть близким к апериодическому.

Отметим, что коэффициенты A и B на каждом шаге подлежат пересчету, т.к. соответствующие выражения (2.17) и (2.18) содержат оценку тока i_q и величину напряжения U_d, поступающую с выхода другого регулятора. В формулах для параметров A и B (2.17), (2.18) выделим постоянные коэффициенты, зависящие только от значений параметров модели двигателя:

$$A = \frac{M_C\cdot R^2}{mp(\psi_0\cdot R + U_d\cdot(L_d - L_q))} = \frac{c_9\hat{M}_C}{c_1 + c_2U_d};$$

$$c_1 = mp\psi_0 R;$$

$$c_2 = L_d - L_q;$$

$$c_9 = R^2.$$

$$B=\frac{(L_q-L_d)\cdot(L_q\cdot R^2\cdot i_q^2-U_d^2\cdot L_d)+\psi_0^2\cdot R^2+\psi_0\cdot R(2L_d-L_q)\cdot U_d}{R(\psi_0\cdot R+U_d\cdot(L_d-L_q))}=$$

$$=\frac{c_3+c_4 i_q^2+(c_5+c_6U_d)U_d}{c_7+c_8U_d};$$

$$c_3=\psi_0^2R^2;\ c_4=(L_q-L_d)L_qR^2;\ c_5=\psi_0R(2L_d-L_q);\ c_6=-(L_q-L_d)L_d;$$

$$c_7=\psi_0R^2; c_8=R(L_d-L_q).$$

Тогда соотношение для определения напряжения на выходе регулятора для случая $W_{эт} = (T\cdot s)^{-1}$ будет иметь следующий вид:

$$U_q^{зад}=A+B\frac{d\Theta_r^{зад}}{dt},\quad \frac{\Theta_r^{зад}(s)}{\Delta\Theta_r(s)}=W_{эт}=\frac{1}{T\cdot s},\quad \frac{d\Theta_r^{зад}}{dt}=\frac{1}{T}\Delta\Theta_r,$$
$$U_q^{зад}=A(\hat{M}_C,U_d)+B(\hat{i}_q,U_d)\frac{1}{T}\Delta\Theta_r. \tag{2.21}$$

Для случая, когда $W_{эт}=\frac{K}{T(K+1)s+1}=\frac{\Theta_r^{зад}(s)}{\Delta\Theta_r(s)}$ для вычисления напряжения $U_q^{зад}$ необходимо решать дополнительно следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\Theta_r^{зад}}{dt}=\frac{1}{T(K+1)}(K\Delta\Theta_r-\Theta_r^{зад}).$$

В этом случае, при использовании метода Эйлера

$$\Theta_r^{зад}(t_k)=\Theta_r^{зад}(t_{k-1})+\frac{d\Theta_r^{зад}}{dt}dt,$$

Тогда выходное напряжение регулятора:

$$U_q^{зад}=A(\hat{M}_C,U_d)+B(\hat{i}_q,U_d)\frac{K\Delta\Theta_r-\Theta_r^{зад}}{T(K+1)}. \tag{2.22}$$

Из этой формулы видно, что при достаточно большом значении коэффициента усиления K, она эквивалентна соотношению (2.21).

Структурная схема системы управления с изоморфным регулятором в двух вариантах (2.21) и (2.22) изображена на рис. 2.26. Изоморфный регулятор представлен на рисунке 2.25.

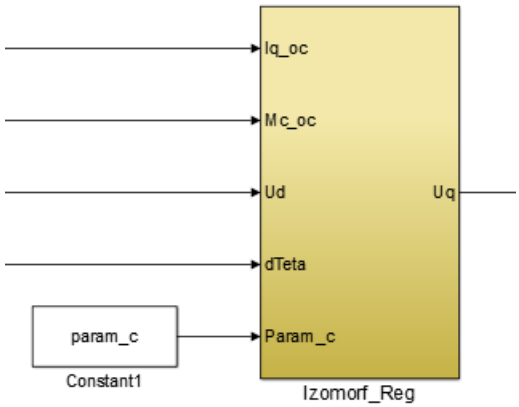


Рис. 2.25. Блок изоморфного регулятора

На вход регулятора с наблюдателя поступают оценки тока $\hat{i}_q$ и момента нагрузки на валу двигателя $\hat{M}_c$, значение напряжения U_d, а также ошибка $\Delta\Theta_r$ отработки заданного значения угла Θ_r^{ref} поворота ротора двигателя: $\Delta\Theta_r = \Theta_r^{ref} - \Theta_r^*$, где Θ_r^* - измеренное датчиком значение угла поворота ротора.

В состав блока «Izomorf_Reg» (см. рис. 2.27) входят два подблока «We_integrator» и «We_ aperiod_zweno» с эталонными передаточными функциями, соответствующими формулам (2.21) и (2.22). Выбор закона управления (2.21) или (2.22) осуществляется переключателем «Manual Switch».

Результаты моделирования. Для проверки работоспособности изоморфных регуляторов (2.21), (2.22) было выполнено моделирование их работы с вентильным двигателем, параметры которого представлены в таблице 2.5. Первоначально в регуляторе использовался подблок (2.21) с постоянной времени T = 0,001 с. Ниже на рис. 2.28…2.31 приведены полученные при моделировании результаты.

На рис. 2.28 показаны графики заданного перемещения штока привода и фактического перемещения, полученного пересчётом по значениям угла поворота ротора двигателя, измеренного датчиком. При пересчёте значение зазора в редукторе не учитывалось. На рис. 2.29 изображена полученная при отработке заданного перемещения штока ошибка. На рис. 2.30 представлен график изменения управляющего напряжения Uq.

На рис. 2.31 для сравнения показана ошибка, полученная при использовании МОЗД-регулятора [17], синтезированного с использованием метода обратных задач динамики (МОЗД) [18], с настройками T1=0,0045; Tw=0,0045; ks=0,9.

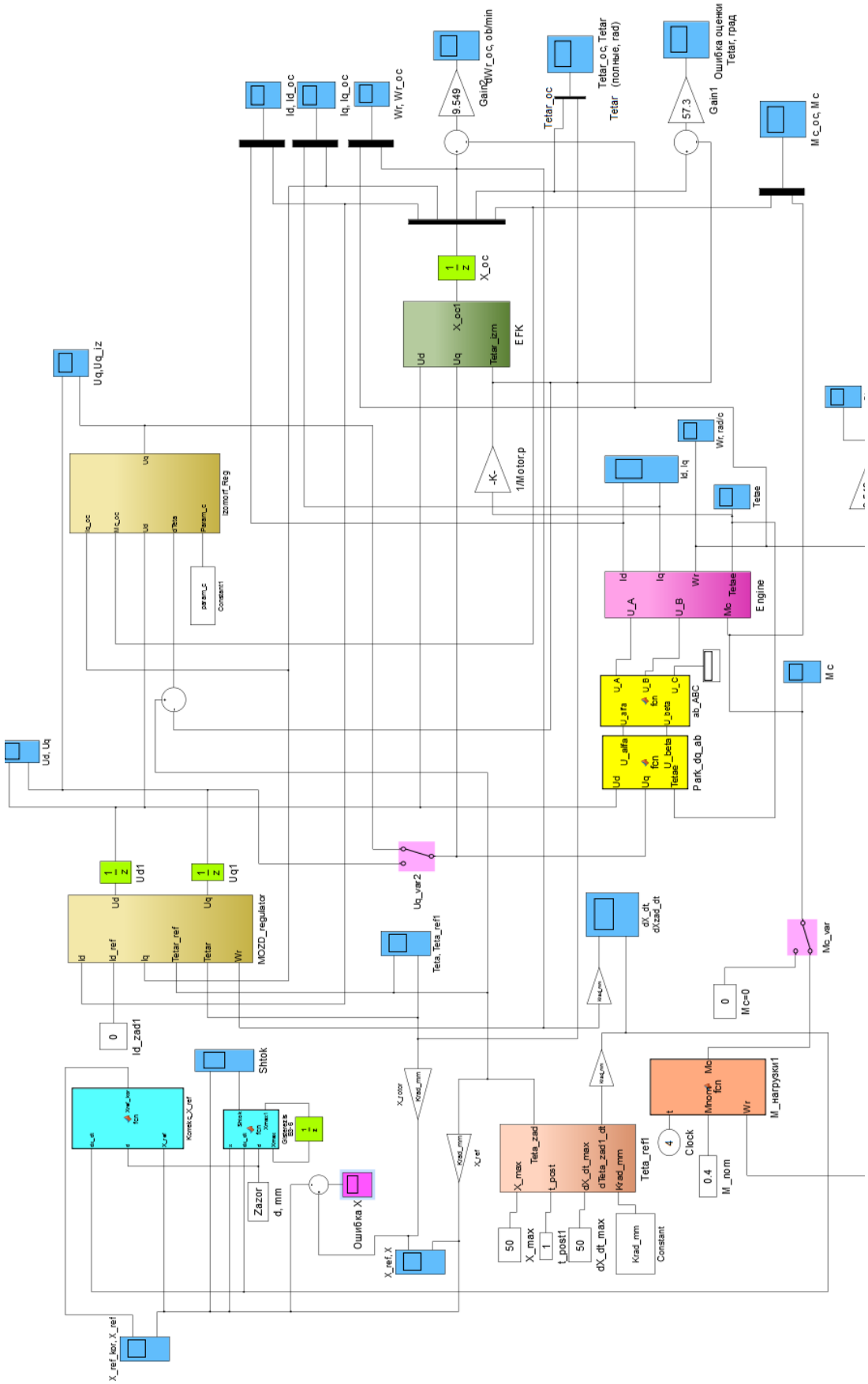


Рис.2.26. Структурная схема системы управления с изоморфным регулятором

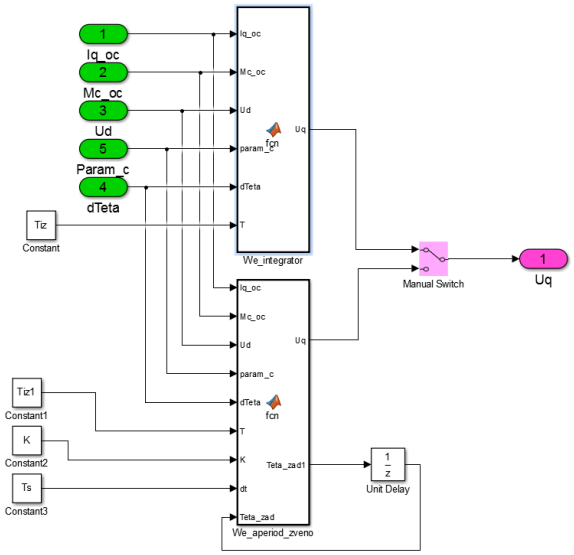


Рис. 2.27. Структурная схема блока изоморфного регулятора

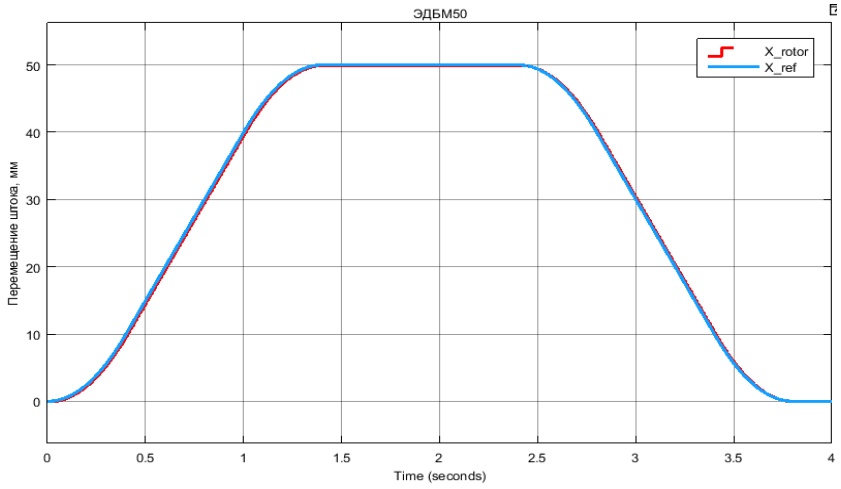


Рис. 2.28. Отработка заданного перемещения штока привода

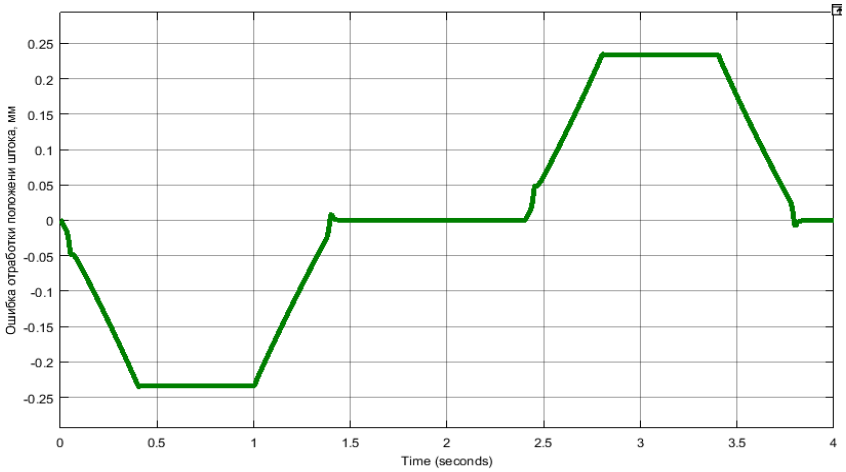


Рис. 2.29. Ошибка отработки заданного перемещения штока привода с подблоком изоморфного регулятора (2.21)

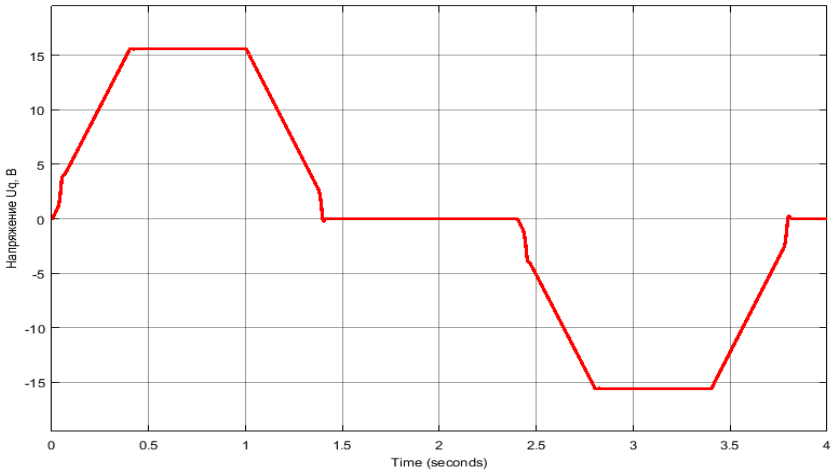


Рис. 2.30. График изменения управляющего напряжения U_q

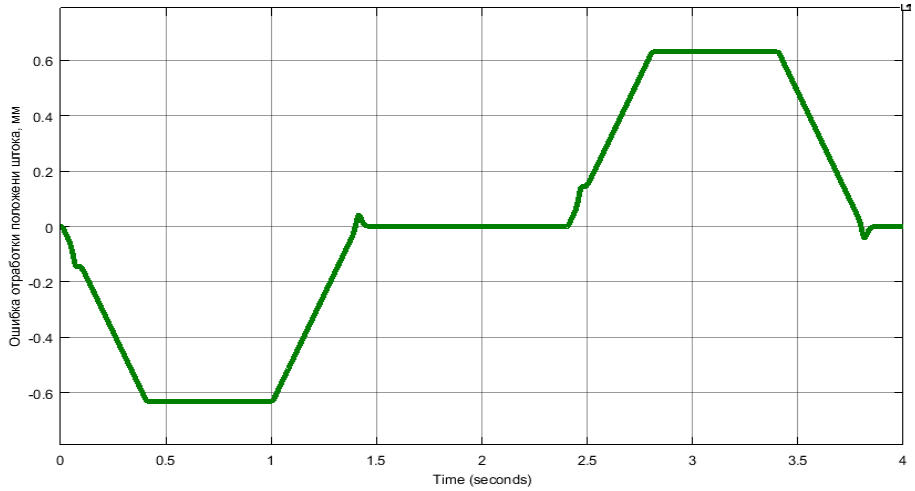


Рис. 2.31. Ошибка отработки заданного перемещения штока привода с МОЗД - регулятором

Видно, что изоморфный регулятор (2.21) обеспечивает ошибки отработки перемещения штока в диапазоне -0,23 мм…+0,23 мм, а МОЗД–регулятор в диапазоне -0,62 мм…+0,62 мм, т.е. в 2,7 раза хуже. Такого же порядка ошибки отработки получены для МОЗД–регулятора в случае построения системы управления ВД без использования датчиков фазных токов [19].

Рассмотрим теперь работу изоморфного регулятора (2.22) с большим коэффициентом усиления. Полагая Tiz1=0,001 и K=99, получили недопустимо большое значение ΔX ошибки в отработке заданного перемещения штока, как это видно из рис. 2.32.

При Tiz1=0,001 и K=1000 результат представлен на рис. 2.33. Ошибка отработки перемещения штока в диапазоне -0,42 мм…+0,19 мм. При Tiz1=0,001 и K=10000 результат представлен на рис. 2.34. Ошибка отработки перемещения штока в диапазоне -0,25 мм…+0,22 мм.

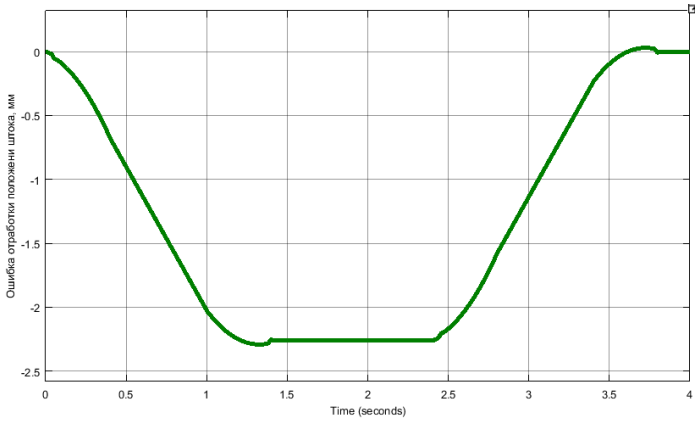


Рис. 2.32. Ошибка отработки заданного перемещения штока привода с подблоком изоморфного регулятора (2.22) при К=99

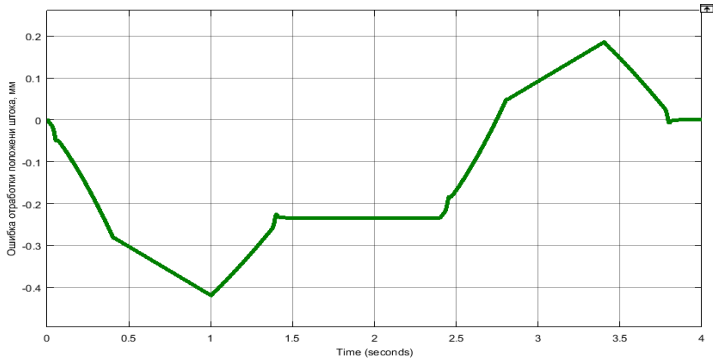


Рис. 2.33. Ошибка отработки заданного перемещения штока привода с подблоком изоморфного регулятора (2.22) при К=1000

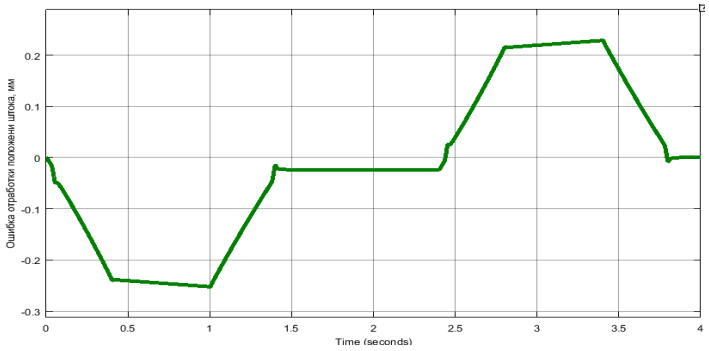


Рис. 2.34. Ошибка отработки заданного перемещения штока привода с подблоком изоморфного регулятора (2.22) при К=10000

Отсюда можно сделать вывод, что использование в изоморфном регуляторе эталонного звена с передаточной функцией (2.13) с большим коэффициентом усиления нецелесообразно, так как результат хуже, чем у простого по структуре изоморфного регулятора (2.21) с эталонным звеном (2.9).

По результатам моделирования можно сделать следующий вывод. Изоморфный регулятор (2.21) работает весьма эффективно в смысле точности отработки задающего воздействия, обладает высоким быстродействием и требует мало памяти для своей реализации.

Проверка изоморфного регулятора на робастность. В таблице 2.6 в последней строке приведены выделенные «испорченные» параметры двигателя. Видно, что от истинных параметров «испорченные» параметры отличались до двух раз. Полученная при этом ошибка отработки заданного перемещения штока привода с подблоком изоморфного регулятора (2.21) ΔX представлена на рис. 2.35.

Таблица 2.6. «Испорченные» параметры модели ВД

R, Ом	L_d, мГн	L_q, мГн	ψ_0, Вб	p, б/р	m,б/р	J_{rot}, кг·м^2
0,126	0,0252	0,0580	0,0047	4	3	$1{,}19\cdot10^{-5}$
0,1575	**0,0378**	**0,0290**	**0,0024**	4	3	$1{,}19\cdot10^{-5}$

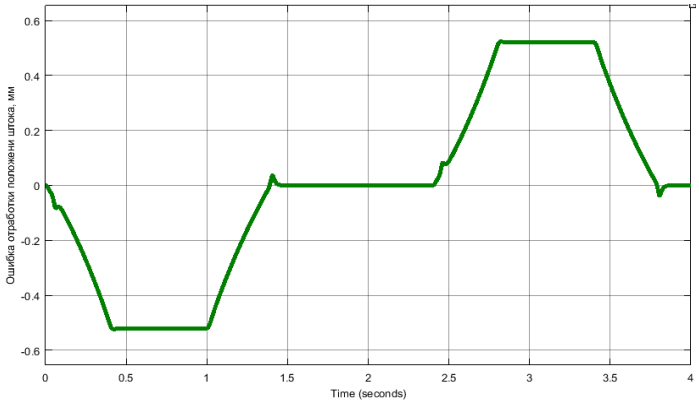


Рис. 2.35. Ошибка отработки заданного перемещения штока привода с подблоком изоморфного регулятора (2.21) с «испорченными» параметрами двигателя

Видно, что даже при ошибках в задании значений параметров двигателя до двух раз изоморфный регулятор (2.21) сохраняет свою работоспособность. При этом ошибка отработки перемещения штока ΔX увеличилась примерно в 2,3 раза: диапазон -0,52 мм…+0,52 мм.

Однако следует отметить, что при выполнении идентификации рассматриваемого вентильного двигателя, указанные значительные ошибки в определении его параметров маловероятны. Отметим также, что изоморфный регулятор обеспечил существенно большую робастность в сравнении с МОЗД-регуляторами [17, 19].

Таким образом, исходя из изложенного, можно сделать следующие выводы:

1. Методом математического моделирования доказана работоспособность систем векторного управления позиционным приводом с вентильным двигателем с использованием изоморфного регулятора.

2. Точность управления приводом в этом случае в 2,7 раза выше, чем при использовании МОЗД-регулятора.

3. Математическое моделирование показало, что изоморфный регулятор обладает высокой робастностью к точности задания параметров вентильного двигателя. В частности, изоморфный регулятор обеспечил существенно большую робастность в сравнении с МОЗД-регуляторами.

4. Таким образом, можно рекомендовать для систем векторного управления позиционным приводом с рассматриваемым вентильным двигателем изоморфный регулятор вида (2.21).

2.3. Синтез изоморфного регулятора для управления скоростью вращения вентильного двигателя

Применительно к вентильным двигателям (далее ВД) возникают весьма разнообразные задачи управления с использованием изоморфных регуляторов [10]. В работе [19] и здесь в параграфе 2.2 представлен изоморфный регулятор для позиционного привода с ВД с использованием датчика углового положения ротора. В данном параграфе приведены описание методики синтеза изоморфного регулятора для управления скоростью вращения вентильного двигателя [20], а также результаты математического моделирования системы управления.

Как правило, основными элементами системы векторного управления ВД являются ПИ-регуляторы и наблюдатель. При этом два последовательно включённых ПИ-регулятора управляют скоростью вращения двигателя, а ещё один ПИ-регулятор обеспечивает управление током двигателя.

Для обеспечения работы ПИ-регуляторов используется наблюдатель, вычисляющий значения скорости вращения двигателя, углового положения ротора двигателя и двух проекций тока двигателя во вращающейся системе координат $dq0$. Наблюдатель может быть синтезирован как нелинейный фильтр Калмана.

Универсальность системы управления достигается настройкой коэффициентов ПИ-регуляторов. Однако получить алгоритмы универсальной настройки коэффициентов ПИ-регуляторов достаточно сложно. Альтернативой ПИ-регуляторам как раз и могут служить изоморфные регуляторы [10], обладающие, как показано в данном параграфе, высокой робастностью по отношению к параметрам управляемого ВД.

Синтез алгоритма изоморфного регулятора для управления скоростью вращения вентильного двигателя. Модель ВД задаётся системой нелинейных

дифференциальных уравнений, которая во вращающейся системе координат (СК) $dq0$ имеет следующий вид

$$\left.\begin{aligned}
\frac{di_d}{dt} &= \frac{1}{L_d}\left(\omega L_q i_q - R i_d + U_d\right) \\
\frac{di_q}{dt} &= \frac{1}{L_q}\left(U_q - R i_q - \omega L_d i_d - \psi_0 \omega\right) \\
\frac{d\omega_m}{dt} &= \frac{1}{J_{rot}}\left(0{,}5\, pm(\psi_0 i_q + (L_d - L_q) i_d i_q) - M_c\right)
\end{aligned}\right\}, \qquad (2.23)$$

где i_d и i_q - проекции вектора тока на оси СК, А;

U_d и U_q - проекции вектора напряжения на оси СК, В;

ω - угловая скорость поля (электрическая), 1/с;

ω_m - угловая скорость вращения ротора двигателя (механическая), 1/с;

R - активное сопротивление фазы обмотки, Ом;

L_d и L_q - индуктивности по продольной и поперечной осям СК, Гн;

ψ_0 - потокосцепление фиктивной обмотки возбуждения, Вб;

M_c - момент сопротивления на валу двигателя, Н·м;

J_{rot} - момент инерции, приведённый к валу двигателя, кг·м^2.

Входными сигналами в системе (2.23) являются управляющие напряжения U_d и U_q, а также момент нагрузки M_c на валу двигателя. Если при известных значениях напряжения U_d и момента M_c, изменять величину напряжения U_q, то тем самым будет определена некоторая динамическая функция $\omega_m = f(U_q)$. Допустим, что существует обратная функция $U_q = f^{-1}(\omega_m)$. Тогда идея построения изоморфного регулятора для управления скоростью вращения двигателя может быть продемонстрирована следующей структурной схемой [10, 19] – рис. 2.36:

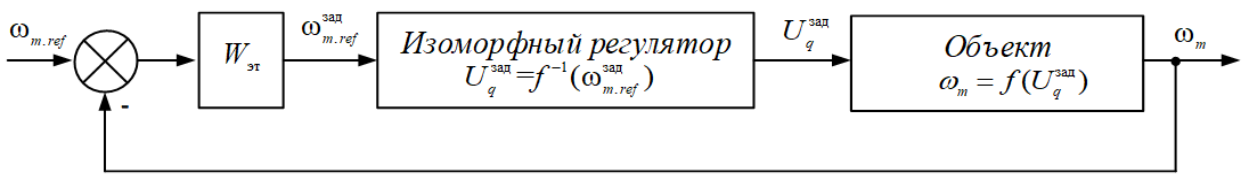


Рис. 2.36. Структура системы управления с изоморфным регулятором

Поскольку $f\left(f^{-1}\left(\omega_{m.ref}^{зад}\right)\right) = \omega_{m.ref}^{зад}$, то структура системы управления принимает весьма простой вид, где $W_{эт}$ - некоторая предварительно назначенная эталонная передаточная функция:

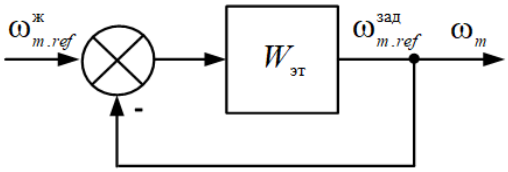


Рис. 2.37. Структура контура после преобразования

Как видно из рис. 2.37, динамика контура управления с изоморфным регулятором полностью определяется только структурой эталонной модели. Так если $W_{эт} = (T_{эт} \cdot s)^{-1}$, то передаточная функция замкнутого контура будет апериодическим звеном с передаточной функцией $\Phi(s) = (T_{эт} \cdot s+1)^{-1}$.

Поскольку система уравнений (2.23), определяющая динамику вентильного двигателя, является нелинейной, определить явную аналитическую зависимость $\omega_m = f(U_q)$ достаточно сложно. В этом случае приходится делать некоторые упрощающие допущения.

Известно, что при векторном управлении ВД кроме обеспечения заданной скорости вращения двигателя, требуется минимизировать величину составляющей тока i_d. Обычно полагают заданное значение этой составляющей тока равным нулю: $i_{d.ref} = 0$. Поэтому будем полагать, что $i_d = i_{d.ref} = 0 = \text{const}$. Тогда система уравнений (2.23) упрощается и становится линейной системой:

$$\left.\begin{aligned} \frac{di_q}{dt} &= \frac{1}{L_q}\left(U_q - Ri_q - \psi_0\omega\right) \\ \frac{d\omega_m}{dt} &= \frac{1}{J_{rot}}\left(0{,}5pm\psi_0 i_q - M_c\right) \end{aligned}\right\} .$$

(2.24)

Применим к системе уравнений (2.24) преобразование Лапласа при нулевых начальных условиях:

$$\left.\begin{aligned} si_q &= \frac{1}{L_q}\left(U_q(s) - Ri_q(s) - \psi_0\omega(s)\right) \\ s\omega_m &= \frac{1}{J_{rot}}\left(0{,}5pm\psi_0 i_q(s) - M_c(s)\right) \end{aligned}\right\} . \qquad (2.25)$$

Из первого уравнения системы (2.25) получим выражение для тока i_q:

$$i_q = \frac{U_q - \psi_0 p\omega_m}{L_q s + R} . \qquad (2.26)$$

Подставим во второе уравнение системы (2.25) значение тока из (2.26), полагая число фаз двигателя равным трём ($m = 3$). Получим:

$$J_{rot}s\omega_m = 1{,}5p\psi_0\frac{U_q - \psi_0 p\omega_m}{L_q s + R} - M_{\text{с}} \ . \qquad (2.27)$$

Чтобы получить формулу для определения значения напряжения U_q, выполним следующие преобразования уравнения (2.27):

$$\left(J_{rot}s + \frac{1{,}5p^2\psi_0^2}{L_q s + R}\right)\omega_m = \frac{1{,}5p\psi_0}{L_q s + R}U_q - M_{\text{с}};$$

$$\left(J_{rot}L_q s^2 + J_{rot}Rs + 1{,}5p^2\psi_0^2\right)\omega_m = 1{,}5p\psi_0 U_q - (L_q s + R)M_{\text{с}} \ ;$$

$$U_q = \left(\frac{J_{rot}L_q}{1{,}5p\psi_0}s^2 + \frac{J_{rot}R}{1{,}5p\psi_0}s + p\psi_0\right)\omega_m + \left(\frac{L_q}{1{,}5p\psi_0}s + \frac{R}{1{,}5p\psi_0}\right)M_{\text{с}} \ .$$

Введём следующие обозначения:

$$c_0 = p\psi_0; \ c_1 = \frac{J_{rot}R}{1{,}5p\psi_0}; \ c_2 = \frac{J_{rot}L_q}{1{,}5p\psi_0};$$

$$d_0 = \frac{R}{1{,}5p\psi_0}; \ d_1 = \frac{L_q}{1{,}5p\psi_0}.$$

С учётом принятых обозначений имеем:

$$U_q = \left(c_2 s^2 + c_1 s + c_0\right)\omega_m + \left(d_1 s + d_0\right)M_{\text{с}} \ .$$

Перейдём к обозначениям, принятым на рис. 2.36:

$$U_q^{\text{зад}} = \left(c_2 s^2 + c_1 s + c_0\right)\omega_{m.ref}^{\text{зад}} + \left(d_1 s + d_0\right)\hat{M}_{\text{с}}, \qquad (2.28)$$

где $\hat{M}_{\text{с}}$ - оценка момента нагрузки двигателя, полученная наблюдателем.

Как видно из соотношения (2.28), для вычисления напряжения $U_q^{\text{зад}}$ необходимо определять первую и вторую производные скорости $\omega_{m.ref}^{\text{зад}}$, а также производную оценки момента $\hat{M}_{\text{с}}$. Для этого левую и правую части уравнения (2.28) пропустим через инерционное звено с постоянной времени T_{dif} .

Таким образом, структура изоморфного регулятора для управления скоростью ВД приобретает вид, изображённый на рис. 2.38. При этом выходное напряжение регулятора $\tilde{U}_q^{\text{зад}}$ будет несколько отличаться от напряжения $U_q^{\text{зад}}$:

$$\tilde{U}_q^{зад} = \frac{U_q^{зад}}{T_{dif}s+1}.$$

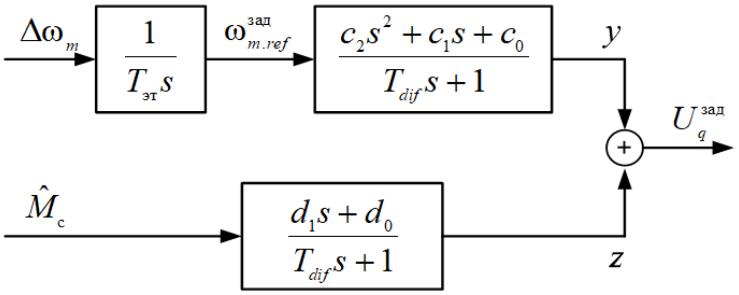


Рис. 2.38. Структура изоморфного регулятора для управления скоростью вентильного двигателя

Для реализации управления скоростью ВД во временной области, согласно структурной схеме на рис. 2.38, необходимо численно интегрировать дифференциальную систему второго порядка (2.29) и дифференциальное уравнение (2.30):

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ &\frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{T_{dif}}\left(\frac{1}{T_{эт}}\Delta\omega - x_2\right) \\ &y = c_2\frac{dx_2}{dt} + c_1x_2 + c_0x_1 \end{aligned}\right\}, \tag{2.29}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dv}{dt} = \frac{1}{T_{dif}}\left(\hat{M}_c - v\right) \\ &z = d_1\frac{dv}{dt} + d_0v \end{aligned}\right\}. \tag{2.30}$$

Сумма их выходных сигналов будет определять выходное напряжение изоморфного регулятора (2.31):

$$\tilde{U}_q^{зад} = y + z \ . \tag{2.31}$$

Интегрирование системы (2.29) и уравнения (2.30) реализовано в блоке «*Izomorf_Reg_Speed*» проекта *MatLab* «*RegSpeed_Izomorf_new*». Структурная схема этого проекта представлена на рис. 2.39. Кроме изоморфного регулятора скорости вращения ВД в данном варианте векторного управления используется регулятор составляющей тока i_q, реализованный в блоке «*Reg_Id_MOZD*». Алгоритм этого регулятора синтезирован по методу обратных задач динамики (МОЗД) [18] и приведен ниже.

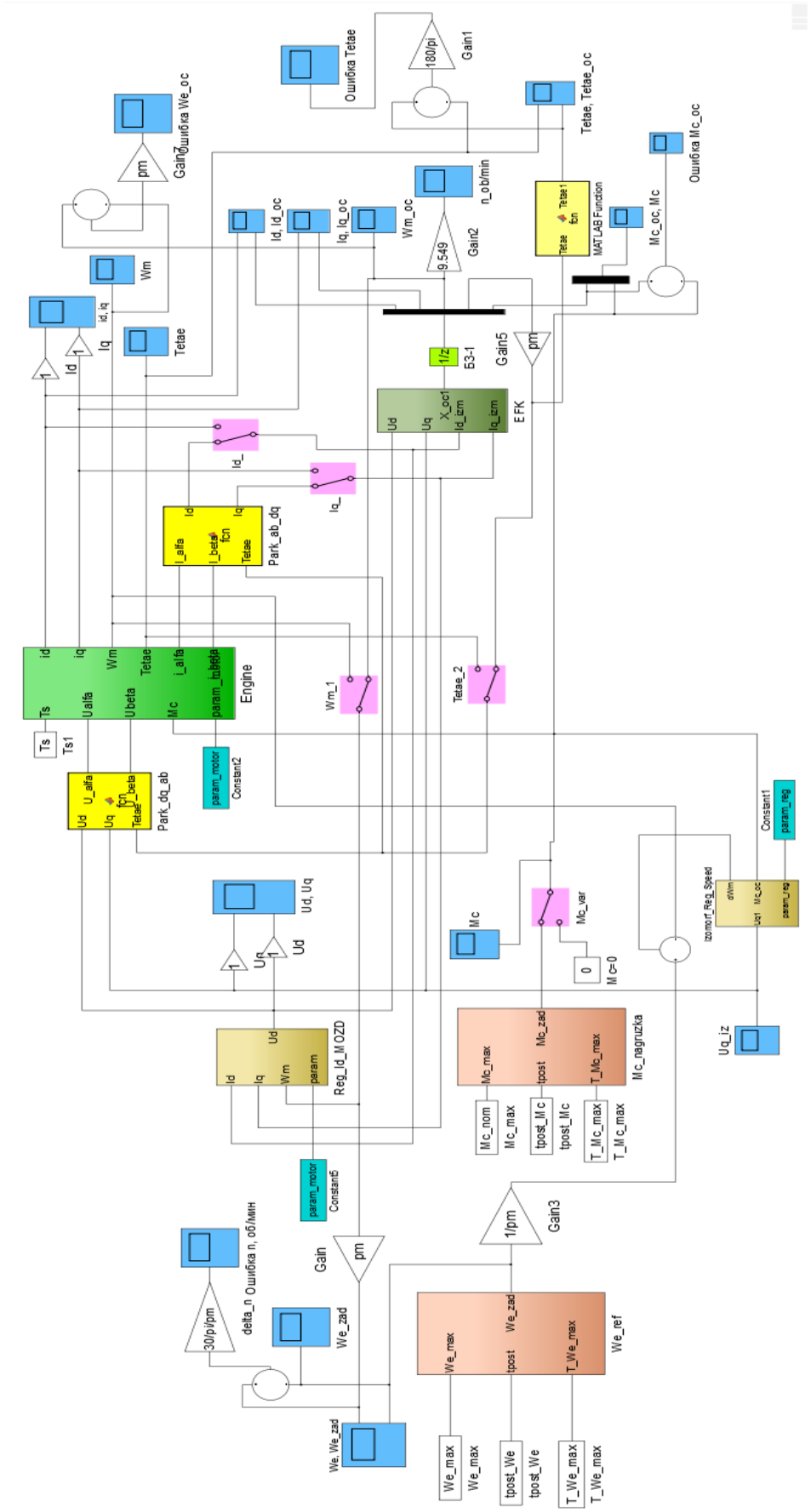


Рис. 2.39. Структурная схема проекта «*RegSpeed_Izomorf_new*»

Рассмотрим вывод соотношения для расчёта управляющего напряжения U_d, действующего на выходе регулятора «*Reg_Id_MOZD*».

Напряжение U_d используется в первом уравнении системы (2.23):

$$\frac{di_d}{dt} = \frac{1}{L_d}\left(\omega L_q i_q - R i_d + U_d\right). \qquad (2.32)$$

Пусть $i_{d.ref}$ - заданное значение тока i_d, а ε - ошибка его отработки: $\varepsilon = i_d - i_{d.ref}$. Потребуем, чтобы ошибка ε удовлетворяла следующему однородному уравнению:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + \lambda\varepsilon = 0. \qquad (2.33)$$

В соответствии с (2.33) ошибка ε будет списываться в апериодическом процессе с постоянной времени $T = 1/\lambda$. Заменим в (2.33) ошибку на разность соответствующих токов:

$$\frac{d}{dt}(i_d - i_{d.ref}) + \lambda(i_d - i_{d.ref}) = 0.$$

Полагая $i_{d.ref} = 0$, приходим к уравнению вида: $\frac{di_d}{dt} = -\lambda i_d$. Подставив это значение производной тока i_d в уравнение (2.32), получим

$$-\lambda i_d = \frac{1}{L_d}\left(\omega L_q i_q - R i_d + U_d\right).$$

Отсюда следует формула (2.34) для вычисления управляющего напряжения:

$$U_d = \left(R - \lambda L_d\right) i_d - p\hat{\omega}_m L_q i_q, \qquad (2.34)$$

где $\hat{\omega}_m$ - оценка скорости вращения двигателя, полученная с помощью наблюдателя. Формула (2.34) для расчёта напряжения U_d реализована в блоке «*Reg_Id_MOZD*».

Моделирование работы изоморфного регулятора для управления скоростью вращения вентильного двигателя. Для проверки работоспособности изоморфного регулятора моделировался пуск вентильных двигателей с выводом на номинальную скорость вращения при действии номинальной нагрузки.

Была промоделирована работа системы векторного управления для трёх двигателей разного типа. В качестве наблюдателя использовался нелинейный фильтр Калмана, представленный в программе на рис. 2.39 блоком «*EFK*». Для

каждого двигателя приводятся графики отработки заданной скорости вращения ВД, токов i_d и i_q, а также момента нагрузки на валу двигателя. Работа системы управления со всеми двигателями происходила при одних и тех же постоянных и неизменных настройках системы. В качестве настроек использовались три константы: T_{dif} = 0,001; $T_{эт}$ = 0,01; λ = 1000. Результаты моделирования представлены на рис. 2.40 – 2.51.

Вентильный двигатель типа ЗДБМ50. Параметры математической модели двигателя, использованные при моделировании, приведены в табл. 2.7.

Таблица 2.7. Параметры модели ВД

$R_я$, Ом	L_d, мГн	L_q, мГн	Ф, Вб	p, б/р	J_{rot}, кг·м^2	$U_{лин}$, В	$P_{ном}$, кВт	$M_{с.ном}$, Н·м	$\omega_{е.ном}$, 1/с
0,126	0,0252	0,058	0,0047	4	1,19·10^{-5}	16	0,35	0,4	2932

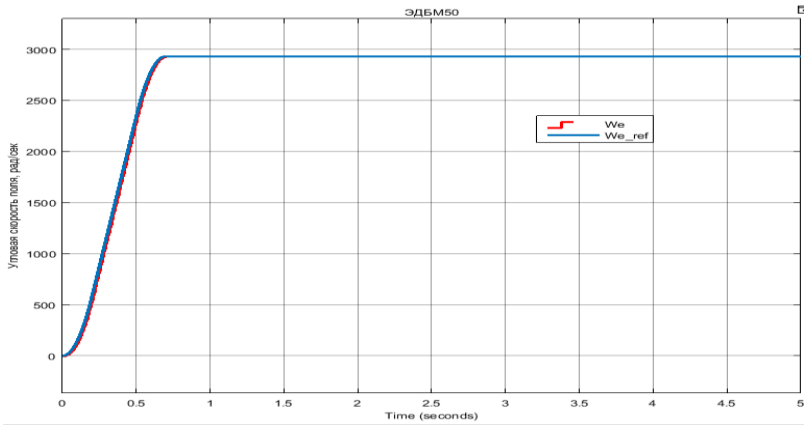


Рис. 2.40. Отработка заданной скорости поля двигателя

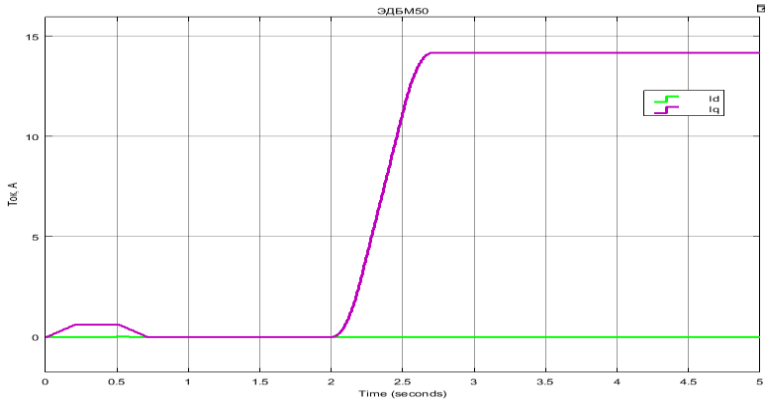


Рис. 2.41. Изменение составляющих тока i_d и i_q

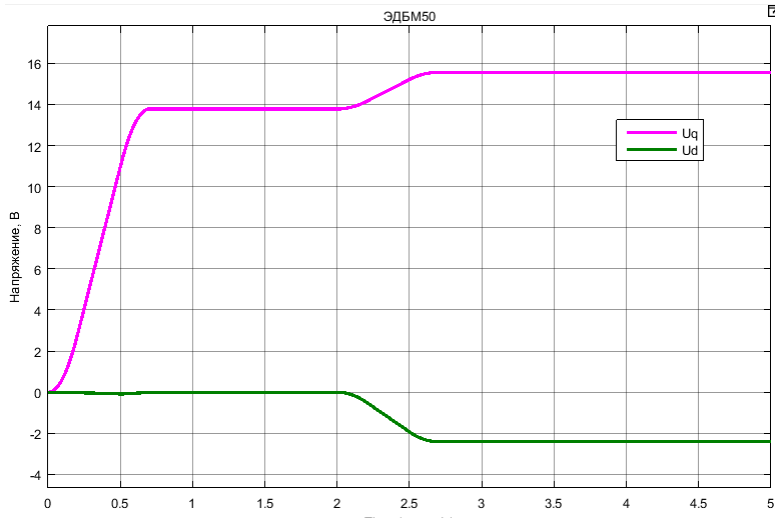


Рис. 2.42. Изменение управляющих напряжений U_d и U_q

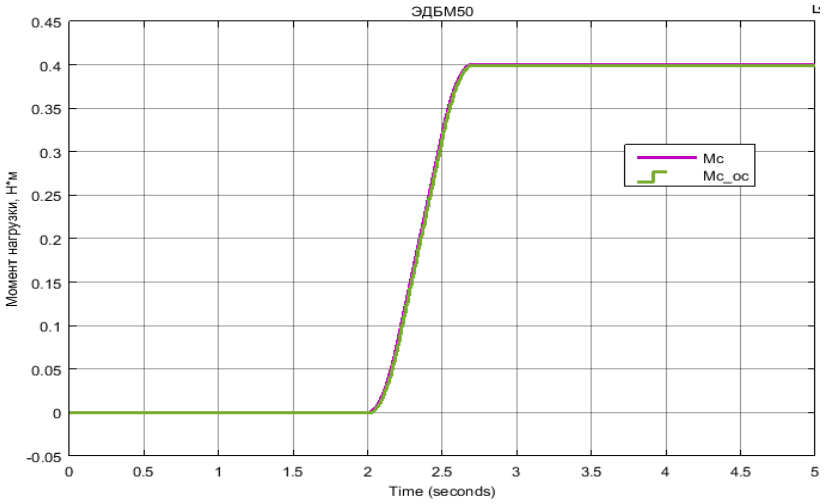


Рис. 2.43. Момент нагрузки на валу двигателя и его оценка наблюдателем

Вентильный двигатель промышленного типа № 1. Параметры математической модели двигателя, использованные при моделировании, приведены в таблице 2.8.

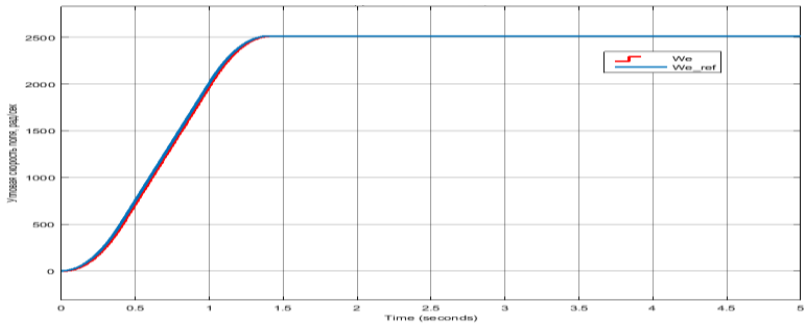


Рис. 2.44. Отработка заданной скорости поля двигателя

Таблица 2.8. Параметры модели ВД

$R_я$, Ом	L_d, мГн	L_q, мГн	Ф, Вб	P, б/р	J_{rot}, кг·м^2	$U_{лин}$, В	$P_{ном}$, кВт	$M_{с.ном}$, Н·м	$\omega_{е.ном}$, 1/с
0,72	1,5	2,9	0,097	6	0,025	320	6	14,3	2513,3

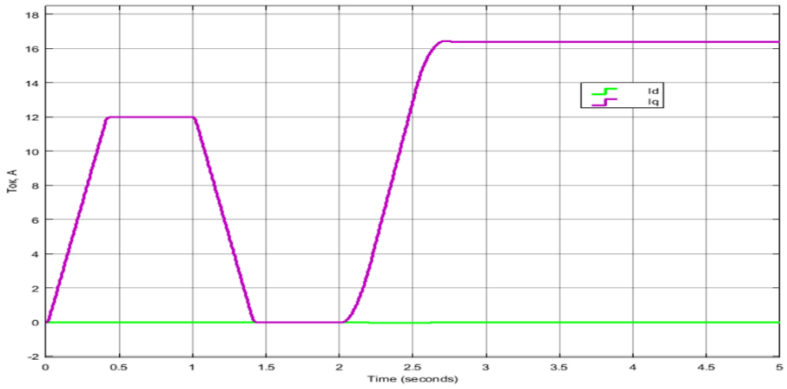


Рис. 2.45. Изменение составляющих тока i_d и i_q

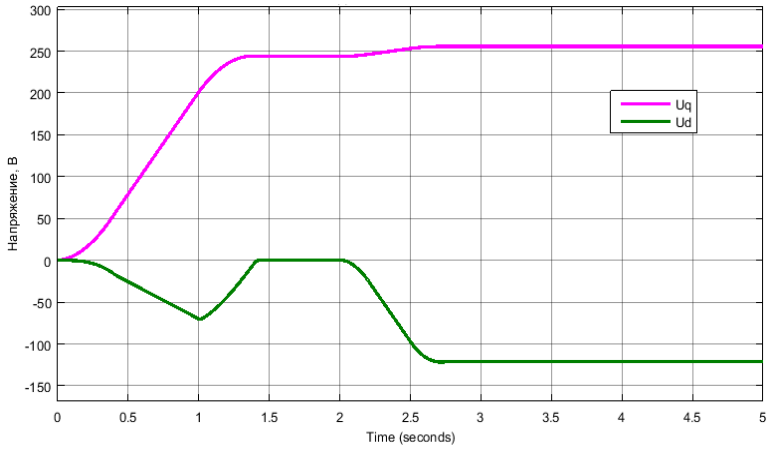


Рис. 2.46. Изменение управляющих напряжений U_d и U_q

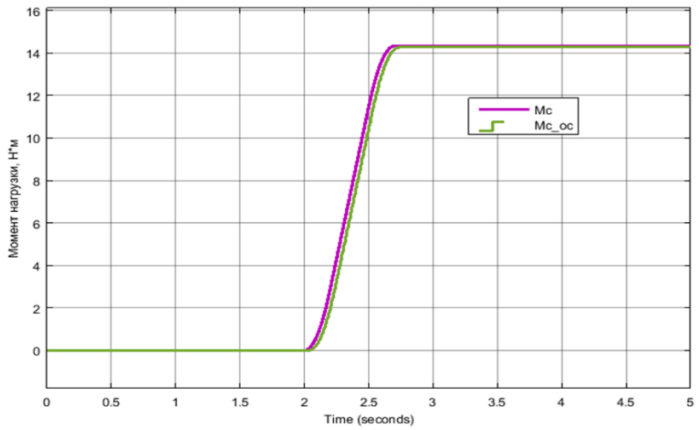


Рис. 2.47. Момент нагрузки на валу двигателя и его оценка наблюдателем

Вентильный двигатель промышленного типа № 2. Параметры математической модели двигателя, использованные при моделировании, приведены в таблице 2.9.

Таблица 2.9. Параметры модели ВД

$R_я$, Ом	L_d, мГн	L_q, мГн	Ф, Вб	P, б/р	J_{rot}, кг·м^2	$U_{лин}$, В	$P_{ном}$, кВт	$M_{с.ном}$, Н·м	$\omega_{е.ном}$, 1/с
0,411	4,0	8,0	1,02	2	0,025	2730	225	253	1780

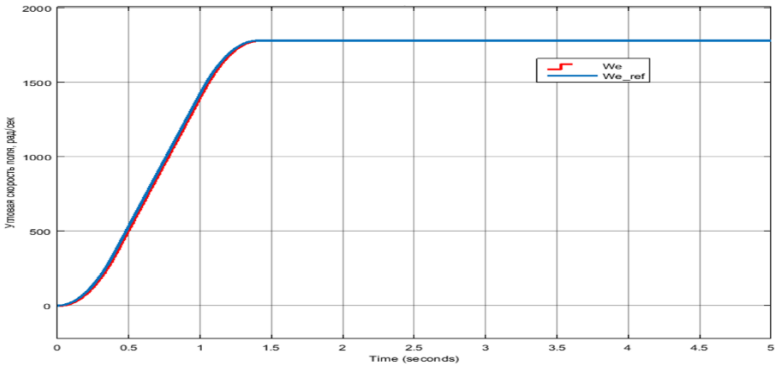


Рис. 2.48. Отработка заданной скорости поля двигателя

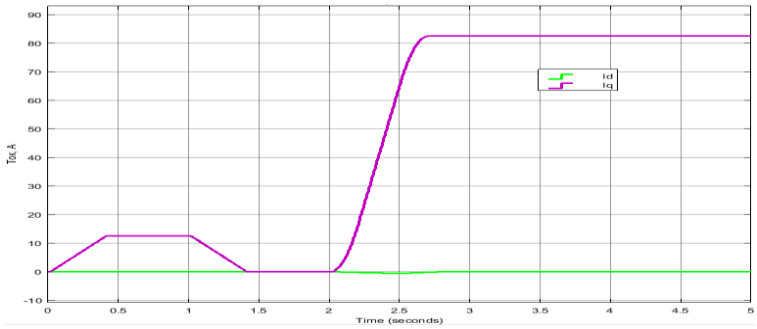


Рис. 2.49. Изменение составляющих тока i_d и i_q

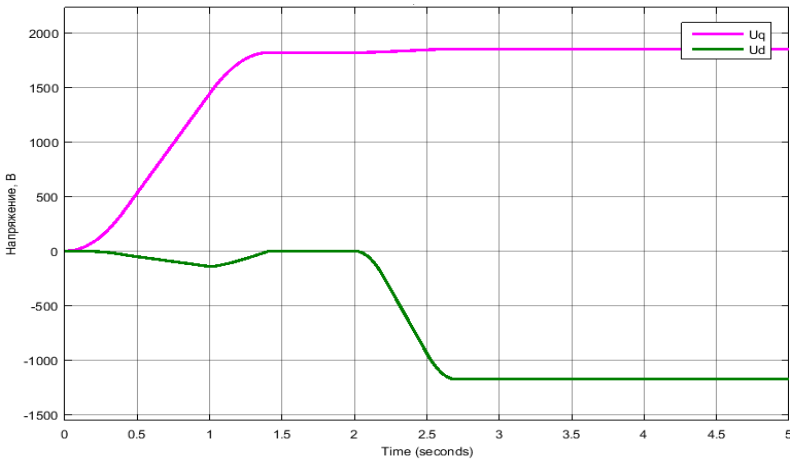


Рис. 2.50. Изменение управляющих напряжений U_d и U_q

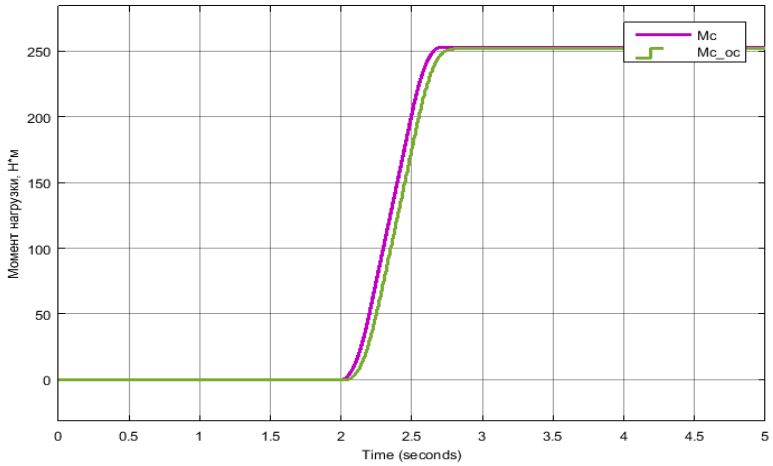


Рис. 2.51. Момент нагрузки на валу двигателя и его оценка наблюдателем

Как видно из графиков, представленных на рис. 2.40 – 2.51, система векторного управления ВД в составе изоморфного регулятора скорости, регулятора тока на основе МОЗД и наблюдателя типа «*EFK*» отрабатывает заданные скорость и ток двигателя с достаточной для практики точностью.

Таким образом, исходя из изложенного, можно сделать следующие выводы:

1. Методом математического моделирования доказана работоспособность системы векторного управления скоростью ВД в составе изоморфного регулятора скорости, регулятора тока типа МОЗД и наблюдателя типа «*EFK*».

2. Работа системы управления не потребовала изменения её настроек при переходе с одного типа двигателя на другой, т.е. система управления обладает высокой робастностью.

Литература к Главе 2 Раздела 1 Части 2:

1. *Алексеенков А.С., Ермаков С.А., Константинов С.В., Кузнецов В.Е., Оболенский Ю.Г., Редько П.Г.* Системы электрогидравлических рулевых приводов комплексов управления полетом самолетов / под. ред. д-ра техн. наук, проф. С.В. Константинова. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2019. 518 с.
2. *Шумилов И.С.* Системы управления рулями самолетов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009.
3. Jean-Charles Mare. Aerospace Actuators 2: Signal-by-Wire and Power-by-Wire. ISBN 978-1-84821-942-7, 2017. 282 p.
4. Материалы конф. «Тулуза», 2018. Recent Advances in Aerospace Actuation Systems and Components, INSA, de Toulouse. ISBN 978-2-87649-067-3, 2018.
5. *Кузнецов В.Е.* Адаптивное управление рулевой следящей системой на основе экзомодели // Сб. докл. X Всерос. науч.-техн. конф. «Проблемы совершенствования робототехнических и интеллектуальных систем летательных аппаратов». Москва, 26 июня 2015 г. М.: Изд-во МАИ, 2015. С. 204-208.
6. *Сырицын Т.А.* Эксплуатация и надежность гидро- и пневмоприводов. М.: Машиностроение, 1990.
7. Dominique van den Bossche. The A380 Flight control electrohydrostatic actuators, achievements and lessons learnt, ICAS 2006.
8. *Касимов А.М.* Струйная техника – как альтернативная база электронным свойствам автоматики // Тр. ИПУ РАН. М., 2012.
9. Пневмопривод систем управления летательных аппаратов. / Ред. В.А. Чащин. М.: Машиностроение, 1987. 248 с.
10. *Кулабухов В.С.* Синтез регуляторов для следящих систем на основе принципа изоморфности // Мехатроника, автоматизация, управление. 2017. Т. 18, №8. С. 507-515.
11. *Kulabukhov V.* Linear Isomorphic Regulators // CMTAI 2016. MATEC Web of Conf. 2017. Vol. 99. P. 03008. (doi:10.1051/matecconf/20179903008)
12. *Булгаков В.В., Кулабухов В.С.* Сравнительный анализ формализованных методов синтеза регулятора для следящей системы // Приборы. 2013. №1 (151). С. 39-44.
13. *Кулабухов В.С., Булгаков В.В.* Сравнительные исследования некоторых алгебраических методов формализованного синтеза регуляторов для следящих систем // Приборы. 2017. №12 (210). С. 13-18.
14. *Кулабухов В. С., Булгаков В. В., Сайганов М.А.* Синтез регулятора для газового привода на основе анализа экспериментальных данных // Приборы. 2020. №5 (239). С. 32-44.

15. *Кулифеев Ю.Б., Булгаков В.В., Кулабухов В.С.* Методика определения параметров математической модели вентильного двигателя // Материалы VII научно-практической конференции памяти О.В. Успенского [Текст] / Сборник докладов. М.: Издательский дом Академии имени Н.Е. Жуковского, 2021, С. 51-59.
16. *Кулабухов В.С., Булгаков В.В.* Сравнительный анализ некоторых формализованных методов синтеза регулятора в вертикальном канале вертолета / Материалы IV научно-практической конференции памяти О.В. Успенского [Текст]. Сборник докладов. М.: Издательский дом Академии имени Н.Е. Жуковского, 2017. С. 45-53.
17. *Кулифеев Ю.Б.* Алгоритмическое обеспечение системы векторного управления вентильным двигателем для электромеханического привода поступательного действия // Материалы VI научно-практической конференции памяти О.В. Успенского [Текст] / Сборник докладов. М.: Издательский дом Академии имени Н.Е. Жуковского, 2019. С. 167-184.
18. *Крутько П. Д.* Обратные задачи динамики управляемых систем. Нелинейные модели. М.: Наука, 1987.
19. *Кулабухов В.С., Кулифеев Ю.Б., Булгаков В.В.* Синтез изоморфного регулятора для позиционного привода с вентильным двигателем с использованием датчика углового положения ротора // Материалы VII научно-практической конференции памяти О.В. Успенского [Текст] / Сборник докладов. М.: Издательский дом Академии имени Н.Е. Жуковского, 2021, С. 68-82.
20. *Кулабухов В.С., Кулифеев Ю.Б., Булгаков В.В.* Синтез изоморфного регулятора для управления скоростью вращения вентильного двигателя // Материалы VII научно-практической конференции памяти О.В. Успенского [Текст] / Сборник докладов. М.: Издательский дом Академии имени Н.Е. Жуковского, 2021, С. 83-96.

Глава 3

О некоторых особенностях технологии синтеза изоморфных регуляторов для многомерных систем. Методические примеры

В 1-й главе этой части книги рассмотрены теоретические основы технологии синтеза изоморфных регуляторов и представлено общее решение задачи управления линейными многомерными многосвязными объектами класса MIMO. Исходя из понятия *управляемости с точностью до изоморфизма* обоснована структура многосвязных изоморфных регуляторов и предложен строго формализованный метод их синтеза, а также приведены некоторые простые примеры MIMO-регуляторов. По аналогии с регуляторами класса SISO показано, что многомерные многосвязные изоморфные MIMO-регуляторы сочетают простую, четко декомпозированную методику синтеза и возможность обеспечения, по сути, предельно достижимого, идеального качества переходных процессов в контурах управления в сравнении с регуляторами известных эвристических структур.

Отметим, что при решении задач синтеза изоморфных регуляторов для MIMO-объектов никакие другие теоремы, кроме рассмотренных в первой части книги применительно к проблеме управляемости систем общего вида и уже использованных при синтезе регуляторов класса SISO, не требуются, хотя, как показано в 1-й главе этой части книги, объекты и системы управления класса MIMO обладают существенными особенностями. Например, вполне очевидной и явной является часто встречающаяся необратимость, а значит и неизоморфность в обычном смысле, матричных передаточных функций MIMO-объектов. Уже только это обстоятельство породило множество эвристических подходов к синтезу регуляторов для многосвязных систем. Одним из таких новых подходов является, например, конструирование специальных «праматриц» в теории вложения [1, 2].

В рамках рассматриваемой парадигмы в теории систем, основанной на общем принципе изоморфизма, изоморфные регуляторы класса MIMO ничем не отличаются от регуляторов класса SISO. Необходимо лишь оперировать с отображениями, характеризуемыми матрицами соответствующих передаточных функций, по строго определенным правилам, отвечающим основной лемме и теоремам об управляемости с точностью до изоморфизма, единым для объектов

классов SISO и MIMO. Эти правила позволяют *строго формализованно анализировать и реализовывать управляемость систем общего вида и линейных систем любого класса посредством синтеза соответствующих изоморфных регуляторов*, а также *обеспечивать требуемое качество управления путем независимого от регуляторов формирования многомерных эталонных моделей*, предусматривающих, в том числе, возможность «развязывания» контуров управления некоторыми компонентами вектора состояния в многосвязной системе.

В целом, в первой части книги сформулированы в весьма общем виде теоремы об управляемости применительно к пространству состояний и рассмотрению систем во временной области. Такое описание удобно и применимо для линейных и нелинейных систем. Указанные теоремы об управляемости с точностью до изоморфизма, опирающиеся на основную лемму нашей теории и теорему о реализации, позволили разработать в 1-й главе этой части книги строго формализованный метод и технологию синтеза регуляторов для систем весьма общего вида. Для линейных систем оказалось возможным получить конечные формулы для расчета критериев управляемости и регуляторов при записи моделей систем как в форме дифференциальных уравнений, так и в операторной форме.

В этой главе на основе разработанных формализованных правил продолжим рассмотрение на некоторых примерах особенностей синтеза изоморфных регуляторов для линейных стационарных динамических многомерных многосвязных объектов (систем).

3.1. Предварительные замечания по синтезу регуляторов для линейных многомерных многосвязных объектов

Для удобства изложения отчасти повторим постановку задачи синтеза регулятора. Итак, рассматривается линейный стационарный динамический объект

$$\dot{X} = AX + BU, X \subset R^n, U \subset R^m, m < n, \tag{3.1}$$

модель которого в форме Лапласа при нулевых начальных условиях имеет вид

$$X(p) = (pI\text{-}A)^{-1} BU(p) = \Phi(p)BU(p) = G(p)U(p) = \Phi(p)Y(p), \tag{3.2}$$

где $\Phi(p)=(pI\text{-}A)^{-1}$ – фундаментальная матрица объекта (3.1) в форме Лапласа, I – единичная матрица, $Y(p)=BU(p)$ – некоторая переменная, характеризующая «внутреннее» состояние объекта, $G(p) = \Phi(p)B$ – отображение-оператор, характеризующий структуру объекта управления, преобразующий управляющее воздействие U в выходное, «внешнее» (проявляемое вовне) состояние $X(p)$ объекта.

Оператор $G(p)$ часто называют передаточной функцией объекта и обозначают буквой W, то есть

$$W(p) = G(p) = \Phi(p)B. \tag{3.3}$$

Здесь специально рассматривается наиболее сложный случай $m < n$, так как при $m = n$ исключаются важные особенности синтеза регуляторов для MIMO-объектов, на которые мы обращали внимание в главе 1. В форме Лапласа модель объекта с помощью соотношения (3.2) может быть преобразована из *аддитивной формы* (3.1) *в мультипликативную форму*

$$\begin{cases} Y(p) = BU(p), \\ X(p) = \Phi(p)Y(p). \end{cases} \tag{3.4}$$

В главе 1 мы показали, что для решения *задачи синтеза регулятора* необходимо сформировать *систему синтеза регулятора*, коммутативная диаграмма которой представлена на рис. 1.1. Для объекта (3.1)-(3.4) система синтеза регулятора иллюстрируется коммутативной диаграммой на рис. 3.1, в которой *цель синтеза формализована обыкновенным изоморфизмом* $e_U \equiv I_m$, где e_U - обычная единичная матрица I_m размера m, соответствующая единице на U. В соответствии с этой целью, как видно из диаграммы, регулятор $H = G^{-1}$ должен обеспечивать обратное преобразование желаемого состояния $X_ж$ в соответствующее ему желаемое управление $U_ж$ такое, что между U и $U_ж$ должен существовать обыкновенный изоморфизм вида (1.2)

$$e_U : U \to U_ж, \quad e_U^{-1} : U_ж \to U, \quad e_U \equiv e_U^{-1}, \quad e_U e_U^{-1} = e_U^{-1} e_U = e_U e_U = e_U, \tag{3.5}$$

то есть при $X \equiv X_ж$ должно выполняться тождество $U \equiv U_ж$.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr, "e_U"] \arrow[dr, "G = \Phi B"'] & & U_ж \\ & X_ж \arrow[ur, "H = G^{-1}"'] & \end{tikzcd}$$

Рис. 3.1. Система синтеза регулятора для MIMO-объекта

Регулятор $H : X_ж \to U_ж$ далее в наших примерах будем обозначать S_R^{-1}, как мы это делали здесь во второй главе по аналогии с обозначениями, использовавшимися в первой части книги.

Как показано в главе 1, критерием управляемости MIMO-объекта, заданного моделью в формах (3.1) - (3.4), является равенство вида (1.7), либо (1.25), (1.26), (1.58). В нашем случае, как видно из рис. 3.1, критерий управляемости можно записать в виде

$$G^{-1}\cdot G = G^{-1}\cdot(\Phi B) = e_U = I_m\,. \qquad (3.6)$$

Равенство (3.6) является критерием управляемости MIMO-объектов и одновременно позволяет определить изоморфный регулятор $H = G^{-1} = S_R^{-1}$ в форме Лапласа. Если регулятор существует, то система управляема. Изоморфный регулятор $H = G^{-1} = S_R^{-1}$ реализует обратную связь, необходимую для обеспечения полной управляемости объекта с точностью до выбранного изоморфизма: в управляемом объекте любой поступивший на вход сигнал управления $U(p)$ вызовет строго определенный отклик $X(p)$ и, наоборот, реализация на выходе объекта сигнала $X(p)$ требует подачи на его вход строго определенного сигнала управления $U(p)$.

Таким образом, изоморфный регулятор $H = G^{-1} = S_R^{-1}$ вместе с изоморфизмом (с точностью до изоморфизма) (3.5) реализует строго определенную обратную связь (ОС), необходимую для обеспечения управляемости объекта. Причем необходимость введения и структура этой ОС не постулируются, как это имеет место при использовании эвристических регуляторов «традиционной» структуры, а определяются по полностью формализованным правилам в соответствии с критерием (3.6). Регулятор отвечает только за управляемость. *Цель управления и требования к качеству переходных процессов* не диктуются изоморфным регулятором $H = G^{-1} = S_R^{-1}$, а *привносятся в систему извне*. Это можно сделать различными способами. В самом простом случае *требования к качеству управления обычно формализуются путем задания эталонной модели, а цель управления формализуется путем задания некоторого желаемого значения вектора состояния* $X_{ж}$.

Обратим особое внимание на то, что *не следует путать цель синтеза изоморфного регулятора* с помощью системы, показанной на рис. 3.1, *и цель управления. Цель синтеза регулятора состоит в обеспечении управляемости объекта с точностью до изоморфизма* (3.5), а *цель управления* (*регулирования*) *состоит в обеспечении точного соответствия в каждый момент времени текущего состояния X объекта некоторому желаемому состоянию* $X_{ж}$, то есть – в обеспечении требуемого качества управления (регулирования). Цель управления реализуется, как мы показали в 1-й главе этой части книги, с помощью *системы*

регулирования (*управления*), показанной на рис. 1.3, «перевернутой» по отношению *к системе синтеза изоморфного регулятора* с учетом того, чтобы сохранились все соотношения между единицами на алгебраических структурах в соответствующих коммутативных диаграммах, как это показано на рис. 1.4.

Итак, потребуем, чтобы текущие значения компонент вектора X отслеживали задаваемые извне соответствующие желаемые значения вектора $X_ж$ в соответствии с движением некоторой эталонной модели, характеризуемой отображением (передаточной функцией) $W_{эм}$.

Отметим, что эталонные модели часто используются и в рамках различных эвристических подходов к синтезу регуляторов. Такие задачи синтеза носят достаточно универсальный характер и в [1] названы *задачами синтеза по прототипу*. Но если в [1] структура регулятора синтезируется, исходя из структуры эталонной модели, при заранее выбранной из эвристических соображений и известной структуре ОС, то в нашем случае структура ОС заранее неизвестна и синтезируется по строго формализованным правилам и полностью независимо от эталонной модели в форме собственно регулятора, реализующего только управляемость объекта. *Эталонная модель формируется уже после синтеза регулятора и практически независимо от него для обеспечения требуемого качества переходных процессов*.

Как правило, как и в случае объекта класса SISO, эталонная модель выбирается с учётом удовлетворения переходными процессами в системе требуемой совокупности *инженерных критериев качества*. Вместе с тем, в случае управления объектом класса MIMO, выбор эталонной модели может иметь существенные особенности. Например, требования к качеству управления могут накладываться лишь на часть компонент вектора X. В ином случае может быть выдвинуто требование выбора такой эталонной модели, которая позволяла бы «развязать» управление одними компонентами вектора X от управления другими компонентами этого вектора, то есть обеспечить некоторую «искусственную» (посредством регулятора и эталонной модели) независимость «каналов управления» различными компонентами вектора X.

Исходя из различных возможных требований к вариантам реализации многосвязного управления объектом класса MIMO, уравнения управляемой системы с учетом возможных разных видов уравнений для эталонной модели, приобретут следующий общий вид

$$\dot{X} = AX + BU,\ X_0 \tag{3.7}$$

$$\dot{X}_з = CX_з + DX_ж,\ X_{з0} = X_0, \tag{3.8}$$

где $X_з$ - «мгновенное» заданное значение компонент, которому должно в точности соответствовать «выходное» значение компонент вектора X. Здесь уравнение (3.8) является уравнением эталонной модели (ЭМ) с передаточной функцией

$$W_{эм}=(pI-C)^{-1}D. \qquad (3.9)$$

В идеальном случае текущие значения компонент вектора X должны мгновенно отслеживать желаемые движения компонент вектора состояния ЭМ, что соответствует $W_{эм}=I$ и уравнению (3.7), где I – единичная матрица:

$$X=IX_з=IX_ж. \qquad (3.10)$$

В соответствии с уравнениями (3.1), (3.2), (3.6) - (3.10) коммутативная диаграмма системы управления (регулирования), представленная на рис. 1.3, преобразуется к виду, показанному на рис. 3.2.

$$\begin{tikzcd} X_ж \arrow[r, "W_{эм}"] & X_з \arrow[r, "G^{-1}=S_R^{-1}"] & U \arrow[r, "B"] & Y \arrow[r, "\Phi"] & X \arrow[lll, bend left, "e_X"] \end{tikzcd}$$

Рис. 3.2. Композиция отображений для слежения за эталонной моделью в системе управления (регулирования)

В общем случае при $m<n$, в контуре ОС должна фигурировать единица на X, не равная единичной матрице, то есть $e_X \neq I_n$,как мы это видели на рис. 1.8 и рис. 1.9. После приведения модели объекта к размерности вектора управления может быть выполнено условие $e_X = I_m$ и тогда в цепи ОС будет реализовано это отображение, как показано на рис. 1.11.

Таким образом, применительно к MIMO-объекту нужно решить две задачи:

- первая состоит в том, чтобы определить, управляем ли объект (3.1), (3.7) в принципе. Для этого *в начале необходимо использовать систему синтеза регулятора*, показанную на рис. 3.1, критерий управляемости (3.6) и формальные соотношения типа (1.2), (3.5), (1.4) – (1.6), которым должен удовлетворять регулятор в коммутативной диаграмме, если он существует;

- если объект управляем, то есть регулятор существует, то вторая задача состоит в обеспечении точного слежения множеством выходов X за множеством задающих воздействий $X_з$, характеризующих желаемое движение системы $X_ж$ с точностью до эталонных моделей (3.8), (3.9) или (3.10). Для управления MIMO-объектом после синтеза регулятора необходимо использовать систему управления (регулирования), показанную на рис. 3.2.

Следовательно, в *постановке задачи управления* всегда должно присутствовать уравнение (3.8), (3.9) или (3.10). При этом $X_ж$ может содержать требования на желаемые состояния нескольких или всех компонент из X. Часто требуется обеспечить желаемое движение лишь части компонент из X. На остальные компоненты X и на все компоненты вектора управлений U накладываются ограничения, например, по невыходу за некоторые границы. Здесь ограничимся рассмотрением случая, когда $X_ж$ содержит требования на все или на некоторые компоненты из X и ограничения на X и на управление U не накладываются.

3.2. Примеры синтеза регуляторов для линейных многомерных объектов

Для демонстрации технологии синтеза изоморфных регуляторов применительно к более сложным, по сравнению с рассмотренными в главах 1 и 2, объектам управления рассмотрим объект в форме (3.7), в котором матрицы A и B имеют вид

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.11}$$

В начале рассмотрим задачу управления объектом (3.7) с матрицами (3.11) в случае, когда требуется регулировать лишь компоненту x_3. Задача необычна тем, что формально размер вектора X больше размера вектора управлений U, то есть $m<n$, однако управлять нужно только одной его компонентой, а остальные, удовлетворяя требуемому значению x_3, могут изменяться «свободно» в соответствии с уравнениями модели (3.7), то есть на самом деле размер вектора U больше размера «подвектора» x_3 управляемых компонент. Попробуем вычислить регулятор методом понижения порядка вектора X до размера вектора U в соответствии с рекомендацией главы 1 этой части книги.

Преобразуя (3.7) в алгебраическую форму и понижая порядок модели с учётом

$$x_3 = a_{31}^* x_1 + a_{32}^* x_2 \Rightarrow x_3 = \begin{bmatrix} a_{31}^* & a_{32}^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow x_3 = A_{123} X_{12}\ , \tag{3.12}$$

где $a_{31}^* = a_{31}(p-a_{33})^{-1}$, $a_{32}^* = a_{32}(p-a_{33})^{-1}$, $A_{123} = \begin{bmatrix} a_{31}^* & a_{32}^* \end{bmatrix}$, $X_{12} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, получим систему уравнений второго порядка

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}^* u_1 + b_{12}^* u_2 \\ x_2 = a_{21}^* x_1 + b_{22}^* u_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -a_{21}^* & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_{11}^* & b_{12}^* \\ 0 & b_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \Rightarrow X_{12} = B_{12} U\,, \quad (3.13)$$

в которой с учётом (3.11)

$$b_{11}^* = b_{11}\left(p - a_{11} - a_{12}a_{21}^* - \left(a_{13}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21}^*\right)\left(p - a_{33}\right)^{-1}\right)^{-1},$$

$$b_{12}^* = \left(a_{12}b_{22}^* + a_{13}a_{32}b_{22}^*\right)\left(p - a_{33}\right)^{-1}\left(p - a_{11} - a_{12}a_{21}^* - \left(a_{13}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21}^*\right)\left(p - a_{33}\right)^{-1}\right)^{-1},$$

$$b_{22}^* = b_{22}\left(p - a_{22} - a_{23}a_{32}\left(p - a_{33}\right)^{-1}\right)^{-1},$$

$$a_{21}^* = \left(a_{21}\left(p - a_{33}\right) + a_{23}a_{31}\right)\left(\left(p - a_{22}\right)\left(p - a_{33}\right) - a_{23}a_{32}\right)^{-1},$$

$$B_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -a_{21}^* & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_{11}^* & b_{12}^* \\ 0 & b_{22}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}^* & b_{12}^* \\ a_{21}^* b_{11}^* & \left(a_{21}^* b_{12}^* + b_{22}^*\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_{11} & \tilde{b}_{12} \\ \tilde{b}_{21} & \tilde{b}_{22} \end{bmatrix}, \; U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix},$$

$$B_{12}^{-1} = \begin{bmatrix} \left(a_{21}^* b_{12}^* + b_{22}^*\right) / b_{11}^* b_{22}^* & -b_{12}^* / b_{11}^* b_{22}^* \\ -a_{21}^* / b_{22}^* & 1 / b_{22}^* \end{bmatrix}, \; \tilde{b}_{11} = b_{11}^*, \tilde{b}_{12} = b_{12}^*, \tilde{b}_{21} = a_{21}^* b_{11}^*, \tilde{b}_{22} = a_{21}^* b_{12}^* + b_{22}^*.$$

Для объекта в форме (3.12), (3.13) коммутативная диаграмма контура управления показана на рис. 3.3.

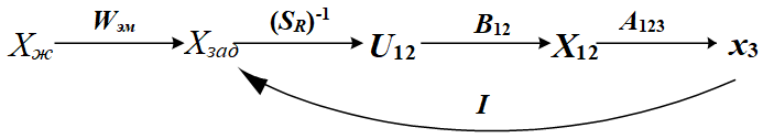


Рис. 3.3. Вариант №1 контура управления объектом (3.13), (3.12)

Здесь, как следует из (3.13), B_{12} - изоморфизм (обратимая в обычном смысле матрица размера 2×2), размер m вектора U_{12} равен размеру n вектора X_{12}. Нетрудно убедиться, что в данном случае невозможно определить регулятор с точностью до обыкновенного изоморфизма I_U размера 2×2 вида (3.5), так как размер m вектора U_{12} больше размера регулируемой скалярной компоненты x_3. Попытаемся определить регулятор S_R^{-1} с точностью до изоморфизма B_{12}. В этом случае регулятор, как видно из рис. 3.3, должен удовлетворять в коммутативной диаграмме уравнению $S_R^{-1} = B_{12}^{-1} A_{123}^{-1}$ и системе уравнений типа (1.4) - (1.6), из которых следует, что для единицы на X_{12} должно выполняться равенство

$$I_{12}^{лев} = B_{12} B_{12}^{-1} = A_{123}^{-1} A_{123} = I_{12}^{прав} = I\,,$$

где $I_{12}^{лев}, I_{12}^{прав}$ - левая и правая единицы на множестве X_{12}, которые должны быть равны между собой и должны быть равны единичной матрице I размера 2×2. Прямой подстановкой из (3.13) и проверкой убеждаемся, что

$$I_{12}^{лев} = B_{12}B_{12}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I,$$

$$I_{12}^{прав} = A_{123}^{-1}A_{123} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{31}^* & a_{32}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 a_{31}^* & k_1 a_{32}^* \\ k_2 a_{31}^* & k_2 a_{32}^* \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I,$$

где k_1 и k_2 – неизвестные элементы обратной с точностью до изоморфизма B_{12} матрицы A_{123}^{-1}. Таким образом, $I_{12}^{лев} \neq I_{12}^{прав} \neq I$, что означает невозможность использования диаграммы, показанной на рис. 3.3, для вычисления регулятора, так как она не коммутируется как изоморфизмом I_U, так и изоморфизмом B_{12}: размеры этих изоморфизмов больше некоторых размеров коммутируемых ими матриц, а именно больше одного из размеров матрицы A_{123}, как это видно из (3.12).

Указанных трудностей можно избежать, свернув коммутативную диаграмму (см. рис. 3.3) до простейшего вида, показанного на рис. 3.4, где x_3 с учётом (3.12) и (3.13) определяется по формуле

$$x_3 = A_{123}X_{12} = A_{123}B_{12}U_{12} = B_{123}U_{12}.$$

Здесь $B_{123} = A_{123}B_{12} = \begin{bmatrix} b_{31}^* & b_{32}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(a_{31}^* b_{11}^* + a_{32}^* a_{21}^* b_{11}^*\right) & \left(a_{31}^* b_{12}^* + a_{32}^*\left(a_{21}^* b_{12}^* + b_{22}^*\right)\right) \end{bmatrix}$; b_{31}^*, b_{32}^* - элементы матрицы B_{123}.

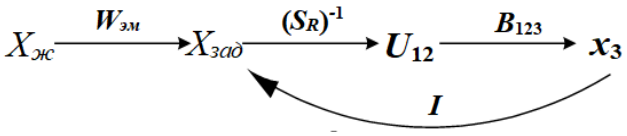


Рис. 3.4. Вариант №2 контура управления объектом (3.13), (3.12)

Для контура, показанного на рис. 3.4, регулятор определяется с точностью до изоморфизма I между текущим и заданным значением координаты x_3. Изоморфизм I в общем случае может быть единичной матрицей или обратимой в обычном смысле матрицей желаемых передаточных функций, а в данном случае его можно назначить в виде обычной скалярной единицы, обозначающей требование абсолютно точного слежения скалярной координатой x_3 за заданным значением $x_3 = x_3^{зад} = X_{зад}$. Тогда, как видно из рис. 3.4, регулятор определится по

формуле $S_R^{-1} = B_{123}^{-1}$ с учётом удовлетворения равенствам типа (1.4) - (1.6), приобретающим в данном случае вид

$$I_x^{прав} = S_R S_R^{-1},\ I_x^{лев} = B_{123} B_{123}^{-1},\ I_x^{лев} = I_x^{прав} = 1,\ I_U^{лев} = S_R^{-1} S_R,\ I_U^{прав} = B_{123}^{-1} B_{123},$$

$$I_U^{лев} = I_U^{прав}. \qquad (3.14)$$

С учётом (3.14) и равенства $B_{123} = S_R = \begin{bmatrix} b_{31}^* & b_{32}^* \end{bmatrix}$ (см. рис. 3.4) можно записать уравнения

$$I_x^{лев} = B_{123} B_{123}^{-1} = \begin{bmatrix} b_{31}^* & b_{32}^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = 1, \qquad (3.15)$$

$$I_x^{прав} = S_R S_R^{-1} = \begin{bmatrix} b_{31}^* & b_{32}^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = 1, \qquad (3.16)$$

где в данном случае k_1 и k_2 – некоторые пока неизвестные элементы матриц $B_{123}^{-1} = S_R^{-1}$. Здесь $B_{123}^{-1} = S_R^{-1} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$ - обратная матрица к матрице $B_{123} = S_R = \begin{bmatrix} b_{31}^* & b_{32}^* \end{bmatrix}$ с точностью до изоморфизма I=1. Как видно из этих уравнений и рис. 3.4, для определения обратной связи от $x_3 = x_3^{зад} = X_{зад}$ к U_{12}, то есть регулятора S_R^{-1}, необходимо определить элементы k_1 и k_2 матрицы S_R^{-1}. Для этого, как следует из (3.15) и (3.16), имеется лишь одно уравнение, поэтому один из искомых элементов можно выбрать произвольно. Пусть k_1=1. Тогда из рассматриваемых уравнений имеем $b_{31}^* + b_{32}^* k_2 = 1$ и $k_2 = \left(1 - b_{31}^*\right)\left(b_{32}^*\right)^{-1}$, что даёт регулятор вида

$$S_R^{-1} = \begin{bmatrix} 1 \\ \left(1 - b_{31}^*\right)\left(b_{32}^*\right)^{-1} \end{bmatrix}. \qquad (3.17)$$

Проверяя выполнение остальных равенств из (3.14), получим

$$I_U^{прав} = B_{123}^{-1} B_{123} = I_U^{лев} = S_R^{-1} S_R = \begin{bmatrix} 1 \\ \left(1 - b_{31}^*\right)\left(b_{32}^*\right)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{31}^* & b_{32}^* \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} b_{31}^* & b_{32}^* \\ \left(1 - b_{31}^*\right)\left(b_{32}^*\right)^{-1} b_{31}^* & \left(1 - b_{31}^*\right) \end{bmatrix} = I_U.$$

Таким образом, левая и правая единицы на множестве управлений U_{12} совпадают и умножение единицы на себя даёт эту же матрицу, то есть полученная матрица действительно является единицей-изоморфизмом с точностью до изоморфизма I на множестве управлений U_{12} даже несмотря на то, что определитель

этой матрицы равен нулю и, следовательно, она в обычном смысле, вне коммутативной диаграммы на рис. 3.4, отображением-изоморфизмом не является – не является матричной единицей в обычном смысле. То есть I_U по нашей терминологии *необыкновенный изоморфизм*.

В целом, удовлетворяются все равенства (3.14). Следовательно, регулятор S_R^{-1}, отвечающий формуле (3.17) и характеризующий обратную связь от регулируемой координаты x_3 к вектору управлений, определён правильно. В данном случае регулятор S_R^{-1} единственен с точностью до класса в силу возможности вариаций (например, оптимизации по некоторому критерию или в соответствии с некоторым функционалом) коэффициентов k_1 и k_2. При k_1=1, как видно из (3.17) и рис. 3.4, законы управления компонентой $x_3 = x_3^{зад} = X_{зад}$ имеют вид:

$$U_{12} = S_R^{-1} X_{зад} = \begin{bmatrix} 1 \\ \left(1 - b_{31}^*\right)\left(b_{32}^*\right)^{-1} \end{bmatrix} \cdot x_3^{зад} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = x_3^{зад} \\ u_2 = \left(1 - b_{31}^*\right)\left(b_{32}^*\right)^{-1} \cdot x_3^{зад} \end{cases} . \qquad (3.18)$$

Проверим, действительно ли при использовании этих законов управления в любой момент времени будет обеспечиваться равенство $x_3 = x_3^{зад} = X_{зад}$, то есть обеспечиваться точное слежение компонентой x_3 за своим заданным значением $x_3^{зад}$? Из рис. 3.4 следует, что

$$x_3 = B_{123} S_R^{-1} x_3^{зад} = \begin{bmatrix} b_{31}^* & b_{32}^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \left(1 - b_{31}^*\right)\left(b_{32}^*\right)^{-1} \end{bmatrix} \cdot x_3^{зад} = x_3^{зад}.$$

Таким образом, синтезированные законы управления решают задачу точной отработки объектом в контуре управления с полученным регулятором заданного значения $x_3^{зад}$. Выбором значений одного из коэффициентов, например, k_1, можно перераспределять управляющие воздействия на x_3 между управлениями u_1 и u_2. Это может понадобиться, например, для выявления наиболее эффективного воздействия u_1 или u_2 на x_3, к которому эта компонента наиболее чувствительна.

Рассмотренный пример, наряду с демонстрацией технологии синтеза изоморфного регулятора, интересен тем, что иллюстрирует особые свойства изоморфных отображений в коммутативной диаграмме, построенной на некотором обычном изоморфизме. Такие особые свойства мы наблюдали и ранее в других примерах. Действительно, регулятор S_R^{-1}, структура которого характеризуется

прямоугольной матрицей (3.17), является, тем не менее, изоморфным, то есть обратимым с точностью до изоморфизма I =1 внутри коммутативной диаграммы, представленной на рис. 3.4. Кроме того, как видно из рассмотренного, необходимым условием коммутируемости диаграммы, а, следовательно, и существования регулятора, является выполнение условия: размер изоморфизма, с точностью до которого вычисляется регулятор, не должен превосходить любого из размеров коммутируемых им матриц. Продемонстрируем это положение ещё на одном примере.

Рассмотрим уравнения объекта (3.12), (3.13). Как мы убедились, диаграмма, представленная на рис. 3.3, не коммутируется относительно изоморфизма B_{12}. Преобразуем уравнения и соответствующую диаграмму отображений к виду, показанному на рис. 3.5, где, в отличие от рис. 3.3 и рис. 3.4, введены обозначения

$$A_{123}^{*}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ a_{31}^{*} & a_{32}^{*}\end{bmatrix},\ X_{123}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix},\ X_{зад}=\begin{bmatrix}x_1^{зад}\\ x_2^{зад}\\ x_3^{зад}\end{bmatrix},\ I=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}. \qquad (3.19)$$

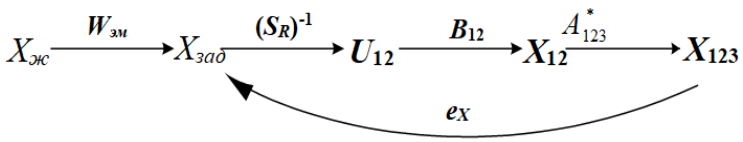


Рис. 3.5. Вариант №3 контура управления объектом (3.13), (3.12)

На этой диаграмме любые размеры матриц-отображений превосходят размеры отображения-изоморфизма B_{12}. На основании рис. 3.5 и соотношений типа (1.4) – (1.6) получим

$$I_{x_{123}}^{лев}=A_{123}^{*}\left(A_{123}^{*}\right)^{-1}=S_R S_R^{-1}=I_{x_{123}}^{прав}, \qquad (3.20)$$

где $S_R=A_{123}^{*}B_{12}=\begin{bmatrix}\tilde{b}_{11} & \tilde{b}_{12}\\ \tilde{b}_{21} & \tilde{b}_{22}\\ \left(a_{31}^{*}\tilde{b}_{11}+a_{32}^{*}\tilde{b}_{21}\right) & \left(a_{31}^{*}\tilde{b}_{12}+a_{32}^{*}\tilde{b}_{22}\right)\end{bmatrix}$,

$S_R^{-1}=\begin{bmatrix}l_{11} & l_{12} & l_{13}\\ l_{21} & l_{22} & l_{23}\end{bmatrix}$, $l_{11}...l_{23}$ - неизвестные элементы,

$$S_R^{-1} = B_{12}^{-1}\left(A_{123}^*\right)^{-1} \Rightarrow B_{12}S_R^{-1} = \left(A_{123}^*\right)^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \tilde{b}_{11} & \tilde{b}_{12} \\ \tilde{b}_{21} & \tilde{b}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tilde{b}_{11}l_{11} + \tilde{b}_{12}l_{21} = k_{11} \\ \tilde{b}_{11}l_{12} + \tilde{b}_{12}l_{22} = k_{12} \\ \tilde{b}_{11}l_{13} + \tilde{b}_{12}l_{23} = k_{13} \\ \tilde{b}_{21}l_{11} + \tilde{b}_{22}l_{21} = k_{21} \\ \tilde{b}_{21}l_{12} + \tilde{b}_{22}l_{22} = k_{22} \\ \tilde{b}_{21}l_{13} + \tilde{b}_{22}l_{23} = k_{23} \end{cases},$$

$\left(A_{123}^*\right)^{-1} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \end{bmatrix}$, $k_{11}...k_{23}$ - неизвестные элементы.

$$I_{x_{12}}^{лев} = B_{12}B_{12}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \Rightarrow I_{x_{12}}^{прав} = \left(A_{123}^*\right)^{-1} A_{123}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k_{11} + k_{13}a_{31}^* = 1 \\ k_{12} + k_{13}a_{32}^* = 0 \\ k_{21} + k_{23}a_{31}^* = 0 \\ k_{22} + k_{23}a_{32}^* = 1 \end{cases}. \tag{3.21}$$

$$I_{U_{12}}^{прав} = B_{12}^{-1}B_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \Rightarrow I_{U_{12}}^{лев} = S_R^{-1}S_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} l_{11}\tilde{b}_{11} + l_{12}\tilde{b}_{21} + l_{13}\left(a_{31}^*\tilde{b}_{11} + a_{32}^*\tilde{b}_{21}\right) = 1 \\ l_{11}\tilde{b}_{12} + l_{12}\tilde{b}_{22} + l_{13}\left(a_{31}^*\tilde{b}_{12} + a_{32}^*\tilde{b}_{22}\right) = 0 \\ l_{21}\tilde{b}_{11} + l_{22}\tilde{b}_{21} + l_{23}\left(a_{31}^*\tilde{b}_{11} + a_{32}^*\tilde{b}_{21}\right) = 0 \\ l_{21}\tilde{b}_{12} + l_{22}\tilde{b}_{22} + l_{23}\left(a_{31}^*\tilde{b}_{12} + a_{32}^*\tilde{b}_{22}\right) = 1 \end{cases}. \tag{3.22}$$

Уравнения (3.20), (3.21), (3.22) могут быть разрешены относительно 12-ти неизвестных элементов $l_{11}...l_{23}$, $k_{11}...k_{23}$ матриц S_R^{-1} и $\left(A_{123}^*\right)^{-1}$, определяющих структуру и параметры регулятора с точностью до изоморфизма B_{12}. В данном случае изоморфизм B_{12} коммутирует диаграмму, представленную на рис. 3.5. Однако можно ожидать, что единица e_X на X_{123} может быть и не равна обычной единичной матрице, так как в данном случае размер n вектора X_{123} больше размера m вектора управлений U_{12}. Это означает, как мы отмечали в первой главе этой части книги, что не любое заданное значение $X_{зад}$ вектора X_{123} может оказаться достижимым.

Таким образом, изоморфный регулятор может быть определён различными способами, основанными на разной интерпретации уравнений (3.12) и (3.13) и использовании соответствующих коммутативных диаграмм, описывающих объект управления. Следует иметь в виду, что применительно к объекту управления с матрицами вида (3.11) решена задача многомерного регулирования переменных состояния x_1, x_2, x_3 посредством двух управляющих воздействий, определяемых законами управления (см. рис. 3.5):

$$U_{12} = S_R^{-1} X_{зад} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = l_{11} x_1^{зад} + l_{12} x_2^{зад} + l_{13} x_3^{зад} \\ u_2 = l_{21} x_1^{зад} + l_{22} x_2^{зад} + l_{23} x_3^{зад} \end{cases}, \qquad (3.23)$$

где $x_1^{зад}, x_2^{зад}, x_3^{зад}$ – заданные значения переменных состояния x_1, x_2, x_3, поступающие с выхода эталонной модели, имеющей желаемую передаточную функцию $w_{эм}$. Проанализируем, в чём же отличие контуров, представленных на рис. 3.4 и рис. 3.5, и соответствующих законов управления (3.18), (3.23), используемых применительно к одному и тому же объекту (3.12), (3.13)?

Как видно из закона управления (3.18) и соответствующей ему процедуры синтеза, этот закон обеспечивает регулирование лишь одной выходной компоненты x_3 посредством двух управляющих воздействий u_1 и u_2. Формальные требования на регулирование компонент x_1, x_2 не накладываются и их изменение осуществляется в соответствии с динамикой объекта управления, реализующей требования эталонной модели к характеру изменения компоненты x_3. Наличие двух управляющих воздействий u_1 и u_2 для управления одной компонентой x_3 обусловливает их взаимосвязь и возможность «перекачки» управляющих воздействий между u_1 и u_2 в интересах наиболее эффективного управления выходной координатой x_3.

В случае же использования закона (3.23), в векторы $X_{ж}$ и $X_{зад}$, характеризующие вход и выход эталонной модели, как видно из рис. 3.5 и (3.19), с самого начала было заложено требование регулирования всех трёх компонент вектора $X_{123} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T$, где T – знак транспонирования матрицы, в соответствии с их заданными значениями $x_1^{зад}, x_2^{зад}, x_3^{зад}$. Причём, регулирование компонент x_1 и x_2 осуществляется напрямую в силу изоморфности отображения B_{12}, а регулирование компоненты x_3 - косвенно, через посредство x_1 и x_2 (см. (3.19) и рис. 3.5).

Таким образом, вообще говоря, в зависимости от требований к регулированию компонент x_1, x_2, x_3 вектора состояния объекта возможен выбор разных отображений-изоморфизмов, с точностью до которых осуществляется замыкание контуров управления (коммутативных диаграмм) и синтез соответствующих регуляторов.

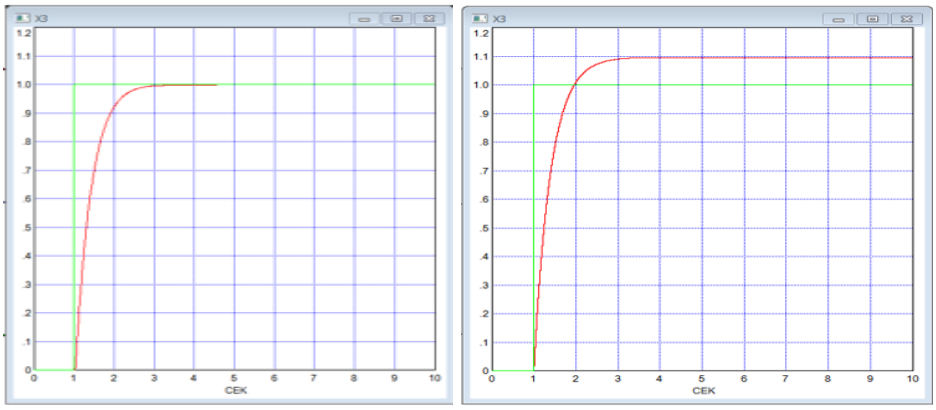
Пример. Рассматривается объект (3.7) с матрицами (3.11), элементы которых имеют следующие числовые значения [1]

$$A=\begin{bmatrix} -0{,}7 & -1{,}2 & -6 \\ -0{,}1 & -1{,}1 & -3 \\ 0 & 1 & -0{,}2 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} -0{,}8 & 0 \\ 0 & -0{,}5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (3.24)$$

Для объекта с матрицами (3.24) в качестве примеров исследовались два варианта регуляторов.

Вариант 1. Рассматривается регулятор (3.17) для управления компонентой x_3 с законом управления (3.16) и эталонной моделью $W_{ЭМ} = k(Tp+1)^{-1}$ [3], где k=1, T=0,4 , для формирования желаемого движения компоненты x_3.

В идеальном случае (структура и параметры модели точно соответствуют объекту) моделировался разомкнутый («линейный») контур, представленный на рис. 3.4, в котором обратная связь в виде изоморфизма I от координаты x_3 к ее заданному значению отсутствовала. На рис. 3.6*а* показана отработка ступенчатого входного сигнала таким контуром. Время подачи сигнала с начала моделирования равно одной секунде.

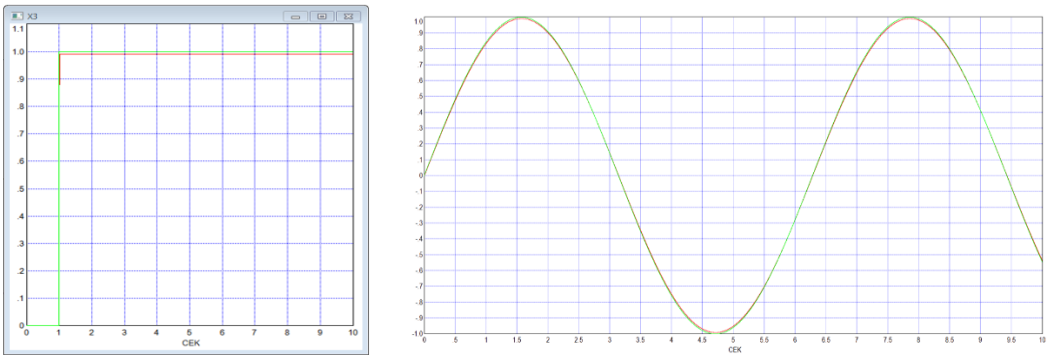


а) *б*)

Рис. 3.6. Разомкнутый контур для объекта (3.24), (3.7)

Результат моделирования разомкнутого контура в случае варьирования параметров модели показан на рис. 3.6*б*. Моделировалось неточное соответствие

объекта и модели по параметру b_{32}^{*}: предполагалось, что в управляемом объекте этот параметр отличается от принятого при синтезе регулятора на 10% ($b_{32}^{*}+10\%$). Как видно из рис. 3.6*б* в разомкнутом контуре появляется ошибка отработки входного сигнала порядка ошибки оценивания параметра b_{32}^{*} модели. На рис. 3.7*а* рис. 3.7*б* показан тот же контур, но охваченный ОС, при $b_{32}^{*}+10\%$ в объекте управления и коэффициенте усиления k = 99 в эталонной модели при воздействии, соответственно, ступенчатого и синусоидального сигнала. При этом исходное значение постоянной времени в эталонной модели при замыкании ОС не изменялось. В связи с этим на рис. 3.7*а* заметно существенное уменьшение времени переходного процесса и повышение точности регулирования.



а) *б*)

Рис. 3.7. Контур для объекта (3.24), (3.7) с дополнительной ОС при $b_{32}^{*}+10\%$ и k = 99

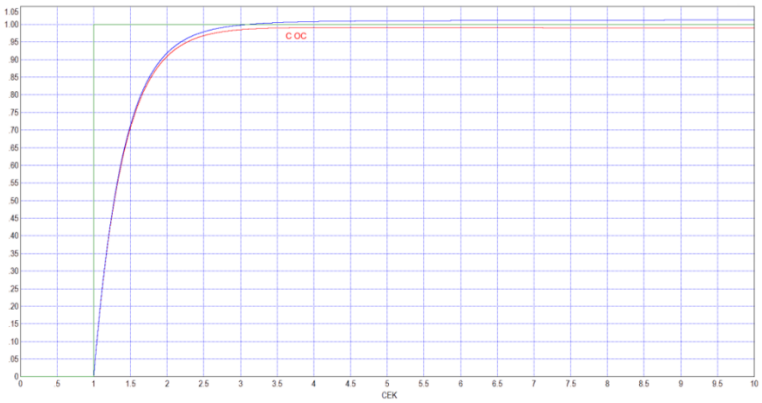


Рис. 3.8. Переходные процессы при управлении объектом (3.24), (3.7) при $b_{31}^{*}+25\%$, k = 99 и T = 0,4*(k+1) = 0,4*100

На рис. 3.8 показаны графики переходных процессов в разомкнутом контуре (верхний график) и в контуре, охваченном ОС (нижний график), когда с увеличением коэффициента усиления до значения k=99 одновременно в (k+1) раз [3]

увеличивалась постоянная времени в эталонной модели до значения T=0,4*100. При этом был искажён (увеличен на 25%) параметр $b_{31}^{*}=\dfrac{10}{100p^3+200p^2+401p+163}$ (см. формулы (3.14)-(3.17)), характеризующий объект управления и рассчитанный по параметрам модели (3.24), (3.7).

Как видно из графиков (см. рис. 3.8), при этих условиях время переходного процесса в контуре с ОС практически не поменялось в сравнении с разомкнутым контуром, а сами переходные процессы в контурах имеют высокое качество даже при существенном отличии параметров управляемого объекта от принятых при синтезе регулятора. Таким образом, как идеальный разомкнутый контур, так и контур с ОС вполне работоспособны и робастны при вариациях параметров объекта, не учитываемых в регуляторе, и могут обеспечить требуемые высокое качество и астатизм переходных процессов.

Вариант 2. Рассматривается регулятор (3.20) с законом управления (3.23) и эталонной моделью (3.8) с матрицами

$$C=\begin{bmatrix} -0{,}7 & -1{,}2 & -6 \\ -0{,}1 & -1{,}1 & -3 \\ 0 & 1 & -0{,}2 \end{bmatrix}, \tag{3.25}$$

$$D=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2{,}5 \end{bmatrix}, \tag{3.26}$$

либо

$$D=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2{,}5 \end{bmatrix}. \tag{3.27}$$

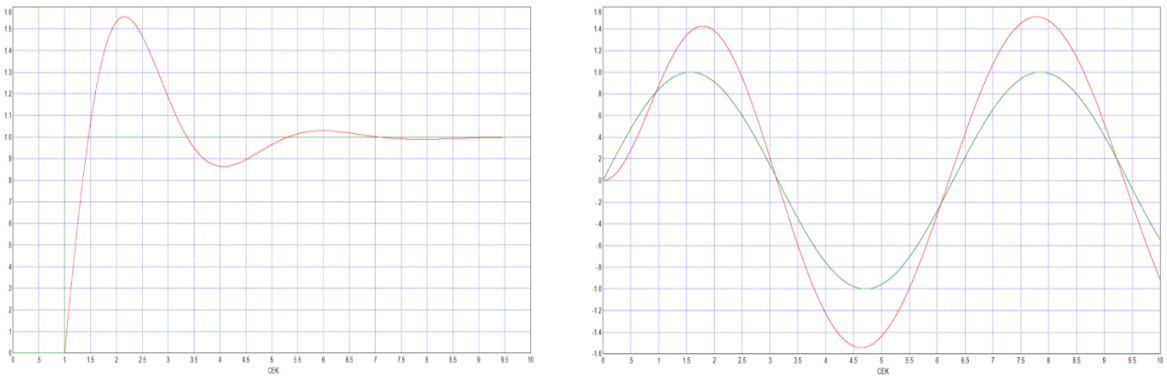
Эталонная модель (3.8) имеет передаточную функцию (3.9) $W_{эм}=(pI-C)^{-1}D$, по структуре и параметрам в основном повторяет объект и накладывает требования на движения всех трёх компонент вектора выходов объекта в соответствии с их заданными (желаемыми) значениями $x_1^{зад}, x_2^{зад}, x_3^{зад}$. В отличие от объекта (3.7) в модели (3.8) вместо матрицы B появилась матрица D коэффициентов усиления желаемых значений вектора входов, определяющих установившиеся значения $x_1^{зад}, x_2^{зад}, x_3^{зад}$ выходов эталонной модели и, соответственно, управляемого объекта. При D, соответствующей (3.26), как и в варианте 1 рассматриваемого при-

мера, задаётся желаемое значение только компоненты x_3. При D, соответствующей (3.27), реализуется возможность прямого задания желаемых значений всех трёх компонент $x_3^{ж}$, $x_1^{ж}, x_2^{ж}$ вектора входов.

В идеальном случае (структура и параметры модели точно соответствуют объекту) моделировался разомкнутый контур, представленный на рис. 3.5. На рис. 3.9*а* и рис. 3.9*б* показаны переходные процессы в таком контуре для объекта (3.7) с эталонной моделью (3.8) с матрицами (3.24), (3.25), (3.26) при ступенчатом и синусоидальном желаемых входных воздействиях на входе эталонной модели. Ненулевое входное воздействие подавалось лишь на вход $x_3^{ж}$. Установлено, что выходной сигнал объекта по компоненте x_3 практически точно отслеживает выходной сигнал $x_3^{зад}$ эталонной модели, что и требуется в соответствии с условиями поставленной задачи управления. То есть качество регулирования полностью определяется качеством эталонной модели, которое, в свою очередь, определяется разработчиком на основе, например, инженерных критериев (время регулирования, перерегулирование и т.д.). В данном случае передаточная функция (3.9) эталонной модели (3.8), (3.25), (3.26) имеет вид

$$x_3^{зад} = \frac{125p + 162{,}5}{50p^2 + 75p + 163} x_3^{ж}$$

и задаёт переходные процессы, показанные на рис. 3.9*а* и рис. 3.9*б* (графики красного цвета), практически точно (визуально неразличимо) совпадающие с графиками выхода x_3 объекта.

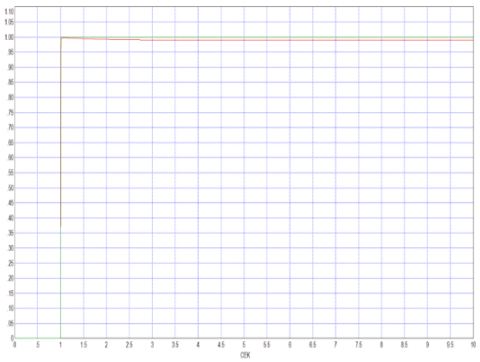


а) *б*)

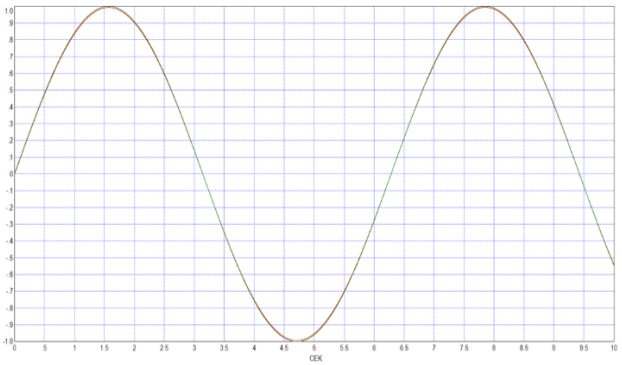
Рис. 3.9. Переходные процессы в разомкнутом контуре управления объектом (3.7), (3.8), (3.24), (3.25), (3.26)

Результаты моделирования того же объекта с прежней эталонной моделью при замыкании контура ОС приведены на рис. 3.10*а* и рис. 3.10*б*. В этом случае

в матрице (3.26) коэффициент усиления по компоненте $x_3^{ж}$ был увеличен с величины k=2,5 до k=99. Из рис. 3.10*а* и рис. 3.10*б* видно, что охват контура дополнительной ОС в данном случае позволяет существенно повысить качество переходных процессов.



а)



б)

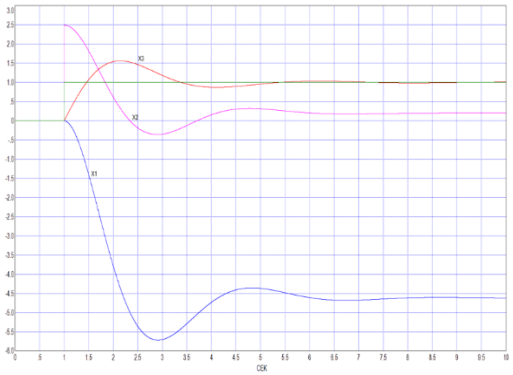
Рис. 3.10. Переходные процессы в замкнутом контуре управления объектом (3.7), (3.8), (3.24), (3.25), (3.26)

На рис. 3.11*а* и рис. 3.11*б* показаны переходные процессы в разомкнутом контуре (см. рис. 3.5), в случае моделирования объекта (3.7) с эталонной моделью (3.8) с матрицами (3.24), (3.25), (3.27) при различных желаемых входных воздействиях $x_3^{ж}$ и нулевых сигналах $x_1^{ж}, x_2^{ж}$ на входе эталонной модели. В этом случае передаточные функции эталонной модели имеют вид

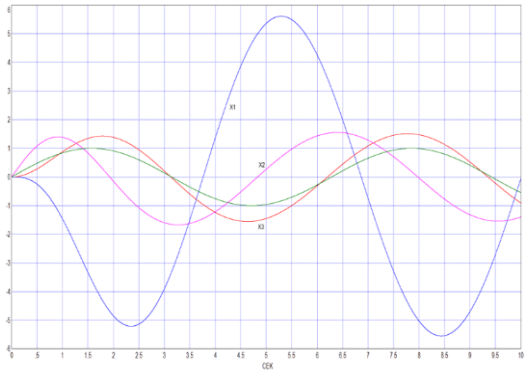
$$x_1^{зад} = -40 \cdot \frac{3.14\,p^5 + 10.98\,p^4 + 32.22\,p^3 + 44.44\,p^2 + 48.7\,p + 16.67}{8.33\,p^7 + 41.67\,p^6 + 156.5\,p^5 + 341.5\,p^4 + 585.4\,p^3 + 623.07\,p^2 + 487.98\,p + 144.36} \cdot x_3^{ж}$$

$$x_2^{зад} = 2 \cdot \frac{5.23p^9 + 32.9\,p^8 + 133.3\,p^7 + 350.8\,p^6 + 679.1\,p^5 + 950.1\,p^4 + 946.2\,p^3 + 632.2\,p^2 + 211.5\,p + 23.26}{4.2p^9 + 26.3\,p^8 + 118.8\,p^7 + 339.6\,p^6 + 766.6\,p^5 + 1241.8\,p^4 + 1591.4\,p^3 + 1392.5\,p^2 + 879.5\,p + 232.4} \cdot x_3^{ж}$$

$$x_3^{зад} = \frac{5.2p^9 + 32.9\,p^8 + 133.3\,p^7 + 350.8\,p^6 + 679.1\,p^5 + 950.1\,p^4 + 946.2\,p^3 + 632.2\,p^2 + 211.5\,p + 23.26}{2.1p^{10} + 13.5p^9 + 62\,p^8 + 181.7\,p^7 + 417.3\,p^6 + 697.6\,p^5 + 919.9\,p^4 + 855.4\,p^3 + 579\,p^2 + 204.2\,p + 23.24} \cdot x_3^{ж} \;.$$



а)



б)

Рис. 3.11. Переходные процессы в разомкнутом контуре управления объектом (3.7), (3.8), (3.24), (3.25), (3.27)

Таким образом, правильно синтезированный разомкнутый контур даже применительно к сложным объектам при наличии существенных отклонений параметров от принятых в модели является в достаточной степени робастным и в определённом смысле «предельным» по достижимому качеству переходных процессов. В связи с этим возникает вопрос, в каких случаях целесообразно применять разомкнутый контур, а в каких этот контур необходимо охватывать обратной связью? Очевидно, если задана весьма точная модель объекта и заранее известна или задаётся извне программа изменения входного сигнала, то достаточно разомкнутого контура. Разомкнутого контура вполне достаточно и в том случае, когда нужно обеспечить *высокую управляемость объекта* при относительно невысоких требованиях к точности отслеживания заданной координаты. Если же желаемый входной сигнал может непрерывно и произвольно изменяться в широких пределах и нужно обеспечить искусственную (с помощью системы управления) *высокую устойчивость объекта*, то есть сопротивляемость изменению текущего режима движения, вызывающую, в том числе, и определенную сопротивляемость сигналам управления, то в этом случае необходима ОС. ОС необходима и в случаях, когда требуется обеспечить высокую точность отслеживания заданных координат управления в условиях весьма значительных (до десятков процентов) отклонений параметров объекта от принятых в модели и при больших шумовых воздействиях на контур управления. Все эти режимы управления, как следует из результатов, изложенных в главах 1-3 этой части книги, могут быть реализованы с помощью изоморфных регуляторов. Следовательно, изоморфные регуляторы обладают высокой универсальностью.

Сравнение предлагаемого метода формализованного синтеза изоморфных регуляторов как для SISO, так и для MIMO-объектов с многими известными методами, приведёнными, например, в [4], показало преимущества рассматриваемого метода как в смысле высокого уровня формализации процедуры синтеза и исключения приёмов, основанных на искусстве проектировщика, так и в смысле достижимого качества переходных процессов и робастности регуляторов.

Важной проблемой синтеза является выбор эталонной модели, формализующей цель управления и полностью определяющей качество переходных процессов в контуре управления с изоморфным регулятором. Эта проблема является относительно самостоятельной и в определённом смысле «внешней» по отношению к рассмотренному здесь методу синтеза изоморфных регуляторов, как

и вообще «внешней» является реализуемая цель по отношению к любой разрабатываемой искусственной системе [5]. Вместе с тем методы решения этой проблемы применительно к синтезу регуляторов хорошо отработаны и в достаточной степени формализованы. Выбор эталонной модели может быть осуществлён по инженерным критериям качества (время регулирования, перерегулирование и др.), по методикам, рассмотренным в [4] и в других работах (см., например, [6]).

В целом в этой и предшествующих главах в наиболее общей алгебраической форме проанализировано фундаментальное свойство управляемости динамических объектов в рамках общего принципа изоморфизма в теории систем. Получены новые критерии управляемости применительно как к объектам достаточно общего вида, так и в частных случаях – для линейных SISO и MIMO- объектов.

Разработан новый формализованный метод и соответствующая технология синтеза регуляторов нового типа - изоморфных регуляторов, - обладающих в определённом смысле свойством «предельности» как по уровню общности доказанных утверждений об управляемости объектов весьма общего вида, так и по уровню достижимого качества регулирования, требования к которому полностью определяются задаваемой разработчиком эталонной моделью. Строгая формализация процедуры синтеза изоморфных регуляторов практически исключает эвристики и необходимость привлечения «искусства проектировщика» при их разработке. Основанные на предлагаемом подходе методики синтеза изоморфных регуляторов для объектов различной сложности проиллюстрированы на примерах в главах 1-3. Результаты моделирования синтезированных регуляторов показали их работоспособность, высокую точность и робастность в отношении значительных параметрических и шумовых возмущений в структуре объектов и в контурах управления, а также высокое качество переходных процессов в сравнении с регуляторами традиционной структуры.

Литература к Главе 3 Раздела 1 Части 2:

1. *Буков В.Н.* Вложение систем. Аналитический подход к анализу и синтезу матричных систем. Калуга: Изд-во научн. литературы Н.Ф. Бочкаревой, 2006. 720с.
2. *Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Рябченко В.Н.* Матричные методы в теории и практике систем автоматического управления летательных аппаратов. М.: Изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016.
3. *Кулабухов В.С.* Синтез регуляторов для следящих систем на основе принципа изоморфности // Мехатроника, автоматизация, управление. 2017. Том 18, №8. С. 507-515.
4. *Булгаков В.В., Кулабухов В.С.* Сравнительный анализ формализованных методов синтеза регулятора для следящей системы // Приборы. 2013. №1(151). С. 39-44.
5. *Кулабухов В.С.* Федеративно-интегрированная распределённая модульная авионика // Авиакосмическое приборостроение. 2015. №12. С. 11-31.
6. *Ким Д.П.* Алгебраический метод синтеза линейных непрерывных систем управления // Мехатроника, автоматизация, управление. 2011. №1. С.9-15.

Глава 4

Технология синтеза изоморфных наблюдателей. Примеры

Предложена простая, формализованная технология синтеза наблюдателей нового типа - изоморфных наблюдателей. Показано, что для наблюдаемого объекта существует декомпозиция задачи синтеза, позволяющая раздельно и независимо формировать изоморфный наблюдатель и фильтр. Предложен метод синтеза робастных наблюдателей, обеспечивающих в совокупности с фильтрами высокое качество восстановления по информации датчиков и фильтрации непосредственно не измеряемых компонент вектора состояния динамических объектов достаточно общего вида в условиях значительных шумовых и параметрических возмущений. Приведены примеры синтеза изоморфных наблюдателей и фильтров.

4.1. Задача синтеза наблюдателя с точностью до изоморфизма. Вводные замечания

Применение алгоритмов и программ наблюдения и фильтрации сигналов весьма распространено в системах авионики. Наиболее известны два подхода к синтезу наблюдателей: на основе фильтра Калмана [1-4] и на основе наблюдателей Люенбергера [2, 3, 5]. Подходы применяются в основном к линейным системам и позволяют синтезировать асимптотические наблюдатели, формирующие точные оценки не доступных для измерения компонент вектора состояния при достаточно большом времени наблюдения [1-5]. Наблюдатели одновременно реализуют и функцию фильтрации сигналов. Причем, в рамках известных подходов между качествами процессов наблюдения и фильтрации приходится устанавливать некоторый эвристический компромисс. Эвристически и лишь отчасти устраняется и недостаточная робастность указанных наблюдателей [2, 3, 6]. Во многих практических задачах в виду «избыточности» фильтра Калмана используют более простые средства наблюдения и фильтрации. Одним из таких средств и является наблюдатель Люенбергера - произвольно выбираемая динамическая система, вектор состояния которой линейно связан с вектором состояния наблюдаемого объекта и поэтому может служить в качестве его оценки [3, 5].

В целом, современные методы синтеза наблюдателей сложны и недостаточно формализованы. Это относится даже к простым линейным системам, которые часто применяются на практике. Работы по синтезу наблюдателей для нелинейных систем пока носят абстрактно-математический характер и не нашли широкого применения (см., например, [2, 3, 7-10]). При поиске общего решения проблемы наблюдения и фильтрации используют геометрические методы [7, 11], аппарат алгебры Ли [7-10] и аппарат современной алгебры [12-17], основанный на морфизмах. В работах [12-17] на основе общего, алгебраического принципа изоморфизма в теории систем введено понятие *наблюдаемости с точностью до некоторой изоморфной модели, что позволило формально определить структуру наблюдателей для систем общего вида и для линейных систем.*

В этой главе на основе результатов исследований, изложенных в 4-й главе 1-й части книги и в работах [12-17], рассматривается теория и технология синтеза наблюдателей нового типа – изоморфных наблюдателей. В отличие от известных наблюдателей, изоморфные наблюдатели для систем весьма общего вида позволяют декомпозировать общую задачу синтеза на независимые задачи синтеза наблюдателя и фильтра. На примерах линейных объектов продемонстрированы преимущества изоморфных наблюдателей, к которым относятся простая, строго формализованная процедура синтеза и обеспечение предельно достижимого качества процессов наблюдения и фильтрации.

Как отмечалось в 6-й главе 1-й части книги, *задача наблюдения вектора состояния динамического объекта является двойственной задаче управления, то есть, по сути, изоморфна задаче управления*. В этом смысле все утверждения и рекомендации, сформулированные в 1-й главе этого раздела применительно к технологии синтеза регуляторов, справедливы и в отношении технологии синтеза наблюдателей с той лишь разницей, что вместо вектора управлений U, воздействующего на вход динамического объекта, рассматривается вектор измерений Z, характеризующий показания «датчиков», непосредственно воспринимающих «сигналы» с выхода объекта, отражающие в текущий момент времени значения некоторых или всех, в том числе и непосредственно недоступных для измерения, компонент вектора состояния выходов объекта.

В связи с указанной двойственностью теоретические аспекты синтеза наблюдателей можно было бы не рассматривать и сразу перейти к демонстрации технологии на примерах. Однако *в задаче о наблюдателе* имеются терминологические и другие особенности. В связи с этим уделим некоторое внимание изложению элементов теории синтеза наблюдателей с точностью до изоморфизма. Основные положения теории синтеза наблюдателей «в большом», исходя из общего принципа изоморфизма, фундаментальной леммы и теоремы о реализации,

рассмотрены в 4-й главе 1-й части книги. Здесь по аналогии с 1-й главой этого раздела более детально *проанализируем* «*задачу о наблюдателе*» применительно к линейным объектам и некоторые особенности ее решения для нелинейных объектов.

4.2. Задача синтеза наблюдателя. Теоретические положения

Рассматривается объект с измерителем:

$$\begin{cases} \dot{X} = AX, X_0 \\ Z = HX, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X(p) = \Phi(p)X_0, \Phi(p) = (pI - A)^{-1}, \\ Z(p) = HX(p), Z(p) = H\Phi(p)X_0, \end{cases} \tag{4.1}$$

где $Z \subset R^m$, $X \subset R^n$, $m < n$, $H\Phi(p) = G(p)$ - передаточная функция объекта наблюдения от начального состояния X_0 к вектору измерений Z. В соответствии с классической постановкой задачи наблюдения (оценивания), рассмотренной в 4-й главе 1-й части книги, необходимо оценить начальное состояние объекта X_0. То есть X_0 неизвестно и должно быть восстановлено на основе модели (4.1) по результатам измерений Z доступных компонент (или некоторых «комбинаций» компонент) вектора состояния X объекта на некотором интервале времени. С учетом того, что момент времени t_o можно устремить к текущему моменту времени t, то при $t_o \to t$ и при известной модели (4.1) возникает возможность оценивания и текущего, то есть в данный момент, состояния $X(t)$ объекта.

Как и в задаче синтеза регулятора, на первый взгляд кажется, что при $m < n$ для решения задачи можно использовать коммутативную диаграмму, показанную на рис. 4.1.

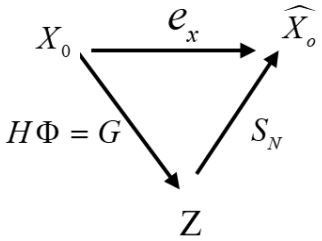


Рис. 4.1. Начальная коммутативная диаграмма

Однако, как и в задаче управления, здесь из-за взаимосвязи компонент в векторе X в силу (4.1), единица e_x на X не является единичной матрицей. Более того, структура этой матрицы изначально вообще неизвестна и сама подлежит определению. В соответствии с общим принципом изоморфизма структура единицы e_x на X должна определяться по основной лемме и теореме о реализации в силу уравнения (4.1). Поэтому отталкиваться от изоморфизма e_X, как от начального, в задаче оценивания нельзя, точнее, – не представляется возможным. Это понятно и из «интуитивно-эвристических» соображений: размеры изоморфизма e_x

больше некоторых размеров «измеряемых» им отображений G и S_N. Значит с точностью до этого изоморфизма указанные отображения не могут быть определены («измерены»).

В качестве исходной нужно использовать коммутативную диаграмму, представленную на рис. 4.2, которая построена с учетом того факта, что в уравнении (4.1) *действительно независимыми* (*некоррелированными*) *должны быть и являются лишь непосредственно наблюдаемые измерения Z*, формирующиеся на выходе имеющихся датчиков.

$$\begin{tikzcd} Z & & Z \arrow[ll, "e_Z"'] \arrow[dl, "S_N"] \\ & X_0 \arrow[ul, "G"] & \end{tikzcd}$$

Рис. 4.2. Исходная коммутативная диаграмма

В силу независимости компонент в векторе измерений *Z*, на рис. 4.2 e_Z - обычная единичная матрица размера *m*. Если система (4.1) наблюдаема, то коммутативная диаграмма замыкается наблюдателем S_N. *Условия наблюдаемости* имеют вид:

$$\begin{cases} e_Z^{лев} = GG^{-1} = S_N^{-1}S_N = e_Z^{прав} = e_Z, e_Z e_Z = e_Z, \\ e_X^{лев} = G^{-1}G = S_N S_N^{-1} = e_X^{прав} = e_X, e_X e_X = e_X, \end{cases} \tag{4.2}$$

где e_Z - единичная матрица размера *m*, e_X - единица на алгебраической структуре X_0, как правило, неединичная матрица размера *n*. Если e_X существует, то система наблюдаема и уравнение наблюдения имеет вид

$$X_0 = S_N Z, \tag{4.3}$$

где S_N - наблюдатель, вычисляемый путем последовательного решения уравнений:

$$GG^{-1} = (H\Phi)\cdot G^{-1} = e_Z; \tag{4.4}$$

$$S_N = G^{-1}e_Z = G^{-1}. \tag{4.5}$$

В начале в (4.4) по известным G и e_Z вычисляем G^{-1}. Затем в соответствии с (4.5) по полученной матрице G^{-1} с учетом того, что e_Z единичная матрица, сразу определяем наблюдатель S_N. Таким образом, критерием существования наблюдателя, а значит и критерием наблюдаемости объекта (4.1) при $m<n$, является существование обратной (с точностью до изоморфизма e_Z) матрицы G^{-1},

удовлетворяющей равенству (4.4) и проверочным равенствам (4.2). То есть *равенство* (4.4) *является простым и легко проверяемым критерием наблюдаемости линейных систем*. Этот критерий в вычислительном отношении существенно проще известного матричного критерия Р. Калмана.

Таким образом, будем считать, что наблюдатель S_N вычислен и его можно подставлять в (4.3). Однако предварительно необходимо проверить S_N на соответствие условиям наблюдаемости (4.2):

- вычисляем S_N^{-1}

$$G = e_Z S_N^{-1} = S_N^{-1} \to S_N^{-1} = G\,; \tag{4.6}$$

- вычисляем и проверяем

$$e_Z^{прав} = S_N^{-1} S_N = GG^{-1} = e_Z \to \text{ единичная матрица;} \tag{4.7}$$

- вычисляем и проверяем

$$e_X^{лев} = G^{-1}G = S_N S_N^{-1} = e_X^{прав} = e_X\,, \tag{4.8}$$

$$e_X e_X = e_X\,. \tag{4.9}$$

Понятно, что (4.6) и (4.7) в силу (4.4) выполняются автоматически, так как по этому критерию мы и вычисляли наблюдатель. В качестве проверочных остаются равенства (4.8), (4.9), отвечающие второму уравнению в (4.2). Если (4.8), (4.9) удовлетворяются, то задача построения наблюдателя (4.3) решена.

Пример. В качестве примера продолжим рассматривать объект (1.8), для которого мы уже синтезировали регулятор в 1-й главе этого раздела, а именно:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -1{,}14 \\ 1 & -0{,}62 \end{bmatrix}; \quad H = \left[h_{11} \vdots 0\right] = \left[1 \vdots 0\right],$$

$$\Phi = (pI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} (p-a_{11}) & -a_{12} \\ -a_{21} & (p-a_{22}) \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} (p-a_{22}) & a_{12} \\ a_{21} & (p-a_{11}) \end{bmatrix}, \tag{4.10}$$

$$\Delta = (p-a_{11})(p-a_{22}) - a_{21}a_{12}\ . \tag{4.11}$$

Как следует из (4.10), (4.11) и (4.1), непосредственно измеряемой является компонента $x_1 = z$ вектора *X*. Оцениванию-наблюдению подлежит компонента x_2. В соответствии с (4.4), (4.10) и рис. 4.2:

$$G = H\Phi = [1 \vdots 0]\begin{bmatrix} \frac{(p-a_{22})}{\Delta} & \frac{a_{12}}{\Delta} \\ \frac{a_{21}}{\Delta} & \frac{(p-a_{11})}{\Delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(p-a_{22})}{\Delta} & \frac{a_{12}}{\Delta} \end{bmatrix}, \tag{4.12}$$

$$GG^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{(p-a_{22})}{\Delta} & \frac{a_{12}}{\Delta} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} = 1, \tag{4.13}$$

$$l_1 \frac{(p-a_{22})}{\Delta} + l_2 \frac{a_{12}}{\Delta} = 1. \tag{4.14}$$

Таким образом, $G^{-1} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}$, то есть определяется двумя параметрами, где в соответствии с (4.14) один параметр можно выразить через второй. Как видно из (4.14), $l_2 = (\Delta - l_1(p-a_{22}))a_{12}^{-1}$.

Тогда:

$$G^{-1} = \begin{bmatrix} l_1 \\ (\Delta - l_1(p-a_{22}))a_{12}^{-1} \end{bmatrix}. \tag{4.15}$$

В соответствии с (4.5) получим

$$S_N = G^{-1}e_Z = G^{-1} = \begin{bmatrix} l_1 \\ (\Delta - l_1(p-a_{22}))a_{12}^{-1} \end{bmatrix}. \tag{4.16}$$

Таким образом, наблюдатель определяется по формуле (4.16). Наблюдатель является единственным с точностью до класса, обусловленного возможностью выбора переменной l_1. Из (4.3) имеем:

$$X_0 = S_N Z = \langle Z = [z] = [x_1] \rangle = \begin{bmatrix} l_1 x_1 \\ (\Delta - l_1(p-a_{22}))a_{12}^{-1}x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix}. \tag{4.17}$$

Как видно из (4.17), l_1 можно определить однозначно по известным x_{01} (измеритель этой компоненты есть и в самом начале процесса наблюдения) и x_1

$$l_1 x_1 = x_{01} \Rightarrow l_1 = x_{01}(x_1)^{-1}. \tag{4.18}$$

Тогда неизвестное x_{02} оценивается по формуле:

$$x_{02} = (\Delta - l_1(p-a_{22}))a_{12}^{-1}x_1 = \frac{\Delta \cdot x_1}{a_{12}} - \frac{(p-a_{22})}{a_{12}}x_{01}. \tag{4.19}$$

Окончательно уравнение наблюдения-оценивания для x_{02} имеет вид

$$x_{02} = \frac{\Delta}{a_{12}} z - \frac{(p - a_{22})}{a_{12}} x_{01}, \tag{4.20}$$

где z – измерение, поступающее с датчика, x_{02} - оценка неизвестного состояния x_{02}. Таким образом, из (4.18) l_1 определяется однозначно и из (4.16) и (4.19) получаем окончательное выражение для единственного векторного наблюдателя:

$$S_N = \begin{bmatrix} l_1 \\ (\Delta - l_1(p - a_{22}))a_{12}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{01}(x_1)^{-1} \\ (\Delta - x_{01}(x_1)^{-1}(p - a_{22}))a_{12}^{-1} \end{bmatrix}. \tag{4.21}$$

Оценивание вектора X_0 осуществляется по формуле (4.17):

$$\begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{01}(z)^{-1} \\ (\Delta - x_{01}(z)^{-1}(p - a_{22}))a_{12}^{-1} \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} x_{01} \\ \Delta \cdot a_{12}^{-1} \cdot z - x_{01}(p - a_{22}))a_{12}^{-1} \end{bmatrix}. \tag{4.22}$$

Проверим по формулам (4.6)-(4.9) правильность вычисления S_N. Из (4.6) и (4.12) следует:

$$S_N^{-1} = G = \begin{bmatrix} \frac{(p - a_{22})}{\Delta} \vdots \frac{a_{12}}{\Delta} \end{bmatrix}. \tag{4.23}$$

Из (4.7) с учетом (4.16) и (4.23) следует, что

$$e_Z^{прав} = S_N^{-1} S_N = \begin{bmatrix} \frac{(p - a_{22})}{\Delta} \vdots \frac{a_{12}}{\Delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \\ (\Delta - l_1(p - a_{22}))a_{12}^{-1} \end{bmatrix} = 1.$$

Аналогично, проверяя (4.13) с учетом (4.23) и (4.16), непосредственной подстановкой можно убедиться, что $GG^{-1} = 1$, то есть требуемое равенство выполняется. Далее, из (4.8) с учетом (4.15) и (4.12) следует, что

$$e_x^{лев} = G^{-1}G = \begin{bmatrix} l_1 \\ (\Delta - l_1(p - a_{22}))a_{12}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{(p - a_{22})}{\Delta} \vdots \frac{a_{12}}{\Delta} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} l_1 \frac{(p - a_{22})}{\Delta} & l_1 \frac{a_{12}}{\Delta} \\ \frac{(p - a_{22})}{\Delta}(\Delta - l_1(p - a_{22}))a_{12}^{-1} & \vdots (\Delta - l_1(p - a_{22}))\frac{1}{\Delta} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} l_1(p - a_{22}) & l_1 a_{12} \\ (p - a_{22})(\Delta - l_1(p - a_{22}))a_{12}^{-1} & \vdots \Delta - l_1(p - a_{22}) \end{bmatrix}. \tag{4.24}$$

Из (4.5), (4.6), (4.8) ясно, что $e_x^{лев} = e_x^{прав} = e_x$. Из (4.24) вычислим определитель для e_x :

$$\det e_x = \frac{1}{\Delta}\left[l_1(p-a_{22})(\Delta - l_1(p-a_{22})) - (p-a_{22})(\Delta - l_1(p-a_{22}))a_{12}^{-1}a_{12}l_1 \right] =$$

$$= \frac{1}{\Delta}\left[l_1(p-a_{22})(\Delta - l_1(p-a_{22})) - l_1(p-a_{22})(\Delta - l_1(p-a_{22})) \right] = 0.$$

Таким образом, как и в случае определения регулятора, $\det e_x = 0$, то есть e_x *в соответствии с нашей терминологией является необыкновенным изоморфизмом*. Сравнение (4.24) с (1.20) показывает, что единицы e_x на *X* в задачах наблюдения и регулирования одного и того же объекта практически одинаковы по структуре. Мы убедились: в случае наблюдателя на расширенном (по сравнению с *Z*) состоянии *X*, то есть *при* $m < n$, *для единицы* e_x *справедливо утверждение о том, что применительно к определителю должно выполняться равенство* $\det e_x = 0$. Доказательство утверждения для общего случая, как и ранее в случае регулятора, оставим за рамками этого исследования. Главное, что нас интересует, несмотря на равенство $\det e_x = 0$, все условия на единицу e_x выполняются: *единица* e_x *является тождественным изоморфным отображением на X внутри коммутативной диаграммы*, представленной на рис. 4.2, то есть *является изоморфизмом с точностью до изоморфизма* e_Z, который является первичным в этой диаграмме – с точностью до этого безусловного изоморфизма в коммутативной диаграмме «измеряются» все другие отображения-морфизмы. Изоморфизм e_Z имеет наименьший размер в сравнении со всеми отображениями в диаграмме.

В частности проверим выполнение условия (4.9) на e_x: $e_x e_x = e_x$. С учетом (4.24) можно убедиться, что:

$$\frac{1}{\Delta}\cdot\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} l_1(p-a_{22}) & l_1 a_{12} \\ (p-a_{22})(\Delta - l_1(p-a_{22}))a_{12}^{-1} & \vdots \Delta - l_1(p-a_{22}) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} l_1(p-a_{22}) & l_1 a_{12} \\ (p-a_{22})(\Delta - l_1(p-a_{22}))a_{12}^{-1} & \vdots \Delta - l_1(p-a_{22}) \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\Delta}\cdot\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} \Delta\cdot l_1(p-a_{22}) & \Delta\cdot l_1 a_{12} \\ \Delta\cdot(p-a_{22})(\Delta - l_1(p-a_{22}))a_{12}^{-1} & \vdots \Delta\cdot(\Delta - l_1(p-a_{22})) \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} l_1(p-a_{22}) & l_1 a_{12} \\ (p-a_{22})(\Delta - l_1(p-a_{22}))a_{12}^{-1} & \vdots \Delta - l_1(p-a_{22}) \end{bmatrix}.$$

Таким образом, $e_x e_x = e_x$ - тождественное отображение-изоморфизм на *X*. Следовательно, все условия (4.6) – (4.9) выполняются, поверка завершена. Наблюдатель и уравнение наблюдения в векторной форме имеют вид (4.21), (4.22), в скалярной – (4.20). Как и в известных наблюдателях, обновляющая последовательность в рассматриваемом изоморфном наблюдателе формируется поступающими от датчиков измерениями.

Если, как это часто бывает на практике, оценивать нужно не начальное состояние x_{02}, а близкое к текущему моменту времени *t*, то есть при $t_0 \to t$, состояние x_2 при достаточно малом шаге оценивания $\Delta t \to 0$, то уравнение (4.20) приобретет вид

$$x_2 = \frac{\Delta}{a_{12}} z - \frac{(p - a_{22})}{a_{12}} x_1 = \langle z = x_1 \rangle = (\Delta - (p - a_{22}))a_{12}^{-1} \cdot z, \tag{4.25}$$

а уравнения (4.21) и (4.22), соответственно, вид

$$S_N = \begin{bmatrix} 1 \\ (\Delta - (p - a_{22}))a_{12}^{-1} \end{bmatrix}, \tag{4.26}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(z)^{-1} \\ (\Delta - x_1(z)^{-1}(p - a_{22}))a_{12}^{-1} \end{bmatrix} z = \langle z = x_1 \rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ (\Delta - (p - a_{22}))a_{12}^{-1} \end{bmatrix} z \quad . \tag{4.27}$$

В этом случае, как видно из сравнений (4.21) и (4.26), структура наблюдателя (4.26) от начального условия x_{01} и от текущего состояния x_1 уже не зависит и может быть вычислена один раз и в дальнейшем применяться как неизменная.

Рассмотренный пример и соответствующий объект мы продолжим анализировать и ниже. Здесь отметим лишь, что *возможны различные варианты постановок задач наблюдения и фильтрации сигналов по информации датчиков*, непосредственно воспринимающих некоторые или все компоненты вектора состояния на выходе объекта:

1) *в случае* $m < n$ рассмотренную нами задачу собственно и *называют задачей наблюдения*. Как и в случае регулятора, путем понижения порядка модели эта задача для наблюдаемого объекта может быть сведена к случаю $m = n$. Возможность приведения задачи к случаю $m = n$ может служить еще одним простым критерием наблюдаемости. При $m = n$ число измерителей равно числу компонент вектора состояния, но измерители могут непосредственно воспринимать информацию не о самих компонентах, а о каких-либо их комбинациях, то есть задача наблюдения компонент в этом случае не снимается, а в условиях шумов, воздействующих на объект и на датчики, в общем случае добавляется задача фильтрации шумов. При $m = n$ для синтеза наблюдателя, как и в случае с синтезом регулятора, может использоваться коммутативная диаграмма, показанная на рис. 4.1, построенная на обыкновенном тождественном изоморфизме e_X, так как в этом

случае его размер не больше размера изоморфизма e_Z и он является обычной единичной матрицей;

2) *в случае* $m > n$, когда число измерителей заведомо больше числа компонент вектора состояния, соответствующая *задача имеет специальное название «задачи коррекции»*. Так как $m > n$, то вполне понятно, что при ее решении должна использоваться коммутативная диаграмма, показанная на рис. 4.1, в которой обыкновенный тождественный изоморфизм e_X является единичной матрицей. *Смысл постановки и решения задачи коррекции состоит в повышении точности определения компонент вектора состояния объекта и в фильтрации шумов*. Указанные задачи на примерах рассмотрим ниже.

4.3. Особенности синтеза наблюдателей для нелинейных объектов

Критерий (4.4) с проверочными соотношениями (4.2) является критерием наблюдаемости и для нелинейных объектов: если для некоторой нелинейной передаточной функции объекта наблюдения G от начального состояния X_0 к вектору измерений Z существует (может быть построена) обратная функция-отображение G^{-1}, то рассматриваемый нелинейный объект наблюдаем.

В общем случае нелинейная передаточная функция объекта наблюдения G может быть и вообще неизвестна. В этом случае наблюдатель, отвечающий равенствам (4.5) и (4.4), если он существует, может быть аппроксимирован искусственной нейронной сетью, то есть реализован в форме искусственной нейронной сети, структура $S_N = G^{-1}$ и параметры которой могут быть оптимизированы по результатам обучения в соответствии с критерием (4.4). Для этого известный вектор измерений (из обучающей выборки, отвечающей некоторому множеству моментов времени) нужно подавать на вход нейронной сети и формировать на ее выходе вектор отклика X_0^* (для указанного множества моментов времени). Полученный вектор отклика сети X_0^* необходимо подавать на вход объекта наблюдения и формировать на его выходе новый вектор измерений Z^* (для того же множества моментов времени). Изменяя (оптимизируя) структуру и параметры искусственной нейронной сети, можно добиться совпадения с наперед заданной точностью векторов Z из обучающей выборки с новыми векторами измерений Z^*, формируемыми в совокупности сетью и объектом наблюдения, то есть композицией (4.5), (4.4), на выходе объекта - на выходе датчиков. Если наблюдатель существует, то в результате обучения будет сформирована искусственная нейронная сеть $S_N = G^{-1}$, реализующая на обучающей выборке с заданной точностью тождество $Z^* \equiv Z$. Указанную сеть можно использовать в качестве наблюдателя, в

том числе и на других интервалах времени, если известно, что параметры объекта достаточно стабильны. Если наблюдатель не существует, то сеть, удовлетворяющую условию $Z^* \equiv Z$, а значит и условиям (4.5), (4.4), построить не удастся.

В случае, если каким-либо образом удастся построить модель нелинейного объекта, то построение наблюдателя существенно упрощается. Пусть рассматривается объект вида

$$\dot{X} = F_1(X,U),\ X_0,\ X \subset R^n, U \subset R^r, \tag{4.28}$$

с измерителем

$$Z = H_1(X), Z \subset R^m. \tag{4.29}$$

Под объектом понимается некоторая «отграниченная» часть объективной реальности (действительности), для которой удается построить модель (4.28), характеризующую, как правило, более сильную связность компонент вектора $X = [x_1, x_2, ..., x_n]^T$ между собой посредством функции $F_1(X,U)$, где U – некоторый известный вектор управлений, чем с какими-либо воздействиями внешней среды. Под «внешней средой» понимается часть объективной реальности, находящаяся за «границами» модели (4.28).

«Измеритель» (4.29) характеризует возможность непосредственного восприятия (считывания) только некоторых компонент вектора X или их комбинаций посредством специальных технических устройств, называемых «датчиками» или «сенсорами». Функция восприятия $H_1(X)$, называемая «измерительной характеристикой» датчиков, имеет, как правило (в общем случае), нелинейный характер. Часто путем специальных приемов конструирования ее пытаются максимально приблизить к линейному виду. Иногда это удается, но чаще в $H_1(X)$, остаются некие нелинейности. Более того, в общем случае реальные функции, характеризующие «нелинейности» объекта и измерителя весьма сложны и, как правило, неизвестны.

Для их установления проводят специальную классическую процедуру идентификации [19-21], задачей которой является выбор по некоторым критериям подходящей замены неизвестным реальным функциям известными функциями-аппроксиматорами соответственно вида $F_1(X,U)$ для объекта и $H_1(X)$, для измерителя.

Возможны различные приемы и методы идентификации указанных функций. Выше мы отмечали, что в качестве одного из возможных формализмов для построения аппроксиматоров могут применяться искусственные нейронные сети. Здесь на приемах и методах идентификации и аппроксимации моделей останавливаться не будем. Будем считать, что процедура идентификации проведена, аппроксимирующие функции и соответствующие модели объекта (4.28) и измерителя (4.29) построены и далее будем ими оперировать, считая модели известными.

В силу того, что, как указывалось, измеритель позволяет непосредственно «считывать» только часть компонент вектора X или их комбинаций, ставится задача построения (синтеза) «наблюдателя» - некоторого алгоритма, который по показаниям Z измерителя позволял бы восстанавливать полный вектор X.

Практика показала, что даже при известных, но нелинейных функциях $F_1(X,U)$ и $H_1(X)$ задача синтеза наблюдателя в исходной постановке часто нерешаема. Для разрешимости задачи прибегают к различным ее упрощениям и редукциям. Одной из наиболее распространенных редукцией является «линеаризация» задачи, в ходе которой известные аппроксимирующие зависимости $F_1(X,U)$ и $H_1(X)$ дополнительно упрощают путем построения их линейных приближений различного порядка.

Рассмотрим этот инженерно-математический прием более подробно. При этом ограничимся линейными приближениями первого порядка. Кроме того, в силу известности вектора U, исключим его из модели (4.28), так как на построение наблюдателя наличие, либо отсутствие U, непосредственно не влияет. Вместе с тем не будем забывать, что варьирование вектора управления U влияет на траекторию вектора X, то есть на характер изменения X во времени. Причем на некоторых траекториях не все компоненты вектора X могут быть наблюдаемы даже если наблюдатель построен. В этом случае путем введения вектора U в модель (4.28) можно подбирать или выявлять такие траектории объекта (4.28), на которых наблюдаемость всех компонент X, то есть возможность восстановления в реальном времени их истинных значений с требуемой точностью, будет обеспечена.

С учетом отмеченного замечания, относящегося к вектору управлений U, в качестве исходных будем рассматривать уравнение объекта

$$\dot{X} = F(X),\ X_0,\ X \subset R^n \qquad (4.30)$$

и уравнение измерителя (4.29). В уравнении (4.30) для функциональной зависимости в правой части использовали новое обозначение F. К уравнению (4.30) можно применить обычную процедуру линеаризации F вблизи некоторого «опорного движения», ограничившись первым членом разложения F в ряд Тейлора:

$$\dot{X}_{оп} + \triangle\dot{X} = F(X_{оп}) + \frac{\partial F(X)}{\partial X}\Big|_{X_{оп}} \cdot \triangle X. \tag{4.31}$$

Вычитая из (4.31) известное опорное движение $\dot{X}_{оп} = F(X_{оп})$ и вводя для матрицы Якоби $\frac{\partial F(X)}{\partial X}\Big|_{X_{оп}}$ обозначение

$$A = \frac{\partial F(X)}{\partial X}\Big|_{X_{оп}}, \tag{4.32}$$

получим

$$\triangle\dot{X} = A \cdot \triangle X,\ \triangle X_0,\ \triangle X \subset R^n. \tag{4.33}$$

Проводя аналогичные преобразования для (4.29), получим

$$\triangle Z = H \cdot \triangle X, \tag{4.34}$$

где

$$H = \frac{\partial H_1(X)}{\partial X}\Big|_{X_{оп}}. \tag{4.35}$$

В задачах синтеза наблюдателя знак «$\triangle$» для приращений соответствующих векторов при записи уравнений объекта и измерений часто опускают, не забывая о том, что имеют дело именно с приращениями. С учетом этого замечания окончательно в качестве исходных в задаче синтеза наблюдателя для нелинейного объекта будем использовать уравнения (4.31) - (4.35) в форме

$$\begin{aligned} &\dot{X} = AX,\ X_0,\ X \subset R^n \\ &Z = HX,\ Z \subset R^m \end{aligned}. \tag{4.36}$$

При этом матрицы Якоби (4.32) и (4.35) по завершении очередного цикла оценивания периодически обновляют применительно к новым опорным движениям. После обновления матриц A и H цикл оценивания повторяют.

Отметим, что большинство из известных наблюдателей и «фильтров», в том числе широко применяемый фильтр Калмана, разработаны применительно к исходным уравнениям вида (4.36). В случае «фильтров» уравнения (4.36) дополняются простыми моделями «шумов», воздействующих на объект и векторный измеритель. Однако по сути это ничего не меняет. В любом случае наблюдатель или более общий «фильтр» строится с точностью до той или иной модели объекта и измерителя. Таким образом, при использовании процедуры линеаризации задача построения наблюдателя для нелинейного объекта свелась к существенно более простой задаче наблюдения состояния линейного объекта. Эту задачу далее и будем анализировать более подробно.

4.4. Технология синтеза линейных изоморфных наблюдателей

Продолжим обсуждение технологии синтеза линейных изоморфных наблюдателей при различных соотношениях m и n. Итак, рассматривается линейный динамический объект

$$\begin{aligned} &\dot{X} = AX,\ X(0) = X_0, \\ &Z = HX,\ X \subset R^n,\ Z \subset R^m, \end{aligned} \tag{4.37}$$

имеющий *при ненулевых начальных условиях* вид в форме Лапласа

$$\begin{cases} X(p) = \Phi X(0), \\ Z(p) = HX(p), \end{cases} \tag{4.38}$$

где $\Phi(p)=(pI-A)^{-1}$ – фундаментальная матрица, I – единичная матрица, $Z(p)$ – вектор непосредственно доступных измерений. Задача состоит в оценивании вектора $X(0)=X_0$ [1, 2].

В параграфе 4.2 мы рассмотрели метод построения наблюдателя для линейного объекта в случае $m<n$. Критерием наблюдаемости в этом случае является равенство (4.4). Если оно разрешимо относительно наблюдателя (4.5), либо уравнения модели объекта вида (4.1), (4.37), (4.38) путем понижения порядка приводимы к случаю $m=n$, то объект наблюдаем.

Пусть объект наблюдаем и его уравнения приведены к виду $m \geq n$. Фундаментальная матрица $\Phi(p)$ линейного динамического объекта всегда имеет обратную, то есть является обычным изоморфизмом. Если (4.38) наблюдаем, то при $m \geq n$ существует коммутативная диаграмма [12-17], показанная на рис. 4.3, аналогичная диаграмме, представленной на рис. 4.1, в которой наблюдатель S_N определяется по формуле (4.5)

$$S_N = G^{-1} = \Phi^{-1}(p)H^{-1} = (pI-A)H^{-1}. \tag{4.39}$$

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r, "\Phi"] & X \arrow[r, "H"] & Z \arrow[ll, bend left, "S_N"] \end{tikzcd}$$

Рис. 4.3. Композиция отображений для наблюдаемой линейной системы

В отличие от известных наблюдателей, наблюдатели типа (4.39) *в работах* [12-17] *и здесь в книге мы называем изоморфными*, так как в рамках коммутативной диаграммы они устанавливают взаимно-однозначное соответствие между Z и X_0 с точностью до изоморфизма Ф. В [12-17] и в ряде глав 1-й части книги показано, что для наблюдаемого объекта при условии выполнения композиции соответствующих отображений всегда существуют обратные $(S_N)^{-1}$ и H^{-1}, даже если исходные матрицы прямоугольные и вне диаграммы необратимы.

Потребуем, чтобы формируемое на выходе наблюдателя значение $\tilde{X}_0$ удовлетворяло условию $\tilde{X}_0 \equiv X_0$. Во входном сигнале X_0, а соответственно и в сигнале $\tilde{X}_0$ возможно присутствие шумов. Их фильтрацию будем осуществлять фильтром с передаточной функцией W_Φ, выбираемым, например, с учётом инженерных критериев качества [18]. Уравнения (4.37), (4.38) с учётом фильтра приобретут вид

$$\begin{aligned} &X(p) = \Phi X_0, \\ &Z(p) = HX(p), \\ &\tilde{X}_0(p) = S_N Z(p), \\ &\hat{X}(p) = W_\Phi \tilde{X}_0(p), \end{aligned} \tag{4.40}$$

где, в общем случае, W_Φ определяется по формуле $W_\Phi = (pI-C)^{-1}D$ или, в простейшем случае, при $\hat{X}_0 \equiv \tilde{X}_0$, – по формуле $W_\Phi = I$, где I – единичная матрица, C и D – матрицы, характеризующие параметры фильтра. На рис. 4.4 показана диаграмма, полученная из рис. 4.3, с учётом (4.40). Как видно из рис. 4.4, выражение (4.39) преобразуется к виду

$$S_N = I\Phi^{-1}(p)H^{-1} = (pI-A)H^{-1}, \quad (S_N)^{-1} = H\Phi(p)I = H\Phi(p) = H(pI-A)^{-1}, \tag{4.41}$$

где $(S_N)^{-1}$ и H^{-1} должны удовлетворять условиям:

$$\begin{aligned} &I_{X_0}^{лев} = S_N (S_N)^{-1}, \; I_{X_0}^{прав} = \Phi^{-1}\Phi, \; I_{X_0}^{лев} = I_{X_0}^{прав} = I, \\ &I_Z^{лев} = H H^{-1}, \; I_Z^{прав} = (S_N)^{-1} S_N, \; I_Z^{лев} = I_Z^{прав} = I_Z, \; I_Z I_Z = I_Z, \; I_Z = (I_Z)^{-1}. \end{aligned} \tag{4.42}$$

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r, "\Phi"] \arrow[rrr, bend right, "I"'] & X \arrow[r, "H"] & Z \arrow[r, "S_N"] & \tilde{X}_0 \arrow[r, "W_\Phi"] & \hat{X}_0 \end{tikzcd}$$

Рис. 4.4. Композиция отображений для наблюдения и фильтрации входного сигнала

Здесь $I_{X_0}^{лев}$, $I_{X_0}^{прав}$ – левая и правая единицы на множестве $\tilde{X}_0 \equiv X_0$, $I_Z^{лев}$ и $I_Z^{прав}$ – левая и правая единицы на Z. В данном случае единица на $\tilde{X}_0 \equiv X_0$ равна единичной матрице I. В общем случае при $m > n$ $I_Z^{лев}$ и $I_Z^{прав}$ могут быть неединичными в обычном смысле матрицами, но такими, что выполняется (4.42). Уравнения (4.41) и (4.42) позволяют определить изоморфный с точностью до изоморфизма Ф наблюдатель S_N, для которого существует $(S_N)^{-1}$.

Если модель (4.38) точно соответствует объекту (под объектом понимаем объект наблюдения вместе с множеством датчиков), то контур наблюдения с обратной связью (ОС) в форме наблюдателя S_N (см. рис. 4.3, 4.4) приобретает простую «линейную» форму, приведенную на рис. 4.5, которая, с учетом (4.41), принимает вид, показанный на рис. 4.6, 4.7.

$$X_0 \xrightarrow{\Phi} X \xrightarrow{H} Z \xrightarrow{S_N} \tilde{X}_0 \xrightarrow{W_\Phi} \hat{X}_0$$

Рис. 4.5. «Линейный» контур с изоморфным наблюдателем

$$X_0 \xrightarrow{(S_N)^{-1}} Z \xrightarrow{S_N} \tilde{X}_0 \xrightarrow{W_\Phi} \hat{X}_0$$

Рис. 4.6. «Линейный» контур с предельно достижимым качеством наблюдения и фильтрации

$$X_0 \xrightarrow{\text{Объект}} Z \xrightarrow{S_N} \tilde{X}_0 \xrightarrow{W_\Phi} \hat{X}_0$$

Рис. 4.7. «Линейный» контур наблюдения состояния объекта

Такой «линейный» контур реализует условие $S_N(S_N)^{-1}=I$ точного слежения $\tilde{X}_0 \equiv X_0$ в любой момент времени. Это условие характеризует наличие *неявной ОС* от $\tilde{X}_0$ к X_0 в форме обыкновенного изоморфизма $I=S_N(S_N)^{-1}$. Но поскольку ОС неявная, «линейный» контур является физически разомкнутым. В разомкнутом, «линейном» контуре наличие и структура ОС от Z к X_0 «зашифрованы» в наблюдателе S_N, позволяющем по показаниям датчиков Z мгновенно, полно и точно восстанавливать (наблюдать) состояние X_0, а значит и состояние X в текущий момент времени t при $t_0 \to t$. В отличие от известных наблюдателей с

сумматорами в контурах наблюдения за состоянием X_0, наблюдатель S_N является *мультипликативным*, так как в соответствии с (4.41) требует лишь перемножения матриц, присутствующих в «линейном» контуре.

Как видно из рис. 4.6, результат наблюдения X_0 полностью и с абсолютной точностью определяется лишь выбором фильтра W_Φ, так как $\hat{X}_0 = W_\Phi S_N (S_N)^{-1} X_0 = W_\Phi I X_0 = W_\Phi X_0$. Следовательно, если *наблюдатель* синтезирован правильно, то он *полно и точно компенсирует динамику объекта* и в идеале *фильтр от него не зависит и может быть сформирован под заданные требования к качеству фильтрации*. В этом смысле изоморфный наблюдатель является предельным по качеству наблюдения и фильтрации сигнала X_0. Практически, в общем случае, следует рассматривать фильтры типа $W_\Phi=(pI-C)^{-1}D$ [18], которые вместе с S_N образуют физически реализуемые структуры наблюдения и фильтрации сигналов.

После построения «линейного» контура нужно путём моделирования исследовать его на робастность, варьируя параметры матриц Ф и *H*. В случае существенных отличий объекта от модели (4.38), (4.40), использованной при синтезе наблюдателя, результат моделирования может оказаться неудовлетворительным. Тогда «линейный», разомкнутый по X_0 контур нужно охватить явной ОС, как показано на рис. 4.8.

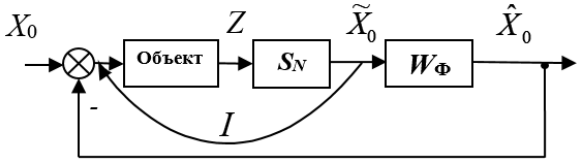


Рис. 4.8 Робастный контур наблюдения

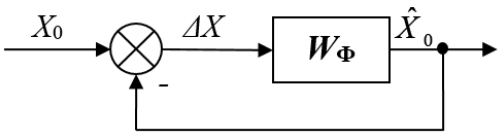


Рис. 4.9. Робастный контур для модели, адекватной объекту

Для модели (4.40), адекватной объекту, передаточная функция «объект-наблюдатель» от X_0 к $\tilde{X}_0$ близка к единичной $W_{OH} \approx I$ и замкнутый контур от X_0 к $\hat{X}_0$ (см. рис. 4.8) примет вид, показанный на рис. 4.9, с передаточной функцией $W=W_\Phi(I+W_\Phi)^{-1}$. *То есть характеристики замкнутого робастного контура наблюдения, как и разомкнутого «линейного», будут определяться лишь структурой фильтра*.

Таким образом, в параграфах 4.2-4.4 рассмотрены особенности технологии синтеза изоморфных наблюдателей при различных соотношениях порядков n и m уравнений динамики объекта и измерений, а также особенности синтеза изоморфных наблюдателей для нелинейных объектов.

4.5. Примеры синтеза и исследования изоморфных наблюдателей

Основные элементы технологии синтеза линейных изоморфных наблюдателей более детально продемонстрируем на примерах.

Пример 1. В качестве примера рассмотрим объект (4.40) с одним входом и одним выходом, единственный сигнал которого доступен для измерения и, таким образом, нужно решать лишь задачу его фильтрации. Такая тривиальная задача на самом деле имеет практический смысл именно как задача фильтрации. При этом возможны ошибки измерения из-за отклонений параметров матриц Ф и H от расчетных значений. Тогда, например, при $W_{\Phi} = k_{\Phi}(T_{\Phi} p + 1)^{-1}$ и малых отклонениях параметров получим передаточную функцию замкнутого контура фильтрации

$$W = \frac{k_{\Phi}}{T_{\Phi} p + 1 + k_{\Phi}} = \frac{k_{\Phi}}{(1 + k_{\Phi})\left[\frac{T_{\Phi}}{(1 + k_{\Phi})} p + 1\right]} \approx \frac{1}{T_{\Phi}^{*} p + 1}, \tag{4.43}$$

где $T_{\Phi}^{*} = \frac{T_{\Phi}}{(1 + k_{\Phi})}$, которая при достаточно большом k_{Φ} обеспечивает астатизм по наблюдаемой и фильтруемой координате. При этом T_{Φ}^{*} в $(1 + k_{\Phi})$ раз меньше T_{Φ} и время переходного процесса в замкнутом робастном контуре по сравнению с «линейным» резко сокращается, что может ухудшить устойчивость процессов наблюдения и фильтрации. Для обеспечения прежнего времени переходного процесса в робастном контуре одновременно с увеличением k_{Φ} нужно в $(1 + k_{\Phi})$ раз увеличить и постоянную T_{Φ} в W_{Φ}, то есть $W_{\Phi} = k_{\Phi}(T_{\Phi}(1 + k_{\Phi}) p + 1)^{-1}$, где T_{Φ} - прежняя (до введения дополнительной ОС и увеличения k_{Φ}) постоянная времени. Тогда передаточная функция замкнутого контура, показанного на рис. 4.9, приобретёт вид

$$W = \frac{k_{\Phi}}{T_{\Phi}(1 + k_{\Phi}) p + 1 + k_{\Phi}} = \frac{k_{\Phi}}{(1 + k_{\Phi})(T_{\Phi} p + 1)} \approx \frac{1}{T_{\Phi} p + 1} \tag{4.44}$$

и при большом k_{Φ} будет практически точно соответствовать функции исходного контура без дополнительной ОС.

Итак, рассмотрим объект (4.38) для скалярного случая, когда $A=[a_{11}]$ и $H=[h_{11}]$,

$$\begin{cases} x_1(p) = (p - a_{11})^{-1} x_{10} \\ z(p) = h_{11} x_1(p), \end{cases}$$

то есть решается задача наблюдения и фильтрации компоненты x_{10}. Передаточная функция объекта имеет вид $W_O = h_{11}(p - a_{11})^{-1}$ и согласно (4.39), (4.41) наблюдатель определяется формулой

$$S_N = \Phi^{-1}(p)H^{-1} = (p - a_{11})h_{11}^{-1} = W_O^{-1}.$$

Таким образом, *для SISO-объектов* (*с одним входом и одним выходом*) *синтез наблюдателя сводится к обращению передаточной функции объекта*. К аналогичному выводу мы пришли ранее при синтезе регулятора для SISO-объектов. В соответствии с рис. 4.5 - 4.7 передаточная функция «объект-наблюдатель» $W_{OH} \approx 1$ и качество фильтрации сигнала x_{10} определяется выбором фильтра – см. рис. 4.7 - 4.9. На рис. 4.10 показаны переходные процессы в разомкнутом контуре (см. рис. 4.7) для ступенчатого входного сигнала (график 1) при $a_{11} = -4$, $h_{11} = 1$, $W_\Phi = k_\Phi(T_\Phi p + 1)^{-1}$, $k_\Phi = 1$, $T_\Phi = 0{,}4$ для случаев совпадения параметров объекта и модели (график 2) и отличия параметра h_{11} в объекте от принятого его значения в модели (на +30% - график 3, на +20% - график 4, на +10% - график 5, на -10% - график 6, на -20% - график 7, на -30% - график 8,), а также для случаев замыкания «линейного контура» реальной ОС, как показано на рис. 4.8-4.9, при варьировании h_{11} и при увеличении k_Φ до $k_\Phi = 999$ и T_Φ до $T_\Phi = 0{,}4 \times 1000 = 400$ в соответствии с (4.43) и (4.44) - график 2.

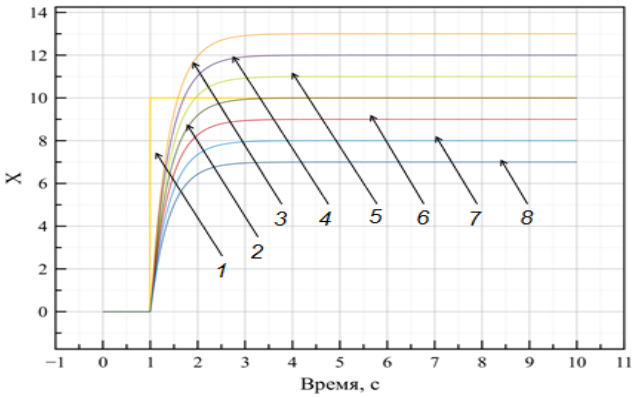


Рис. 4.10. Моделирование контура наблюдения при варьировании a_{11}

Видно, что качество оценивания в замкнутом, робастном контуре такое же идеальное (статическая ошибка отсутствует), как и в разомкнутом контуре при совпадении параметров модели и реального объекта. Качественно аналогичный вид имеют графики и при варьировании a_{11}. То есть, замкнутый реальной ОС контур становится робастным в отношении параметрических возмущений в структуре объекта.

Пример 2. Вернемся к рассмотрению случая $m<n$, то есть к задаче одновременного наблюдения (оценивания) и фильтрации сигналов, поступающих на входы объекта, лишь один из выходов которого доступен для измерения. Будем рассматривать прежний объект (4.1), (4.10), но с моделью в иной форме. Пусть в модели (4.37), (4.38)

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -4 & -1{,}14 \\ 1 & -0{,}62 \end{bmatrix},\ \mathrm{H}=\begin{bmatrix} h_{11} & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (4.45)$$

Отметим, что, как и при использовании других наблюдателей, изоморфный наблюдатель можно синтезировать в непрерывной, либо в дискретной форме. Например, для перехода к дискретной форме записи достаточно провести несложные преобразования модели объекта: запишем (4.38) в дискретной (разностной) форме с учетом того, что состояния объекта (4.37) определяются в дискретные моменты времени t_k (k=1,2…) с постоянным шагом по времени $T_x= t_k - t_{k-1}$. Тогда уравнение (4.37) в дискретной форме получит вид:

$$X_{k+1} = F(X_k,T_x)X_k,$$

$$Z_{k+1} = HX_{k+1},$$

где $F(X_k,T_x)$ – переходная матрица уравнения (4.37), определяемая по формуле [22]:

$$F(X_k,T_x) = e^{ATx} \approx E+AT_x\ .$$

Так, если матрицы в модели (4.38) заданы в виде (4.45), то

$$F(X_k,T_x)=e^{AT_x}\cong E+AT_x=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}T_x=\begin{bmatrix} (1+a_{11}T_x) & a_{12}T_x \\ a_{21}T_x & (1+a_{22}T_x) \end{bmatrix}.$$

Дальнейшие действия в случае дискреной модели ничем не отличаются от использования модели в непрерывной форме, поэтому продолжим дальнейшие рассуждения применительно к непрерывной форме модели объекта. Запишем (4.38) с учетом (4.45) в скалярном виде

$$\begin{cases} x_1 = (p - a_{11})^{-1} a_{12} x_2 + (p - a_{11})^{-1} x_{10}, \\ x_2 = (p - a_{22})^{-1} a_{21} x_1 + (p - a_{22})^{-1} x_{20}, \\ z = h_{11} x_1 \end{cases} \tag{4.46}$$

Выражая x_1 через z, понижая порядок (4.46) путем подстановки второго уравнения в первое и выражая подлежащую оцениванию компоненту x_{20}, получим систему

$$\begin{cases} x_1 = h_{11}^{-1} z, \\ x_{20} = \left[(p - a_{11})\ a_{12}^{-1}(p - a_{22}) - a_{21}\right] x_1 - a_{12}^{-1}(p - a_{22}) x_{10}. \end{cases} \tag{4.47}$$

Понижение порядка системы (4.46) в случае $m<n$ до размера m вектора измерений z, во-первых, позволяет установить наблюдаемость системы (наличие зависимости всех компонент вектора состояния от непосредственно измеряемой компоненты) и, во-вторых, получить уравнение наблюдения непосредственно не измеряемой компоненты x_{20}. Подставляя первое уравнение (4.47) во второе, получим уравнение для оценки $\tilde{x}_{20}$:

$$\tilde{x}_{20} = \left[(p - a_{11})\ a_{12}^{-1}(p - a_{22}) - a_{21}\right] h_{11}^{-1} z - a_{12}^{-1}(p - a_{22}) x_{10} = a_{20}^{-1} h_{11}^{-1} z + a_{10} x_{10}, \tag{4.48}$$

где $a_{20}^{-1} = \left[(p - a_{11})\ a_{12}^{-1}(p - a_{22}) - a_{21}\right]$, $a_{10} = -a_{12}^{-1}(p - a_{22})$. В данном случае, как указывалось и в параграфе 4.2, наблюдатель в (4.48) вычисляется с точностью до изоморфизма h_{11} по формуле

$$S_N = a_{20}^{-1} h_{11}^{-1}, \tag{4.49}$$

а не с точностью до изоморфизма $\Phi(p)$ системы (4.46), как в формуле (4.41). Таким образом,

$$\tilde{x}_{20} = a_{10} x_{10} + S_N z\ . \tag{4.50}$$

В уравнении наблюдения (4.50), как и в фильтре Калмана, обновляющая последовательность, характеризуемая вторым слагаемым, формируется измерениями.

Моделирование разомкнутого контура (см. рис. 4.7) с наблюдателем (4.49), (4.50) и фильтром $W_\Phi = k_\Phi (T_\Phi p + 1)^{-1}$ при k_Φ=1 и T_Φ=0,4 показало, что оценка

$\hat{x}_2$ точно отслеживает изменение истинного значения компоненты x_2 в соответствии с динамикой фильтра. При неточном знании элементов a_{ij} в (4.45), (4.46) в «линейном», разомкнутом контуре появляется ошибка наблюдения x_2. Замыкание контура наблюдения ОС в соответствии с рис. 4.8, 4.9 наделяет его свойством робастности. Качественно переходные процессы аналогичны показанным на рис. 4.10 для первого примера. Моделировались также разомкнутый (см. рис. 4.7) и робастный, замкнутый (см. рис. 4.8 и рис. 4.9) контуры оценивания с фильтрами

$W_{\Phi} = \frac{1}{0,4p+1} \cdot \frac{1}{1,5p+1}$ - для «линейного», разомкнутого контура и

$W_{\Phi} = \frac{1}{0,4p+1} \cdot \frac{99}{1,5 \cdot 100p+1}$ - для замкнутого, робастного контура.

На рис. 4.11 приведены графики оценивания и фильтрации зашумленного нормальным белым шумом непосредственно не наблюдаемого входного сигнала x_2 (график 1) при использовании указанных фильтров. Амплитуда шума составляла 10% от амплитуды полезного сигнала. График 2 соответствует оценке $\hat{x}_2$ на выходе разомкнутого контура при искажении на 40% параметра a_{11} в объекте (4.45), (4.46), а график 3 –оценке $\hat{x}_2$ на выходе робастного контура при том же искажении параметра a_{11}.

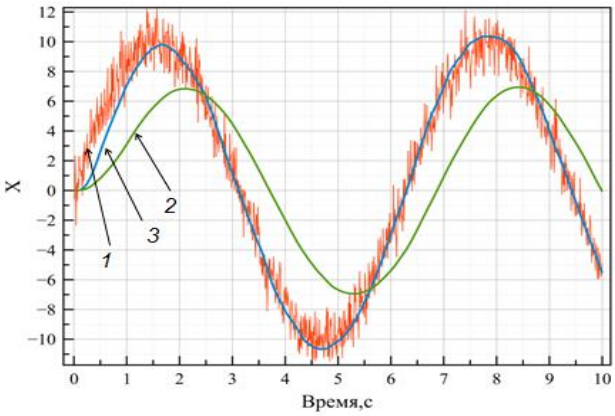


Рис. 4.11. Оценивание и фильтрация зашумлённого сигнала

Видно, что разомкнутый контур, хотя и подвержен влиянию параметрических возмущений в структуре объекта, тем не менее, обладает высоким качеством фильтрации сигнала. Замкнутый контур с реальной ОС обладает как свойством робастности в отношении заранее не известных существенных вариаций параметров объекта, так и высоким качеством фильтрации шумов, имеющихся во входном сигнале. Если же заранее известно об имеющихся отклонениях параметров объекта от номинальных значений (типа систематических погрешностей

датчиков), то, как показало моделирование, разомкнутый контур подбором параметров фильтра можно откалибровать так, что их влияние практически полностью устраняется. ОС становится необходимой при значительных отклонениях параметров объекта от принятых в модели. При этом астатизм контура (точность оценивания) может регулироваться путём изменения коэффициента $k_Ф$. Следует учитывать, что ввести реальную ОС не всегда можно: например, при использовании изоморфного и любого другого типа наблюдателей на выходе какого-либо датчика невозможно замкнуть ОС с его выхода на вход, так как реальное значение сигнала (измеряемой физической величины) на входе датчика неизвестно. В этом случае при $m<n$ нужно использовать откалиброванный «линейный», разомкнутый контур.

В целом, изоморфные наблюдатели являются простыми по структуре, а процедура их синтеза максимально формализована. Высокое качество переходных процессов в контуре наблюдения и фильтрации обеспечивается выбором уравнений фильтра с учетом физической реализуемости системы «наблюдатель-фильтр» и требуемой «эталонной» фильтрации наблюдаемых компонент. В этом смысле изоморфные наблюдатели обладают свойством «предельности» по уровню достижимого качества процессов оценивания и фильтрации в сравнении с известными наблюдателями.

4.6. Задача коррекции. Синтез наблюдателя для гировертикали

В рамках общей задачи наблюдения следует выделять хотя и схожие, но во многом различные частные задачи *оценивания* (*наблюдения*) и *коррекции*.

В *задаче оценивания* решается классическая проблема восстановления (наблюдения) с требуемой точностью непосредственно не измеряемых компонент вектора состояния динамического объекта по непосредственно доступным показаниям датчиков. В этой задаче в начале устанавливается наблюдаемы ли в принципе необходимые компоненты с учётом доступных измерений, а затем строится алгоритм-наблюдатель для их определения. Одновременно и, как правило, неотделимо решается проблема фильтрации шумов, содержащихся в моделях динамики вектора состояния и измерений. В этой задаче $m<n, Z \subset R^m, X \subset R^n$.

В *задаче коррекции* все необходимые компоненты вектора состояния уже наблюдаются или каким-либо образом «счисляются» по доступной информации датчиков, но нас не удовлетворяет точность их определения, которая, к тому же, например, при использовании бесплатформенной инерциальной навигационной системы (БИНС), может ухудшаться с течением времени. В связи с этим прибегают к использованию дополнительных датчиков и/или датчиков, основанных на иных физических принципах действия, измеряющих, пусть иногда косвенно и не

непрерывно, уже известные компоненты с существенно большей точностью. В таких задачах иногда даже не учитывают динамику изменения интересующих параметров и коррекцию проводят по принципу «здесь и сейчас», то есть практически мгновенно и часто даже одноразово. В этой задаче $m \geq n,\ Z \subset R^m,\ X \subset R^n$. Имеются и смешанные алгоритмы оценивания-коррекции.

Итак, рассмотрим задачу коррекции. Так как в задаче коррекции, в отличие от задачи наблюдения, выполняется условие $m \geq n$, то имеется возможность получать информацию о «корректируемом» векторе X сразу от нескольких источников-измерителей, отличающихся точностью измерений.

В этом случае уравнение состояния может рассматриваться как «статическое» (например, в алгебраичной, операторной форме, либо в другой форме), так и динамическое (например, в форме дифференциальных уравнений). Ту и другую форму можно привести к «операторному» виду.

Смысл задачи коррекции заключается *в периодическом* (или даже разовом) *уточнении* вычисленных («счисленных») по информации «грубого» датчика компонент вектора состояния $X_{выч}$ с помощью информации прямых или «косвенных» измерений (вычислений) тех же компонент по информации «точного» датчика $X_{изм}$. Понятия «грубый» и «точный» датчики имеют смысл только в узком, сравнительном смысле – по отношению к конкретным рассматриваемым датчикам.

Понятно, что *задачей* (*целью*) *коррекции является обеспечение между* $X_{выч}$ *и* $X_{изм}$ *тождественного изоморфизма*

$$e_X : X_{выч} \to X_{изм},\ \ e_X^{-1} : X_{изм} \to X_{выч},\ \ e_X^{-1} e_X = e_X e_X^{-1} = e_X = e_X^{-1}.$$

Рассмотрим простейшую «статическую» задачу коррекции, считая что $X_{выч}$ на текущем шаге уже вычислено и известно, а $X_{изм}$ по данным более точных датчиков может быть определено на этом шаге с помощью уравнения

$$X_{изм} = H^{-1} Z, \tag{4.51}$$

где Z – вектор прямых измерений некоторых компонент состояния объекта, косвенным, но явным образом связанных с измеряемым вектором $X_{изм}$ посредством некоторого известного отображения-матрицы, которое обозначим H^{-1}.

Тогда коммутативная диаграмма (КД) для этой типовой задачи коррекции примет вид:

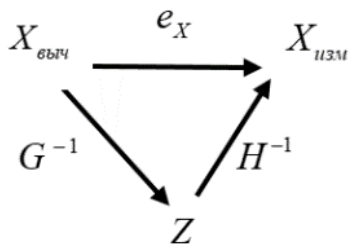


Рис. 4.12. коммутативная диаграмма для задачи коррекции

Здесь e_X - единица на X (тождественное отображение X в себя), являющаяся в данном случае единичной матрицей I_n соответствующего размера n, H^{-1} и G^{-1} - некоторые матрицы, которые пока можно рассматривать в качестве *обозначений* некоторых отображений. Отображение H^{-1}, как уже указывалось, известно и записано в явном виде в (4.51). Необходимо определить отображение G^{-1}, коммутирующее диаграмму на рис. 4.12 и удовлетворяющее совокупности условий

$$\begin{cases} e_X = H^{-1}G^{-1};\ e_X^{лев} = GG^{-1} = H^{-1}H = e_X^{прав} = e_X;\ e_X e_X = e_X = I_n, \\ e_Z^{лев} = G^{-1}G = HH^{-1} = e_Z^{прав} = e_Z,\ e_Z e_Z = e_Z, \end{cases} \tag{4.52}$$

отвечающих основной лемме и теореме о реализации изоморфизма композицией отображений, изложенным в первой части книги.

Из КД на рис. 4.12 и соотношений (4.52) при известных e_X *и* H^{-1} можно сразу найти отображение-матрицу

$$G = e_X H^{-1} = H^{-1} \tag{4.53}$$

и из $GG^{-1} = e_X$ отображение-матрицу G^{-1}. Ясно, что

$$H = G^{-1} e_X = G^{-1}. \tag{4.54}$$

Таким образом, $G = H^{-1}$ и $G^{-1} = H$, т.е. все отображения в КД известны и *с точностью до изоморфизма* e_X удовлетворяют условиям (4.52).

Задача решена, но лишь в статической постановке – применительно к одному шагу вычислений-измерений.

Необходимо построить «контур» коррекции, который работал бы постоянно, на множестве последовательных шагов, а также был бы работоспособным при полном отсутствии измерений, то есть в случае, когда вектор дополнительных измерений $X_{изм}$ в контур не поступает. При построении контура коррекции нужно и можно исходить лишь из того, что известными являются: вектор измерений Z, матрица H^{-1}, единичная матрица $I_n = e_x$, вектор $X_{выч}$ счисленных к моменту коррекции компонент уточняемого вектора X.

На выходе контура должен быть сформирован уточненный по данным измерений $X_{изм}$ вектор X и вычислена, содержащаяся в $X_{выч}$, ошибка, подлежащая устранению – «списанию».

В векторе X могут присутствовать шумы измерений и вычислений, которые можно подвергнуть дополнительной фильтрации с целью формирования окончательной оценки X. Структуру фильтра в этом случае, как будет показано дальше, можно формировать независимо от процедуры коррекции, с учетом характера шумов.

С учетом отмеченных положений и исходя из рис. 4.12 контур коррекции-фильтрации в операторной форме можно представить в виде, показанном на рис. 4.13.

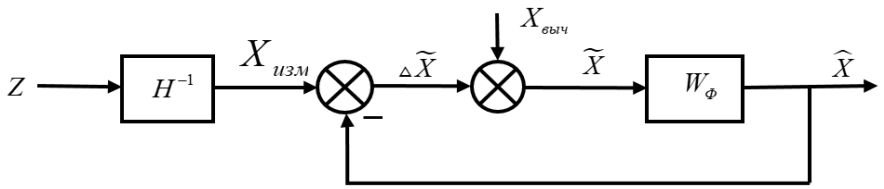


Рис. 4.13. Контур коррекции-фильтрации

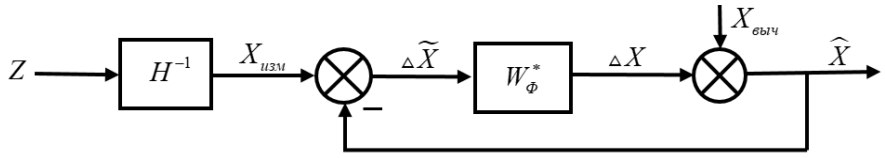


Рис. 4.14. Вариант контура коррекции-фильтрации

В ΔX содержатся шумы измерителя, которые можно отфильтровать установкой фильтра, как показано на рис. 4.14. В контурах на рис. 4.13 и 4.14 оценка X «стягивается» к измеренному и сглаженному значению $X_{изм}$. Передаточная функция (ПФ) замкнутого контура для рис. 4.13 и рис. 4.14 от $X_{изм}$ к X одинакова

$$\Phi(p) = \frac{W_Ф}{1+W_Ф}, \tag{4.55}$$

где $W_Ф$ разомкнутого контура выбирается с учетом хорошей фильтрации шумов измерителя $X_{изм}$ в замкнутом контуре и высокого качества переходных процессов в этом контуре. Для этого можно задаваться $\Phi(p)$, например, в форме фильтра Баттерворта и по ней вычислить требуемую $W_Ф(p)$. Можно использовать фильтр на основе скользящего среднего и др. Обратим внимание, что здесь под $\Phi(p)$ понимается передаточная функция замкнутого контура, как принято в тео-

рии автоматического регулирования, а не фундаментальная матрица системы линейных дифференциальных уравнений, как в предыдущих параграфах. В простейшем случае, если выбрать, например, $W_\Phi = \frac{1}{Tp}$, то $\Phi(p) = \frac{1}{Tp+1}$ и назначать нужно лишь постоянную времени *T*.

При отсутствии измерений потребителю поступает $X_{выч}$, минуя контур коррекции – см. рис. 4.15.

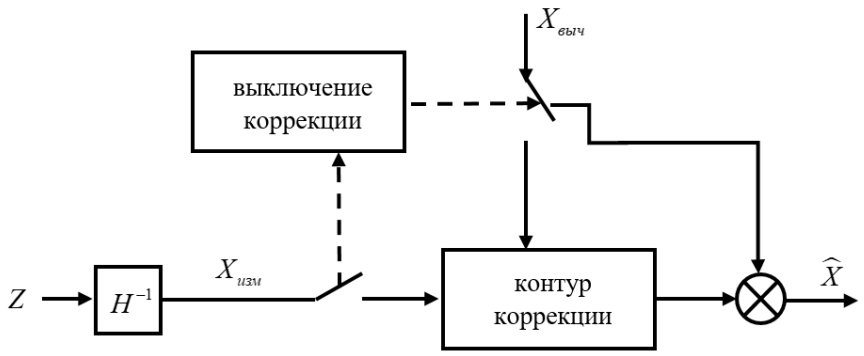


Рис. 4.15. Контур при отсутствии измерений

Контур фильтрации может быть построен по-разному. Если сложно подобрать W_Φ в контурах на рис. 4.13 и 4.14, то проще может оказаться контур, показанный на рис. 4.16.

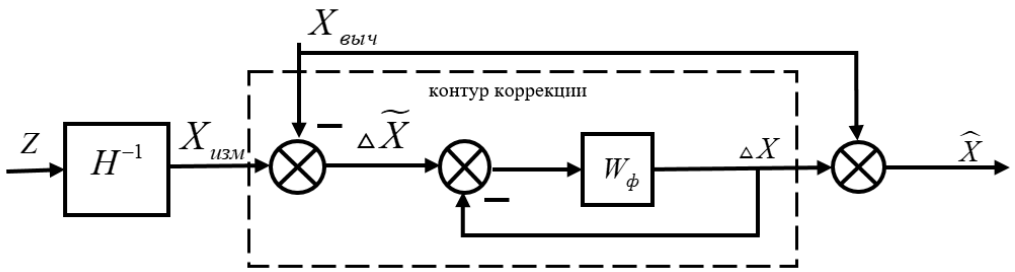


Рис. 4.16. Вариант контура фильтрации

Как видно из рис. 4.16,

$$X = X_{выч} + \Delta X = X_{выч} + \Phi(p)\Delta X = X_{выч} + \Phi(p)(X_{изм} - X_{выч}) = X_{выч} + \Phi(p)\left[H^{-1}Z - X_{выч}\right]. \quad (4.56)$$

Контур на рис. 4.16 наиболее прост, так как позволяет отдельно фильтровать шум в ΔX и не задерживает сигнал $X_{выч}$. Как видно из рисунков 4.13, 4.14 и 4.16, величину $X_{выч}$ можно подавать в разные точки контура коррекции, но

проще всего воспользоваться рис. 4.16, в котором ΔX определяется автономно и независимо и не «замешивается» с $X_{выч}$ в контуре, что резко упрощает выбор ПФ $W_ф$ фильтра.

При этом формула (4.56) по структуре близка к фильтру Калмана (ФК): обновляющая последовательность, как и в ФК, рекуррентно формируется на основе поступающих измерений.

В некоторых случаях при решении задачи коррекции контур удобнее замыкать не по вектору состояния *X*, как показано на рис. 4.13-4.16, а по вектору измерений *Z*. Пример такого контура показан на рис. 4.17.

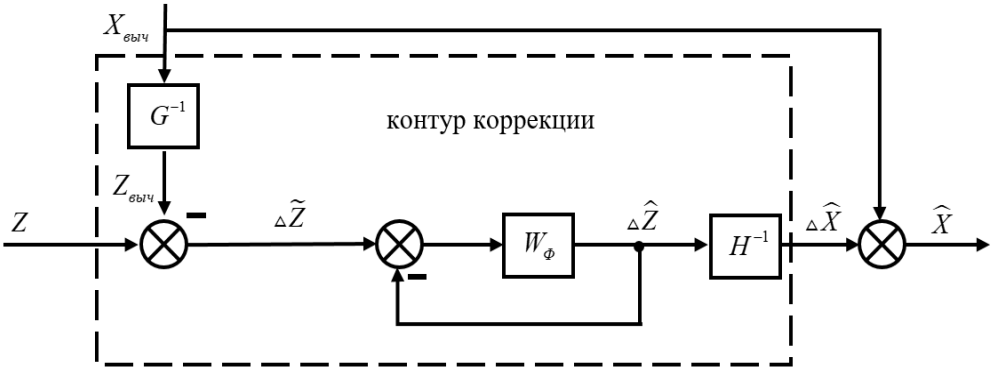


Рис. 4.17. Контур с замыканием по вектору измерений

Из контура следует:

$$X = X_{выч} + \Delta X = X_{выч} + H^{-1}\Delta Z = X_{выч} + H^{-1}\frac{W_Ф}{1+W_Ф}\Delta Z = \left\langle \frac{W_Ф}{1+W_Ф} = \Phi(p) \right\rangle =$$

$$= X_{выч} + H^{-1}\Phi(p)\Delta Z = X_{выч} + H^{-1}\Phi(p)\left[Z - G^{-1}X_{выч}\right],$$

то есть

$$X = X_{выч} + H^{-1}\Phi(p)\left[Z - G^{-1}X_{выч}\right]. \qquad (4.57)$$

Как видно из (4.56) и (4.57), разница между этими формулами коррекции состоит в формировании невязки: в (4.56) невязка формируется как разность между прогнозируемым по измерениям вектором состояния $H^{-1}Z$ и вычисленным вектором состояния $X_{выч}$, а в (4.57) - как разность между непосредственно доступным вектором измерений Z и прогнозируемым (по значению вектора $X_{выч}$) вектором измерений $G^{-1}X_{выч}$. Кроме того, в (4.56) для формирования оценки X необходима лишь матрица H^{-1} из коммутативной диаграммы на рис. 4.12, а в (4.57) обе матрицы H^{-1} и G^{-1}, из которых сразу известна лишь одна (часто H^{-1}),

а вторая должна быть вычислена по правилам (4.52)-(4.54) с точностью до изоморфизма e_x , являющегося в данном случае единичной матрицей размера *n*.

Отметим, что возможны самые разные содержательные формулировки задач коррекции. Однако с точки зрения математического формализма коммутативная диаграмма композиций соответствующих отображений во всех задачах, как правило, сводится к виду, показанному на рис. 4.12, а сам алгоритм коррекции может быть реализован с помощью формулы (4.56) или (4.57). Отметим также, что если фильтрация шумов измерений производится вне контура коррекции, то $\Phi(p) = I_n$, где I_n - единичная матрица размера *n*, и формула (4.57) становится полностью идентичной формуле (4.56), так как $e_X = H^{-1}G^{-1} = I_n$.

Рассмотрим примеры алгоритмов коррекции по формулам (4.56) и (4.57).

***Пример* 1.** Рассматривается задача резервного по отношению к БИНС счисления углов тангажа ϑ и крена γ по информации датчиков линейных ускорений (ДЛУ) и угловых скоростей (ДУС), входящих в состав комплексной системы управления (КСУ), и коррекции этих углов по информации одноантенного приемника спутниковой навигации (ПСН). Требуется получить оценки углов ϑ и γ для установившегося режима полета, то есть при $\dot{V}_x = \dot{V}_y = \dot{V}_z = 0$. Допущения: обеспечивается флюгерная устойчивость самолета, то есть угол скольжения $\beta = 0$. Однако угол сноса $\beta_{сн} \neq 0$, то есть воздушная скорость может не совпадать с земной.

Таким образом, будем считать, что имеются следующие измерители полетной информации:

1) датчики ДЛУ линейных ускорений n_x, n_y, n_z и датчики ДУС угловых скоростей $\omega_x, \omega_y, \omega_z$; указанные датчики выдают информацию в связанной системе координат (СвСК);
2) приёмник спутниковой навигации ПСН, выдающий потребителям составляющие V_N, V_U, V_E земной скорости, которые могут быть пересчитаны в составляющие V_X, V_y, V_Z в СвСК.

Для формализации задачи коррекции воспользуемся известными уравнениями динамики полета в форме [23]:

$$\begin{cases} n_x = \sin\vartheta + (\dot{V}_x + V_z\omega_y - \omega_z V_y)/g \\ n_y = \cos\vartheta\cos\gamma + (\dot{V}_y + V_x\omega_z - \omega_x V_z)/g \\ n_z = -\cos\vartheta\sin\gamma + (\dot{V}_z + V_y\omega_x - \omega_y V_x)/g \end{cases} . \qquad (4.58)$$

Коррекция осуществляется при условии $\dot{V}_x = \dot{V}_y = \dot{V}_z = 0$, то есть (4.58) можно записать в виде

$$\begin{cases} \sin\vartheta = n_x - (V_z\omega_y - \omega_z V_y)/g \\ \cos\vartheta\cos\gamma = n_y - (V_x\omega_z - \omega_x V_z)/g \\ \cos\vartheta\sin\gamma = -n_z + (V_y\omega_x - \omega_y V_x)/g \end{cases} . \qquad (4.59)$$

Рассмотрим нелинейный случай (4.59):

- имеются вычисленные в момент t_i углы ϑ_i, γ_i поступившие либо из БИНС, либо (при отказе БИНС) из простейшего алгоритма счисления, реализованного, например, на основе процедуры интегрирования методом Эйлера угловых скоростей $\omega_x, \omega_y, \omega_z$, измеряемых ДУС;

- имеются в момент t_i измерения n_{xi}, n_{yi}, n_{zi} , поступившие от акселерометров ДЛУ и составляющие V_{xi}, V_{yi}, V_{zi} вектора скорости, сформированные в результате пересчета измерений ПСН в СвСК;

- необходимо по измерениям ПСН и перегрузок корректировать счисленные тем или иным способом (в БИНС или по показаниям грубых ДУС из состава КСУ с помощью алгоритма интегрирования методом Эйлера) углы в замкнутом контуре коррекции.

Для решения задачи перепишем (4.59) в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \sin\vartheta \\ \cos\vartheta cos\gamma \\ \cos\vartheta\sin\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ -n_z \end{bmatrix} - \frac{1}{g}\begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} \qquad (4.60)$$

Обозначим:

$$x_1 = \sin\vartheta,\ x_2 = \cos\vartheta\cos\gamma,\ x_3 = \cos\vartheta\sin\gamma \qquad (4.61)$$

и преобразуем (4.60) к виду

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} - \frac{1}{g}\begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} . \qquad (4.62)$$

Расширяя вектор измерений, получим

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{\omega_z}{g} & -\frac{\omega_y}{g} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{\omega_z}{g} & 0 & \frac{\omega_x}{g} \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{\omega_y}{g} & \frac{\omega_x}{g} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \\ V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix}. \tag{4.63}$$

Заменяя матрицы соответствующими обозначениями, получим

$$x_{изм} = H^{-1}Z\,. \tag{4.64}$$

В формулах (4.60)…(4.64) и далее индекс i опущен. Полное совпадение (4.64) с (4.51) означает, что для коррекции вычисленного в БИНС или с использованием алгоритма Эйлера вектора $x_{выч}$ можно на шаге i сразу применить формулу (4.56)

$$X = X_{выч} + \Phi(p)(H^{-1}Z - X_{выч}), \tag{4.65}$$

отвечающую первому варианту построения контура коррекции.

Формула (4.65) записана для i-го шага коррекции по информации ПСН. Как уже указывалось, индекс i опущен. Следует иметь в виду, что ПСН выдает информацию с частотой $f_{ПСН}$, много меньшей частоты вычисления $f_{выч}$ углов по информации ДУС (или в БИНС), то есть $f_{ПСН} << f_{выч}$. Поэтому индекс i применительно к (4.65) относится к $f_{ПСН}$. В промежутке между i и i+1 осуществляется вычисление $X_{выч}$ в БИНС или в КСУ путем интегрирования сигналов угловых скоростей от ДУС по алгоритму Эйлера с частотой $f_{выч}$.

Передаточная функция Ф(р) замкнутого контура фильтрации и соответствующая ПФ фильтра $W_Ф$ должны выбираться с учетом характера шумов компонент вектора измерений Z, то есть шумов ДЛУ для подвектора $\left[n_x\ n_y\ n_z\right]^T$ и шумов ПСН для подвектора $\left[V_x\ V_y\ V_z\right]^T$ и соответствующего вектора $X_{изм}$. Сигналы ДУС, входящие в матрицу H^{-1}, также должны быть предварительно отфильтрованы. В качестве фильтра могут использоваться фильтры в форме оператора Баттерворта, фильтры на основе скользящего среднего и др. В простейшем случае можно выбрать $W_Ф$ в форме

$$W_Ф = \frac{1}{Tp}\ . \tag{4.66}$$

Тогда в векторном случае для (4.63), (4.64), (4.65) будем иметь

$$W_{\Phi}=\begin{pmatrix}\frac{1}{T_1 p} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{T_2 p} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{T_3 p}\end{pmatrix};\quad \Phi(p)=\begin{pmatrix}\frac{1}{T_1 p+1} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{T_2 p+1} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{T_3 p+1}\end{pmatrix}, \tag{4.67}$$

где можно выбирать различные $T_1 \neq T_2 \neq T_3$. После вычисления оценки X по формуле (4.65), исходя из (4.61), получим

$$\frac{x_3}{x_2}=\frac{\cos\vartheta\sin\gamma}{\cos\vartheta\cos\gamma}=tg\gamma\ .$$

Далее с учетом (4.61) вычисляются искомые оценки углов

$$\begin{cases}\vartheta=\arcsin x_1,\\ \gamma=arctg\left(\frac{x_3}{x_2}\right).\end{cases} \tag{4.68}$$

После вычисления оценок ϑ и γ на i –том шаге коррекции полученные оценки подставляются в качестве начальных условий для счисления по сигналам ДУС углов в быстром цикле с частотой $f_{выч}$ до наступления очередного (i+1)-го шага коррекции по вновь поступившей информации от ПСН.

Недостатком приведенного алгоритма и контура коррекции является то, что, как видно из (4.67), (4.63) и (4.64), фильтр W_{Φ} является единым интегрированным для сигналов акселерометров и сигналов ПСН. Если трудно или нецелесообразно подбирать такой фильтр, то его вообще можно исключить из контура коррекции, заранее фильтруя сигналы ДЛУ и ПСН сепаратными фильтрами. В этом случае какая-либо динамика из контура коррекции вообще исключается и (4.65) преобразуется к простейшему виду

$$X=X_{выч}+(H^{-1}Z-X_{выч}), \tag{4.69}$$

где матрица H^{-1} определяется по (4.63), (4.64).

Обновление оценок углов крена и тангажа, таким образом, осуществляется с частотой $f_{ПСН}$ выдачи измерительной информации от ПСН. При отсутствии информации от ПСН, а также между шагами i и i+1 коррекции в качестве оценок

углов, как видно из рис. 4.15, напрямую, минуя контур коррекции, выдаются вычисленные по формулам (4.68) с использованием вектора $X_{\text{выч}}$ значения углов.

Далее рассмотрим второй вариант построения контура коррекции, отвечающий рисунку 4.17 и формуле (4.57). Как видно из (4.57), в этом случае дополнительно необходимо определить неизвестную матрицу G^{-1} с использованием коммутативной диаграммы, показанной на рис. 4.12, и отвечающих ей формул (4.52) - (4.54). Учитывая, что в данном случае $e_X = H^{-1}G^{-1} = I_n$ - единичная матрица размера n=3, - из (4.53), (4.63) и (4.64) сразу определяем матрицу G:

$$G = e_x H^{-1} = H^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{\omega_z}{g} & -\frac{\omega_y}{g} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{\omega_z}{g} & 0 & \frac{\omega_x}{g} \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{\omega_y}{g} & \frac{\omega_x}{g} & 0 \end{bmatrix}. \qquad (4.70)$$

Исходя из известных размеров матриц $e_X = I_n$ и $G = H^{-1}$ с использованием равенств (4.52) можно задаться структурой матрицы G^{-1} и, учитывая (4.54), из (4.52) можно составить матричное уравнение для определения ее элементов:

$$GG^{-1}=H^{-1}H=e_x, \qquad (4.71)$$

где e_x – единичная матрица, имеющая в данном случае размер 3x3, а матрицы $G=H^{-1}$ известны и имеют структуру (4.70). Вводя для элементов искомой матрицы (4.54) $G^{-1}=H$ обозначения h_{ij}, из (4.71) устанавливаем, что матрицы $G^{-1}=H$ имеют размер 6x3. С учетом (4.70) и (4.71) для элементов матрицы $G^{-1}=H$ можно записать уравнения

$$\begin{cases} h_{11} + h_{51}\frac{\omega_z}{g} - h_{61}\frac{\omega_y}{g} = 1; & h_{12} + h_{52}\frac{\omega_z}{g} - h_{62}\frac{\omega_y}{g} = 0; & h_{13} + h_{53}\frac{\omega_z}{g} - h_{63}\frac{\omega_y}{g} = 0; \\ h_{21} - h_{41}\frac{\omega_z}{g} + h_{61}\frac{\omega_x}{g} = 0; & h_{22} - h_{42}\frac{\omega_z}{g} + h_{62}\frac{\omega_x}{g} = 1; & h_{23} - h_{43}\frac{\omega_z}{g} + h_{63}\frac{\omega_x}{g} = 0; \\ h_{31} + h_{41}\frac{\omega_y}{g} - h_{51}\frac{\omega_x}{g} = 0; & h_{32} + h_{42}\frac{\omega_y}{g} - h_{52}\frac{\omega_x}{g} = 0; & h_{33} + h_{43}\frac{\omega_y}{g} - h_{53}\frac{\omega_x}{g} = -1. \end{cases} \qquad (4.72)$$

Как следует из (4.72), матрица $G^{-1}=H$ включает 18 неизвестных, для определения которых имеется лишь 9 уравнений. Это означает, что половину элементов в $H=G^{-1}$ можно считать свободно назначаемыми, то есть существует бесконечно

большое число корректоров-наблюдателей, из которых по определенным соображениям необходимо выбрать один. Чтобы не было слишком большого произвола в выборе корректора-наблюдателя, изучим структуру матрицы $H=G^{-1}$.

С учетом (4.63) и (4.52) - (4.54) из коммутативной диаграммы на рис. 4.12 можно записать

$$Z=HX_{изм}, \tag{4.73}$$

где вид матриц Z и $X_{изм}$ определяется из (4.63), (4.64):

$$Z=\left[n_x n_y n_z V_x V_y V_z\right]^T,\ \ X_{изм}=\left[x_1 x_2 x_3\right]^T\ .$$

Сравнивая (4.73) с (4.62) при $\omega_x=\omega_y=\omega_z=0$, что характерно для прямолинейного полета с установившимися скоростями ($V_x=const, V_y=const, V_z=const$), можно было назначить «верхнюю» половину матрицы H в (4.73) в виде h_{11}=1, h_{12}=0, h_{13}=0; h_{21}=0, h_{22}=1, h_{23}=0; h_{31}=0, h_{32}=0, h_{33}=-1. Однако в этом случае в сигнале n_x не будет отражаться изменение крена γ, а в n_y и в n_z плохо будет отражаться изменение тангажа ϑ. Поэтому выберем h_{11}=0,8; h_{12}=0,1; h_{13}=0,1; h_{21}=0,1; h_{22}=0,8; h_{23}=0,1; h_{31}=0,1; h_{32}=0,1; h_{33}=-0,8. С учетом назначенных значений для половины элементов остальные элементы матрицы H можно определить из уравнений (4.72). Подставляя указанные значения $h_{11}\ldots h_{33}$ в (4.72), для определения оставшихся элементов матрицы H получим систему уравнений

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{\omega_z}{g} & -\frac{\omega_y}{g} \\ -\frac{\omega_z}{g} & 0 & \frac{\omega_x}{g} \\ -\frac{\omega_y}{g} & \frac{\omega_x}{g} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{41} & h_{42} & h_{43} \\ h_{51} & h_{52} & h_{53} \\ h_{61} & h_{62} & h_{63} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2 & -0,1 & -0,1 \\ -0,1 & 0,2 & -0,1 \\ -0,1 & -0,1 & -0,2 \end{bmatrix}\ . \tag{4.74}$$

Однако, как легко видеть из (4.74), определитель матрицы

$$\Omega=\begin{bmatrix} 0 & \frac{\omega_z}{g} & -\frac{\omega_y}{g} \\ -\frac{\omega_z}{g} & 0 & \frac{\omega_x}{g} \\ -\frac{\omega_y}{g} & \frac{\omega_x}{g} & 0 \end{bmatrix} \tag{4.75}$$

$\det\Omega=0$, то есть система уравнений (4.74) неразрешима ни при каких h_{41} …h_{63}. Как видно из (4.75), неразрешимость (4.74) следует и из того, что мы предполагали $\omega_x=\omega_y=\omega_z=0$. Это лишь означает, что такой класс наблюдателей-корректоров не существует и нужно выбрать другой из множества допустимых.

Вернемся к уравнениям (4.72) и в качестве назначаемых выберем элементы h_{41}, h_{42} , h_{43} , h_{51}, h_{52} , h_{53}, h_{61}, h_{62}, h_{63}, а остальные элементы в матрице H вычислим по уравнениям (4.72). Пусть для простоты все h_{41}=1, …, h_{63}=1, то есть равны единице. Это означает, что все угловые скорости одинаково интенсивно влияют на отражение в измеряемых составляющих скоростей ПСН изменений крена и тангажа. Это видно из (4.73).

Из (4.72) при указанных значениях h_{41} ,…, h_{63} получим

$$\begin{cases} h_{11}=1-\dfrac{\omega_z}{g}+\dfrac{\omega_y}{g};\ h_{12}=-\dfrac{\omega_z}{g}+\dfrac{\omega_y}{g};\quad h_{13}=-\dfrac{\omega_z}{g}+\dfrac{\omega_y}{g};\\ h_{21}=\dfrac{\omega_z}{g}-\dfrac{\omega_x}{g};\quad h_{22}=1+\dfrac{\omega_z}{g}-\dfrac{\omega_x}{g};\ h_{23}=\dfrac{\omega_z}{g}-\dfrac{\omega_x}{g};\\ h_{31}=-\dfrac{\omega_y}{g}+\dfrac{\omega_x}{g};\ h_{32}=-\dfrac{\omega_y}{g}+\dfrac{\omega_x}{g};\quad h_{33}=-1-\dfrac{\omega_y}{g}+\dfrac{\omega_x}{g}. \end{cases} \tag{4.76}$$

С учетом h_{41}=1,…, h_{63}=1 и (4.76) матрица $H=G^{-1}$ определяется выражением

$$G^{-1}=H=\begin{bmatrix} (1-\dfrac{\omega_z}{g}+\dfrac{\omega_y}{g}) & (-\dfrac{\omega_z}{g}+\dfrac{\omega_y}{g}) & (-\dfrac{\omega_z}{g}+\dfrac{\omega_y}{g})\\ (\dfrac{\omega_z}{g}-\dfrac{\omega_x}{g}) & (1+\dfrac{\omega_z}{g}-\dfrac{\omega_x}{g}) & (\dfrac{\omega_z}{g}-\dfrac{\omega_x}{g})\\ (-\dfrac{\omega_y}{g}+\dfrac{\omega_x}{g}) & (-\dfrac{\omega_y}{g}+\dfrac{\omega_x}{g}) & (-1-\dfrac{\omega_y}{g}+\dfrac{\omega_x}{g})\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{4.77}$$

Для проверки правильности вычисления матрицы $G^{-1}=H$ необходимо подставить (4.77) и (4.70) в (4.52) и убедиться, что все равенства выполняются. Не будем здесь приводить соответствующие выкладки. Отметим, что (4.77) действительно удовлетворяет равенствам в (4.52) и, таким образом, матрица $G^{-1}=H$ вычислена правильно.

Далее вычислим единицу e_z на Z:

$$e_z = G^{-1}G = HH^{-1} = \tag{4.78}$$

$$= \begin{bmatrix}
(1-\frac{\omega_z}{g}+\frac{\omega_y}{g}) & \vdots\,(-\frac{\omega_z}{g}+\frac{\omega_y}{g}) & \vdots\,(\frac{\omega_z}{g}-\frac{\omega_y}{g}) & \left[-\frac{\omega_z}{g}(-\frac{\omega_z}{g}+\frac{\omega_y}{g})-\frac{\omega_y}{g}(-\frac{\omega_z}{g}+\frac{\omega_y}{g})\right] & \left[\frac{\omega_z}{g}(1-\frac{\omega_z}{g}+\frac{\omega_y}{g})+\frac{\omega_x}{g}(-\frac{\omega_z}{g}+\frac{\omega_y}{g})\right] & \left[-\frac{\omega_y}{g}(1-\frac{\omega_z}{g}+\frac{\omega_y}{g})+\frac{\omega_x}{g}(-\frac{\omega_z}{g}+\frac{\omega_y}{g})\right] \\
(\frac{\omega_z}{g}-\frac{\omega_x}{g}) & \vdots\,(1+\frac{\omega_z}{g}-\frac{\omega_x}{g}) & \vdots\,(-\frac{\omega_z}{g}+\frac{\omega_x}{g}) & \left[-\frac{\omega_z}{g}(1+\frac{\omega_z}{g}-\frac{\omega_x}{g})-\frac{\omega_y}{g}(\frac{\omega_z}{g}-\frac{\omega_x}{g})\right] & \left[\frac{\omega_z}{g}(\frac{\omega_z}{g}-\frac{\omega_x}{g})+\frac{\omega_x}{g}(\frac{\omega_z}{g}-\frac{\omega_x}{g})\right] & \left[-\frac{\omega_y}{g}(\frac{\omega_z}{g}-\frac{\omega_x}{g})+\frac{\omega_x}{g}(1+\frac{\omega_z}{g}-\frac{\omega_x}{g})\right] \\
(-\frac{\omega_y}{g}+\frac{\omega_x}{g}) & \vdots\,(-\frac{\omega_y}{g}+\frac{\omega_x}{g}) & \vdots\,(1+\frac{\omega_y}{g}-\frac{\omega_x}{g}) & \left[-\frac{\omega_z}{g}(-\frac{\omega_y}{g}+\frac{\omega_x}{g})-\frac{\omega_y}{g}(-1-\frac{\omega_y}{g}+\frac{\omega_x}{g})\right] & \left[\frac{\omega_z}{g}(-\frac{\omega_y}{g}+\frac{\omega_x}{g})+\frac{\omega_x}{g}(-1-\frac{\omega_y}{g}+\frac{\omega_x}{g})\right] & \left[-\frac{\omega_y}{g}\left(-\frac{\omega_y}{g}+\frac{\omega_x}{g}\right)+\frac{\omega_x}{g}(-\frac{\omega_y}{g}+\frac{\omega_x}{g})\right] \\
1 & 1 & -1 & (-\frac{\omega_z}{g}-\frac{\omega_y}{g}) & (\frac{\omega_z}{g}+\frac{\omega_x}{g}) & (-\frac{\omega_y}{g}+\frac{\omega_x}{g}) \\
1 & 1 & -1 & (-\frac{\omega_z}{g}-\frac{\omega_y}{g}) & (\frac{\omega_z}{g}+\frac{\omega_x}{g}) & (-\frac{\omega_y}{g}+\frac{\omega_x}{g}) \\
1 & 1 & -1 & (-\frac{\omega_z}{g}-\frac{\omega_y}{g}) & (\frac{\omega_z}{g}+\frac{\omega_x}{g}) & (-\frac{\omega_y}{g}+\frac{\omega_x}{g})
\end{bmatrix}$$

Обратим внимание лишь на одну особенность. Единица e_Z на Z, определенная по правилам (4.52) с точность до изоморфизма e_X, являющегося обычной единичной и соответственно обратимой матрицей, может не быть единичной матрицей. Мало того, e_Z может оказаться необратимой в обычном смысле матрицей, так как ее определитель может оказаться равным нулю! И, тем не менее, e_Z является единицей, то есть тождественным отображением на Z, так как удовлетворяет соотношениям (4.52), то есть *является изоморфизмом внутри коммутативной диаграммы* на рис. 4.12. В этом смысле она обратима в коммутативной диаграмме. В данном случае, можно убедиться, что для единицы e_Z (4.78) все соотношения в (4.52) выполняются. То есть единица e_Z, определяемая в соответствии с (4.78), хотя и не является единичной матрицей, является, тем не менее, тождественным изоморфным преобразованием на Z. В этом нетрудно убедиться, например, применительно к частному случаю $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$, для которого тоже должно выполняться равенство (4.52) в части e_Z. Подстановка (4.78) в (4.52) в этом случае дает

$$e_Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = e_Z e_Z = e_Z$$

и (4.52) выполняется. Таким образом, вычисление $G^{-1}=H$ закончено и можно воспользоваться формулой (4.57) для построения контура коррекции по невязке измерений в соответствии с рис. 4.17:

$$X = X_{выч} + H^{-1}\Phi(p)\left[Z - G^{-1}X_{выч}\right] \quad . \tag{4.79}$$

Здесь, в отличие, от (4.65) и (4.67), ПФ замкнутого контура фильтрации Ф(р) имеет размер 6х6, но зато позволяет отдельно фильтровать компоненты вектора измерений Z с учетом особенностей шумов каждого измерителя. Если шумы фильтровать вне контура коррекции, что при использовании изоморфных наблюдателей вполне допустимо и законно, то алгоритм коррекции (4.79) упрощается и принимает вид

$$X = X_{выч} + H^{-1}\left[Z - G^{-1}X_{выч}\right] \tag{4.80}$$

и, как видно рис. 4.12, реализует коммутативную диаграмму, соответствующую принципу изоморфизма $X_{выч}$ и $X_{изм}$ и теореме о реализации изоморфизма e_x композицией матриц-отображений H^{-1} и G^{-1}, $e_x = H^{-1}G^{-1}$.

При реализации алгоритма (4.80) на каждом i-том шаге коррекции необходимо вычислять матрицы G^{-1} и H^{-1}. Казалось бы, эта процедура достаточно трудоемкая. Вместе с тем, как можно увидеть из соотношений (4.63), (4.64) и (4.78), матрицы H^{-1} и G^{-1} содержат много подобных (одинаковых) элементов, что позволяет резко сократить указанную трудоемкость.

Достоинством алгоритма (4.79), (4.80), в сравнении с алгоритмом коррекции (4.65), (4.69), помимо независимой фильтрации шумов, на что уже обращалось внимание, является также возможность «управления» наблюдаемостью компонент корректируемого вектора состояния путем выбора тех или иных значений «свободных» элементов матрицы $G^{-1}=H$ в соответствии с (4.72).

Если же учитывать, как указывалось ранее, что $e_x=I_n=H^{-1}G^{-1}$, то (4.80) приводится к виду (4.69)

$$X = X_{выч} + (H^{-1}Z - H^{-1}G^{-1}X_{выч}) = X_{выч} + (H^{-1}Z - e_X X_{выч}) = X_{выч} + (H^{-1}Z - X_{выч}).$$

Таким образом, по сути, независимо от выбора конкретного вида матрицы G^{-1} (4.77) из класса, определяемого соотношениями (4.72), никакой разницы между вариантами алгоритмов коррекции нет: принципы функционирования рассмотренных алгоритмов коррекции полностью аналогичны. Это существенно упрощает задачу построения корректора: нужно лишь достаточно корректно записать уравнение связи вида (4.63) между измерениями и вектором состояния и далее из него определить матрицу H^{-1}, которой вполне достаточно для построения контура коррекции по уравнению (4.69).

Уравнение (4.63) является универсальным в том смысле, что позволяет реализовать несколько видов коррекции:

1) *по сигналам перегрузок, поступающим от ДЛУ, и сигналам составляющих земной скорости, поступающим от ПСН*. Недостаток этого варианта коррекции связан с коррелированностью составляющих скорости в СвСК, формируемых на основе составляющих земной скорости от ПСН, с искомыми компонентами вектора состояния: в матрице пересчета составляющих земной скорости в составляющие скорости в СвСК приходится использовать известные по результатам счисления (и заведомо неправильные), как раз и подлежащие корректировке, углы крена и тангажа. Для корректной работы алгоритма необходимо выводить ЛА в горизонтальный полет и «арретировать» алгоритм, то есть согласовывать (задавать) начальные значения оценок углов с углами крена и тангажа, характерными для горизонтального полета и поступающими от независимого источника. По сути, это означает достаточно точную выставку начальных условий для запуска алгоритма в работу. Например, эти значения углов могут вводиться вручную экипажем или поступать от другой гировертикали, работавшей до этого момента исправно. Такой вариант работы вполне допустим. При работе алгоритма необходимо учитывать выполнение условий постоянства составляющих скорости $V_x = const, V_y = const, V_z = const$, то есть для включения алгоритма в работу нужно вводить пороговые значения на производные составляющих скорости для выполнения условий $\dot{V}_x \approx 0, \dot{V}_y \approx 0, \dot{V}_z \approx 0$. При моделировании этого варианта алгоритма получены графики погрешностей, приведенные на рис. 4.18 с учетом формирования признака доступности коррекции, показанного на рис. 4.19.

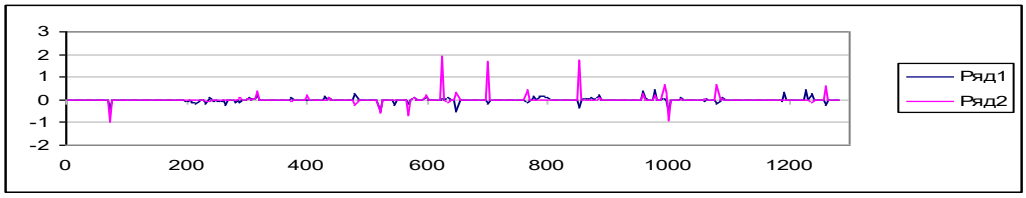


Рис. 4.18. 1-погрешность оценивания тангажа, 2-погрешность оценивания крена на участках полета при $|\dot{V}| < 0.05 m/c^2$

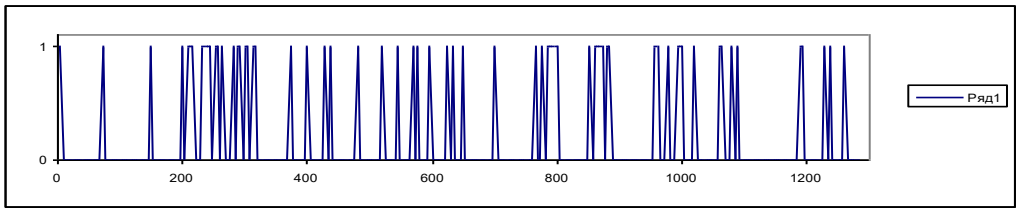


Рис. 4.19. Признак, отмечающий участки коррекции крена и тангажа при $|\dot{V}| < 0.05 m/c^2$

Средние погрешности оценивания крена и тангажа составляют 0.15 – 0.18 градуса. Погрешности обусловлены приближенностью выполнения допущения $\left|\dot{V}\right| = 0$. Число участков коррекции составляет примерно 20% от полетного времени, что вполне достаточно. Еще один вариант коррекции представлен ниже;

2) *только по сигналам перегрузок, поступающим от ДЛУ, когда, например, недоступны сигналы составляющих земной скорости от ПСН*. В этом случае матрица *G*, определяемая соотношением (4.70) принимает вид:

$$G = e_x H^{-1} = H^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

По сути реализуется алгоритм коррекции с использованием маятниковой гировертикали, для корректной работы которого необходимо выполнение более жестких условий $\dot{V}_x \approx 0, \dot{V}_y \approx 0, \dot{V}_z \approx 0$ и $\omega_x \approx 0, \omega_y \approx 0, \omega_z \approx 0$, характерных для прямолинейного полета с установившимися составляющими скорости $V_x = const, V_y = const, V_z = const$. При выполнении указанных условий можно получить погрешности, не превышающие полученных в первом варианте.

***Пример* 2.** Рассматривается задача оценивания-коррекции углов крена, курса и тангажа по информации приемника спутниковой навигации – ПСН – и датчиков линейных ускорений – ДЛУ. Первичное счисление углов осуществляется БИНС на кватернионах.

Ранее для решения этой задачи применялся алгоритм коррекции на основе фильтра первого порядка приближения по типу фильтра Калмана. Алгоритм позволяет весьма точно корректировать указанные углы, но заказчика не устроили его высокая сложность и достаточно высокие требования к вычислительной производительности процессора ввиду необходимости решения большого числа уравнений фильтра.

Цель данного исследования состояла в построении простого и экономичного в вычислительном отношении фильтра, позволяющего решать ту же задачу, пусть и с несколько худшей точностью.

Постановка задачи. Рассматриваются векторы наблюдений-измерений:

$$Z = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z \end{bmatrix}^T; \qquad (4.81)$$

$$\bar{Z} = \begin{bmatrix} f_x & f_y & f_z \end{bmatrix}^T; \tag{4.82}$$

$$\begin{aligned} f_x &= \sin(\vartheta) + (\dot{V}_x + V_z\,\omega_y - V_y\,\omega_z)/g \\ f_y &= \cos(\vartheta)\cos(\gamma) + (\dot{V}_y + V_x\,\omega_z - V_z\,\omega_x)/g \\ f_z &= -\cos(\vartheta)\sin(\gamma) + (\dot{V}_z + V_y\,\omega_x - V_x\,\omega_y)/g \end{aligned} \quad . \tag{4.83}$$

Здесь

$$\begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} = (C_B^N)^T \begin{bmatrix} V_{Nснс} \\ V_{Uснс} \\ V_{Eснс} \end{bmatrix} \quad , \tag{4.84}$$

$V_{Nснс}$, $V_{Uснс}$, $V_{Eснс}$ - проекции вектора земной скорости, полученные от ПСН. Производные скоростей вычисляются с использованием фильтров низкой частоты (ФНЧ)

$$\begin{aligned} \dot{\hat{V}}_{xyz} &= \dot{u}_{2xyz} \\ \dot{u}_{1xyz} &= -(1/T)\cdot u_{1xyz} + (1/T)\cdot \hat{V}_{xyz} \\ \dot{u}_{2xyz} &= -(1/T)\cdot u_{2xyz} + (1/T)\cdot u_{1xyz} \end{aligned} \quad , \tag{4.85}$$

где T – постоянная времени фильтра нижних частот. Матрица Якоби вектора наблюдений-измерений имеет вид:

$$H = \frac{\partial \bar{Z}}{\partial x} = \begin{bmatrix} \partial f_x/\partial\vartheta & \partial f_x/\partial\gamma & \partial f_x/\partial\psi \\ \partial f_y/\partial\vartheta & \partial f_y/\partial\gamma & \partial f_y/\partial\psi \\ \partial f_z/\partial\vartheta & \partial f_z/\partial\gamma & \partial f_z/\partial\psi \end{bmatrix}. \tag{4.86}$$

В (4.86) выражения для частных производных весьма громоздкие и здесь их приводить не будем. В исходном алгоритме типа фильтра Калмана уравнения объекта приняты в виде

$$x_i = x_{qi} + w_i \quad , \tag{4.87}$$

где $x_{qi} = \begin{bmatrix} \vartheta_{qi} & \gamma_{qi} & \psi_{qi} \end{bmatrix}^T$ – вектор , в котором искомые углы крена, тангажа и рыскания рассчитаны по алгоритму БИНС на кватернионах; w_i – вектор возмущений с ковариационной матрицей Q. Исходный алгоритм оценивания представляется фильтром 1-го порядка

$$\begin{cases} \hat{x}_i = \bar{x}_{i-1} + K_i(Z_i - \bar{Z}_i), \\ \bar{P}_i = \hat{P}_{i-1} + Q, \\ K_i = \bar{P}_i H_i^{\mathrm{T}} (H_i P H_i^{\mathrm{T}} + R_i)^{-1}, \\ \hat{P}_i = (I - K_i H_i)\bar{P}(I - K_i H_i)^{\mathrm{T}} + K_i R K_i^{\mathrm{T}}, \end{cases} \tag{4.88}$$

выполняющим рекуррентное вычисление апостериорного распределения $N(x_i, P_i)$ по априорному распределению $\overline{P_i} = M\left[\overline{x_i}\,\overline{x_i^T}\right]$ и текущему измерению Z_i. Недостатки:

-необходимость решения в каждом i-том такте вычислений большого числа уравнений для вычисления матрицы (4.86) Якоби;

-необходимость решения большого числа уравнений в фильтре (4.88).

Попробуем построить наблюдатель для углов (а по сути опять-таки корректор, так как счисление углов осуществляется в БИНС) γ, ϑ, ψ на основе рассмотренной выше теории, опирающейся на общий принцип изоморфизма.

Как видно из (4.81) - (4.83), имеем два независимых вектора наблюдений–измерений одних и тех же величин в один и тот же момент времени. Следовательно, между этими векторами должна существовать зависимость в форме тождественного отображения-изоморфизма, представляющего собой в данном случае единичную матрицу размера m=3, то есть $I_m = e_Z : \overline{Z} \to Z$, где e_Z - единица на Z .

Прежде, чем строить коммутативную диаграмму, соответствующую рассматриваемому случаю коррекции, обратим внимание, что в уравнении (4.83), характеризующем связь между вектором «измерений» $\overline{Z}$ и вектором состояния $X = [\gamma, \vartheta, \psi]^T$ в связанной системе координат, отсутствует угол рыскания ψ . На самом деле зависимость $\overline{Z}$ от ψ имеется, так как составляющие производной от спутниковых скоростей $\dot{V}_x$, $\dot{V}_y$ и $\dot{V}_z$, а также составляющие самих спутниковых скоростей V_x, V_y, V_z получены путем перерасчета в связанную СК соответствующих скоростей и их производных из навигационной СК (НСК) с помощью матрицы пересчета $\left(C_B^N\right)^T$ по формуле (4.84). В матрице C_B^N присутствуют все три угла, составляющие вектор состояния.

Таким образом, уравнение (4.83) характеризует сложную нелинейную связь вектора наблюдений-измерений $\overline{Z}$ и вектора состояния *X*. Это означает, что существуют траектории ЛА, на которых наблюдаемы не только углы γ, ϑ, но и угол рыскания (курса) ψ. Строить наблюдатель в нелинейном варианте связи (4.83) весьма затруднительно. Линеаризируем (4.81) - (4.83) по методике, рассмотренной в параграфе 4.3, и упростим задачу. Наблюдатель-фильтр 1-го порядка может быть получен из уравнений

$$\begin{cases} \overline{Z}_i = \overline{Z}_{i-1} + \dfrac{\partial \overline{Z}_i}{\partial X_i} \vartriangle X_i, \ \vartriangle \overline{Z}_i = H \vartriangle X_i, \\ X_i = X_{i-1} + \vartriangle X_i, \end{cases} \tag{4.89}$$

где $H = \dfrac{\partial \overline{Z}_i}{\partial X_i}$ - матрица Якоби (4.86). Коммутативная диаграмма для (4.89) имеет вид, показанный на рис. 4.20.

$$\begin{tikzcd} \vartriangle Z \arrow[rr, "e_Z = I_m"] \arrow[dr, "G"'] & & \vartriangle \overline{Z} \\ & \vartriangle X \arrow[ur, "H"'] & \end{tikzcd}$$

Рис. 4.20. Коммутативная диаграмма рассматриваемой задачи

Как видно из рис. 4.20, наблюдатель *G*, позволяющий определить приращение $\vartriangle X$ искомого вектора состояния, должен удовлетворять соотношениям:

$$\begin{cases} e_Z = I_m = HG, \\ G = H^{-1} e_Z = H^{-1} I_m = H^{-1} \\ G^{-1} = e_Z H = H; \\ GG^{-1} = H^{-1} H = e_x; e_x e_x = e_x. \end{cases} \tag{4.90}$$

В начале по $e_Z = I_m$ и известной из (4.86) матрицы Якоби *H* определяем обратную матрицу $G^{-1} = H$. Далее из равенства $e_Z = I_m = HG$ по *H* и единичной матрице I_m определяем $G = H^{-1}$ как обратную матрицу к *H* (в силу ее единственности), то есть вычисляем H^{-1} с точностью до изоморфизма $e_Z = I_m$ внутри коммутативной диаграммы. Таким способом можно вычислить обратную H^{-1} даже в случае, когда матрица Якоби неквадратная, а такое вполне возможно. И, наконец,

проверяем выполнение проверочных соотношений – см. 4-ю строку в (4.90). Отметим, что в этой строке единица e_x на $\triangle X$ может быть, и как правило является, неединичной матрицей. Важно лишь, чтобы выполнялось соотношение $e_x = GH = GG^{-1} = H^{-1}H$. Кроме того, должно выполняться условие $\det e_x = 0$.

Задача, по сути, решена: с помощью определенной нами матрицы H^{-1} из (4.89) вычисляем приращение вектора состояния $\triangle X_i$ по формуле $\triangle X_i = H^{-1}\triangle \overline{Z}_i$ и далее по второй формуле из (4.89) – искомый вектор X_i.

Таким образом, основные уравнения для фильтра-корректора 1-го порядка имеют вид:

$$\begin{cases} \triangle X_i = H_i^{-1}(\overline{Z}_i - \overline{Z}_{i-1}), \\ X_i = X_{i-1} + \triangle X_i, \end{cases} \tag{4.91}$$

где $\overline{Z}_i$, $\overline{Z}_{i-1}$ определяются с помощью соотношений (4.82) - (4.85); H_i^{-1} на каждом шаге коррекции определяется как обратная к матрице Якоби (4.86), но не как обычная обратная, а «обратная с точностью до изоморфизма $e_Z = I_m$», то есть обратная внутри коммутативной диаграммы на рис. 4.20. Для ее вычисления, как указывалось в комментарии к формуле (4.90), используем формулу

$$e_Z = I_m = HG = HH^{-1},$$

с помощью которой по H и единичной матрице $e_Z = I_m$ определяем $H^{-1} = G$. Формулу (4.91) можно переписать в более «привычном» виде

$$X_i = X_{i-1} + H_i^{-1}(\overline{Z}_i - \overline{Z}_{i-1}). \tag{4.92}$$

И, наконец, поскольку должен существовать изоморфизм между векторами наблюдения-измерения (4.91) Z и (4.92) $\overline{Z}$, формулу (4.92) можно заменить на формулу

$$X_i = X_{i-1} + H_i^{-1}(Z_i - \overline{Z}_i), \tag{4.93}$$

что более корректно для индексов i и i-1, так как дифференцирование в (4.89) осуществлялось не по времени, а по вектору X. Можно промоделировать оба варианта алгоритма – с формулами (4.92) и (4.93).

Таким образом, фильтр Калмана (4.88) заменяется фильтром, точнее, простым наблюдателем-корректором (4.92) или (4.93). Наличие в (4.92) и (4.93) обратной матрицы H_i^{-1} не усложняет алгоритм, так как в (4.88) тоже требуется вычислять обратную матрицу на каждом шаге коррекции, причем более сложную по структуре.

Итак, возможны следующие варианты алгоритма:

1) основной вариант: счисление углов с высокой частотой f_1 производится по известному алгоритму БИНС на кватернионах и периодически, с более низкой частотой f_2 поступления информации от ПСН, осуществляется коррекция счисленных углов по формуле (4.93) с использованием векторов наблюдений-измерений $Z_i, \overline{Z}_i$, формируемых, соответственно, по синхронизированным сигналам ДЛУ и ПСН. При этом в каждом такте коррекции обновляется матрица H_i^{-1} по информации об углах, полученной из БИНС, и по информации о составляющих скоростей в связанной СК, рассчитанных по сигналам ПСН;

2) вариант алгоритма, в котором не используются сигналы ДЛУ: все то же самое, но используется «более эвристическая» формула (4.92), в которой фигурируют только сигналы от ПСН и счисленные углы от БИНС;

3) возможен вариант алгоритма, в котором вместо ПСН в качестве датчика составляющих скоростей в связанной СК используется система воздушных сигналов. Этот вариант требует дополнительных исследований с целью получения формул для расчета составляющих скоростей в СвСК по информации СВС – будет другая матрица Якоби.

Разработанные наблюдатели-корректоры пока не моделировались с учетом погрешностей и шумов реальных датчиков и других факторов. Вместе с тем можно отметить, что в отличие от фильтра Калмана, который одновременно и неразрывно-взаимосвязанно выполняет функции и наблюдателя-корректора и фильтра (что не всегда хорошо: улучшение фильтрации приводит к затягиванию переходных процессов в наблюдателе и к снижению точности и наоборот), в данном случае синтезирован «чистый» наблюдатель-корректор, который «мгновенно» восстанавливает истинные значения корректируемых величин. Фильтр по отношению к нему аддитивен, полностью независим и может выбираться отдельно в зависимости от характера шумов и других требований.

Литература к Главе 4 Раздела 1 Части 2:

1. *Калман Р., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971.
2. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А.А.Красовского. М.: Наука, 1987.
3. *Краснова С.А., Уткин В.А.* Каскадный синтез наблюдателей состояния динамических систем / Под ред А.П. Курдюкова. М.: Наука, 2006. 272 с.
4. *Шахтарин Б.И.* Фильтры Винера и Калмана. М.: Гелиос АРВ, 2008. - 408 с. [Shahtarin B.I. Wiener and Kalman filters. Moscov, Gelios ARV, 2008. – 408 p. (in Russian)]
5. *Luenberger D.B.* Observers of multivariable systems // IEEE Trans. 1966. Vol. AC-11. P. 190–197.
6. *Чернодаров А.В.* Контроль, диагностика и идентификация авиационных приборов и измерительно-вычислительных комплексов. М.: ООО «Научтехлитиздат», 2017. 300 с.
7. *Isidori A.* Nonlinear control systems. 3rd Ed.. Berlin: Springer-Verlag. 1995.
8. *Ciccarella G., Dalla Mora M. And German A.* A Luenberger-like observer for nonlinear systems // Int. J. Control.1993. Vol. 57. №. 3. P. 537–556.
9. *Proychev Ph. and Mishkov R.L.* Transformation of Nonlinear Systems in Observer Canonical Form With Reduced Dependency on Derivatives of the Input // Automatica. 1993. Vol. 29. №2. P. 495–498.
10. *Shouse K.R., Taylor D.G.* Discrete time observer for singularly pertubed continuous time systems // IEEE Trans. Automat. Control. 1993.
11. *Уонэм М.* Линейные многомерные системы управления: Геометрический подход. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980. 376 с.
12. *Кулабухов В.С.* Принцип изоморфности в задаче реализации и его приложения к анализу свойств систем управления // В сборнике: XII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014. Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН. 2014. С. 438-448.
13. *Кулабухов В.С.* Общий принцип изоморфизма в теории систем // Cloud of Science. 2018. Т.5. №3. С. 400-472.
14. *Кулабухов В.С.* Синтез изоморфных наблюдателей состояния систем // Материалы IV научно-практической конференции памяти О.В. Успенского [текст] / Сборник докладов. М.: Издательский дом Академии им. Н.Е. Жуковского, 2017. С. 28-36.
15. *Kulabukhov V.S.* Isomorphic observers of the linear systems state // Workshop on Materials and Engineering in Aeronautics (MEA2017) 15–16 November

2017, Moscow, Russian Federation. doi:10.1088/1757-899X/312/1/012016. p. 012016.

16. *Кулабухов В.С.* Синтез линейных изоморфных наблюдателей // Материалы XIV Всероссийской научно-технической конференции «Научные чтения по авиации, посвященные памяти Н.Е. Жуковского» [текст]. Сборник докладов. М.: Издательский дом Академии им. Н.Е. Жуковского, 2017. С. 271-279.
17. *Кулабухов В.С.* Изоморфные наблюдатели состояния и робастная фильтрация сигналов систем // Радиотехника. 2017. №8. С. 50-55.
18. http://portal.tpu.ru/SHARED/v/VOS/study/disc1/Tab/tema06.pdf (дата доступа -14.02.2023 г.)
19. *Калман Р.Е.* Идентификация систем с шумами // УМН. 1985. Т. 40. Вып.4 (244). С. 27-41.
20. *Кулабухов В.С.* Общий принцип изоморфизма: идентификация моделей и калибровка датчиков // XIII Всероссийское совещание по проблемам управления. ВСПУ-2019. Москва 17-20 июня 2019 г. URL: https://vspu2019.ipu.ru/files/vspu/%D0%94%D0%BE%D0%BA%D0%BB%D0%B0%D0%B4%D1%8B%20%D0%92%D0%A1%D0%9F%D0%A3-2019/19%20%D0%A3-765/%D0%9A%D1%83%D0%BB%D0%B0%D0%B1%D1%83%D1%85%D0%BE%D0%B2%D0%92%D0%A1.pdf (дата доступа 31.08.2020)
21. *Кулабухов В.С., Цацин А.А., Заец В.Ф. и др.* Патент RU 2 714 612 C1 Способ идентификации нелинейных систем. Опубликован 18.02.2020, бюллетень №5. Патентообладатель: АО МНПК «Авионика».
22. *Абгарян К.А.* Матричное исчисление с приложениями в теории динамических систем. Учеб. Пособие: Для вузов. М.: Физматлит, 1994. 544 с.
23. *Вавилов Ю.А.* Системы автоматического управления полетом. М.: Изд. ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского. 2009. 412 с.

Глава 5

Интеграция наблюдателя и регулятора в информационно-управляющей системе

Рассматривается задача и предлагаются формализованный метод и прикладная технология интеграции наблюдателя и регулятора в следящей системе управления объектом достаточно произвольного вида на основе общего принципа изоморфизма. Исходя из указанного принципа доказана фундаментальная теорема об интеграции наблюдателя и регулятора и как ее следствие - теорема разделения задач их синтеза. *Результатом исследования являются обоснование структуры и формализация метода формирования интегрированной информационно-управляющей системы*, включающей множество (иерархию) вложенных друг в друга контуров, реализующих всю требуемую совокупность соподчиненных целей управления объектом, *а так-же доказательство необходимости и достаточности обратной связи в форме изоморфного интегранта для обеспечения полной наблюдаемости и точной управляемости объекта* в отличие от известных, по сути, эвристических методов, в начале постулирующих необходимость и структуру обратной связи, а уже затем рассматривающих процедуры синтеза наблюдателей и регуляторов. *Такая обратная связь обеспечивает как высокое качество управления, так и повышение робастности контура в отношении параметрических возмущений и шумовых воздействий*. Использование математического аппарата современной алгебры, основанного на морфизмах, обеспечило высокий уровень общности доказанных утверждений, а также *позволило строго обосновать и предложить практически реализуемый формализованный метод разделения задач синтеза наблюдателя и регулятора и последующего их объединения в интегрированной информационно-управляющей системе*. Особенности и преимущества рассматриваемого метода проиллюстрированы на примере нелинейных и линейных систем.

Введение. В первой части книги и ранее в работах [1, 2] был сформулирован общий принцип изоморфизма и предложена новая парадигма в теории систем, позволившая на основе этого единственного принципа обосновать и строго формализовать все основные понятия и свойства систем (простая, сложная, большая системы, эмерджентность, каузальность, наблюдаемость, управляемость, контролируемость, комплексируемость систем, а также постулаты и принципы обратной связи, суперпозиции, относительности, дуальности и др.). В работе [2] и

здесь в главах 9-11 первой части книги общий принцип изоморфизма позволил вывести формальные условия интеграции (объединения) систем в более крупные образования-системы, называемые комплексами (комплексными или интегрированными системами), доказать известную теорему разделения для систем весьма общего вида и исследовать общие свойства интегрированных систем. Задачи синтеза или интеграции систем в такие комплексы весьма актуальны [3, 4]. В этой главе результаты общей теории интеграции, изложенные в [2] и в главах 9-11 первой части книги, конкретизируются в приложении к формально строгому разделению задач синтеза наблюдателя и регулятора и к их последующему объединению (интеграции) в единой информационно-управляющей следящей системе (ИУС).

Анализ показывает [2, 5-16], что существуют различные подходы к рассмотрению проблемы синтеза регулятора и наблюдателя в их тесной связи применительно к одному и тому же объекту. Наибольшие успехи в ее решении достигнуты на основе принципа (теоремы) разделения применительно к линейным системам как в обычной (на основе методов теории автоматического регулирования), так и в оптимизационной постановке [5-10]. Для линейных матричных систем разработаны подходы к решению этой проблемы в рамках теории вложения [11-16]. Вместе с тем *имеющиеся решения задач интеграции наблюдателя и регулятора получены для постулируемых из эвристических соображений структур контуров «наблюдения-управления» и соответствующих редуцированных постановок*. Эти, по сути, *частные решения иногда недостаточно корректно интерпретируются в отношении применимости для более общих случаев и условий, чем допускает теорема разделения* [5-10], а *иногда и прямо противопоставляются решениям, полученным на основе теоремы разделения* [14, 15].

В целом, к настоящему времени *в теории не сложился какой-либо единый, фундаментальный, формализованный подход* к синтезу интегрированных контуров «наблюдения-управления» не только для нелинейных систем, но и применительно к простым линейным системам, имеющим важное прикладное значение. *Формальные правила разделения задач синтеза наблюдателя и регулятора и корректные условия их интеграции в единой следящей системе управления объектом достаточно общего вида не определены*. В связи с этим на практике часто используют эвристические приемы. Сказанное обусловливает по-прежнему высокую актуальность исследований в области выявления формальных условий интеграции наблюдателей и регуляторов.

В данной работе на основе фундаментальной теории интеграции, опирающейся на общий принцип изоморфизма и изложенной в работах [1-3, 17, 18] и в

главах 9-11 первой части книги, предлагается строгая формализация постановки и решение как задачи разделения процедур синтеза регулятора и наблюдателя для одного и того же объекта достаточно произвольного вида, так и задачи интеграции наблюдателя и регулятора в единую ИУС. Эффективность предлагаемого метода демонстрируется в приложении к нелинейным и линейным системам.

5.1. Разделение и интеграция систем с точностью до изоморфизма

Рассматриваются в общем случае нелинейные системы: $\sum_1 = (U, s_R, X)$ – система управления, $\sum_2 = (X_0, s_N, Z)$ – система наблюдения (оценивания), $\sum = (X_0, s^*, X)$ – управляемая система (процесс или объект). Обозначения трактуются в соответствии с [2, 17, 18] и главами 9-11 первой части книги и будут ясны из контекста. В начале проанализируем случай, когда отображение-структура системы s^*: $X_0 \to X$ изоморфно отображает входное состояние X_0 в выходное X. *Необходимо определить формальные условия разделения задач синтеза регулятора* s_R:$U \to X$ *и наблюдателя* s_N: $X_0 \to Z$, *а затем условия объединения объекта управления, системы оценивания и системы управления в единую ИУС, обеспечивающую целенаправленное* (*и с заданным качеством*) *управление объектом* $\sum$. При этом никакие предварительные условия на структуру контура «наблюдения-управления» не накладываются. Формирование контура по некоторым формализованным правилам, а также выявление этих правил как раз и рассматриваются в качестве одной из главных задач синтеза ИУС. В качестве второй и не менее важной рассматривается задача обеспечения качества наблюдения-фильтрации сигналов в контуре и качества целенаправленного управления (или, как говорят инженеры, «отработки» задающего воздействия). Требуется лишь, чтобы объект $\sum$ удовлетворял условиям наблюдаемости и управляемости с точностью до изоморфизма s^*, определенным в [2] и в главах 9-11 первой части книги соответствующими теоремами.

Для фиксированной структуры s^* объекта коммутативная диаграмма интегрированной системы, объединяющей систему наблюдения и систему управления, показана на рис. 5.1, аналогичном рис. 9.1 из 9-й главы первой части книги.

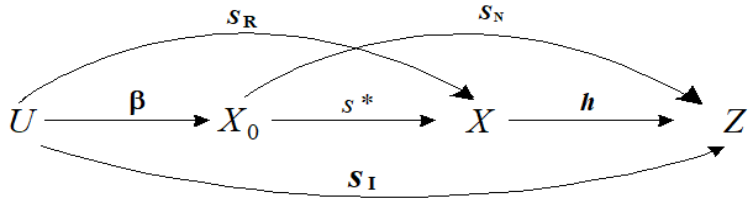


Рис. 5.1. Коммутативная диаграмма интегрированной системы

Общие условия интеграции указанных систем определены доказанной в этой главе теоремой 10. Ее формулировка с незначительной корректировкой повторяется ниже.

Т е о р е м а 1 *(об интеграции систем). Необходимыми и достаточными условиями интеграции системы наблюдения* $\sum_2 = (X_0, s_N, Z)$ *и системы управления* $\sum_1 = (U, s_R, X)$ *в единую ИУС, обеспечивающую целенаправленное управление объектом* $\sum = (X_0, s^*, X)$, *являются:*

1) *условие наблюдаемости* $s_N = hs^*$ *с точностью до изоморфизма* s^*;

2) *условие управляемости* $s_R = s^*\beta$ *с точностью до изоморфизма* s^*;

3) *общее условие изоморфного детерминизма функционирования* системы, определяемое существованием композиции-комплекса отображений или «интегранта»

$$s_I = hs^*\beta = h(s^*\beta) = hs_R = (hs^*)\beta = s_N\beta\ ,$$
$$s_I = hs_R = s_N\beta. \qquad (5.1)$$

В соответствии с теоремой 1 системы наблюдения и управления могут быть объединены в интегрированную систему-комплекс тогда и только тогда, когда существует интегрант s_I, определяемый по формуле (5.1), позволяющий по имеющемуся на входе вектору управления U формально строго и однозначно вычислить вектор Z показаний датчиков и, наоборот, по известному вектору Z вычислить требуемый для его получения вектор U, то есть замкнуть *обратную связь* от Z к U.

Таким образом, *обратная связь здесь не вводится в качестве постулата, как это обычно делается, а вычисляется в форме интегранта* s_I, *существование которого является необходимым и достаточным условием корректного объединения наблюдателя и регулятора в единую систему.* Интегрант s_I в соответствии с (5.1) объединяет оба условия - условие наблюдаемости и условие управляемости системы с точностью до одной и той же модели-изоморфизма s^*, характеризующей структуру системы. *Указание «с точностью до модели-изоморфизма»* является очень важным и означает, что все высказанные утверждения справедливы строго в рамках коммутативной диаграммы, построенной на изоморфизме s^*. Дело в том, что в данном случае отображение s^* должно обладать свойством изоморфизма изначально, в обычном смысле - вне композиций с другими отображениями, то есть вне коммутативной диаграммы. В этом случае оно однозначно, *с точностью до изоморфизма* s^*, определяет свойства всех других отображений, составляющих с ним композицию в коммутативной диаграмме. Более подробно смысл условия «с точностью до изоморфизма» пояснен в первой

части книги и в работе [2]. Отметим также, что условие изоморфности отображения s не является слишком сильным. Например, все стационарные линейные динамические системы, часто используемые на практике, обладают свойством изоморфизма в силу обязательной обратимости фундаментальной матрицы решений соответствующих систем дифференциальных уравнений [5, 19]. Кроме того, в [2] и в главах 9-11 первой части книги рассмотрены случаи интеграции, когда свойством изоморфизма в обычном смысле (до заключения в коммутативную диаграмму) обладает не отображение s, характеризующее собственно объект управления, а какое-либо другое отображение, например, h, либо β. Вместе с тем напомним, что ранее в главах 1-3 и 4 этой части книги нами было показано, что *управляемый и наблюдаемый динамические объекты путем понижения порядка модели могут быть приведены к виду, при котором в качестве исходного, по сути, может рассматриваться именно изоморфное в обычном смысле отображение* s, характеризующее объект управления и наблюдения, а точнее - тождественное обычное единичное отображение $I_n=e_X$, определенное на X_0 и X. Вообще говоря, «приведенное» после понижения порядка изоморфное отображение s может быть разным при вычислении регулятора и наблюдателя, так как размеры векторов Z и U могут быть неодинаковыми и эти вектора могут «взаимодействовать» с разными, или даже с непересекающисмися подмножествами компонент векторов X_0 и X. Однако после вычисления регулятора и наблюдателя можно и необходимо вернуться к исходным уравнениям динамики рассматриваемого наблюдаемого и управляемого объекта, в которых будет и должно фигурировать одно и то же изоморфное отображение s как со стороны регулятора, так и со стороны наблюдателя.

Таким образом, *будем рассматривать интеграцию регулятора и наблюдателя в информационно-управляющей системе с точностью до изоморфизма* s^*. Этот случай является весьма общим. На случаях, когда в качестве исходного изоморфизма рассматривается отображение h, либо β останавливаться не будем. Еще *более общим является случай, когда в качестве исходного изоморфизма рассматривается обычное тождественное единичное отображение* $I_n=e_X$, *определенное на заданном* $X_{зад}$ *и текущем* X *состояниях объекта и формализующее цель управления, состоящую в обеспечении тождества* $X \equiv X_{зад}$ *при всех произвольно изменяющихся* $X_{зад}$. По сути, это означает, что указанный исходный изоморфизм $I_n=e_X$ есть «единичная» (в общем случае матричная) обратная связь (ОС) от X к $X_{зад}$, а соответствующая замкнутая этой ОС информационно-управляющая система является *следящей*. Этот случай мы рассмотрим позднее. В начале проанализируем случай интеграции с точностью до изоморфизма s^*.

Интеграция систем наблюдения и управления с точностью до общего для них изоморфизма s^* обеспечивает возможность точного, полного и однозначного предсказания показаний Z датчиков по значениям управляющих воздействий U и, наоборот, такого же точного, полного и однозначного определения по показаниям Z датчиков, управлений U, воздействовавших на систему. Невыполнение хотя бы одного из условий теоремы не обеспечивает возможность интеграции, так как не обеспечивает коммутативность диаграммы на рис. 5.1, что доказывает их *необходимость*. При этом никакие дополнительные условия не нужны для реализации указанной возможности, что доказывает их *достаточность* и теорему в целом.

Если все отображения h, s^*, β на рис. 5.1 заданы, коммутируют, то есть образуют композицию $s_I=hs^*\beta$, то *единственность интегранта* s_I непосредственно следует из приведенной коммутативной диаграммы и из фундаментальной леммы и теоремы о реализации, доказанных в [2] и в первой части книги на основе общего принципа изоморфизма. Действительно, условия наблюдаемости и управляемости с точностью до изоморфизма s^* подразумевают изоморфизм отображения-структуры объекта s^* и удовлетворение отображениями h и β таким требованиям, при которых обеспечивается существование отображений s_N и s_R, характеризующих структуры наблюдателя и регулятора. Наличие единого для наблюдателя и регулятора изоморфизма s^* обеспечивает возможность их объединения («склейки») в единую интегрированную систему-комплекс, то есть обеспечивает существование соответствующей замкнутой относительно изоморфизма s^* композиции отображений - интегранта со структурой (5.1). В соответствии с фундаментально леммой нашей теории интегрант s_I, если он существует, является изоморфизмом с точностью до изоморфизма s^* и, следовательно, является *единственным в коммутативной диаграмме*.

Диаграмма на рис. 5.1 построена *исходя из классических определений управляемости и наблюдаемости* [2, 5]. Вместе с тем на практике по показаниям Z датчиков восстанавливать (наблюдать), как правило, необходимо не вектор X_0 сигналов на входе объекта управления посредством изоморфного с точностью до изоморфизма s^* наблюдателя $(s_N)^{-1}:Z\rightarrow X_0$, а подлежащую регулированию векторную величину-сигнал X на его выходе. Это связано с тем, что не все, необходимые для управления, компоненты вектора X измеряются непосредственно (фигурируют в показаниях Z датчиков), а замыкать контур управления *обратной связью*, то есть некоторым регулятором $(s_R)^{-1}:X\rightarrow U$, необходимо по всем компонентам вектора X или как раз по тем его компонентам, которые непосредственно не

измеряются. Вектор X можно наблюдать, используя изоморфный с точностью до изоморфизма s^* наблюдатель $\tilde{s}_N$, или, точнее, обратный ему наблюдатель

$$(\tilde{s}_N)^{-1} = s^*(s_N)^{-1} = s^*(hs^*)^{-1} = s^*(s^*)^{-1}h^{-1} = h^{-1},$$

где обратное h^{-1} определяется с точностью до изоморфизма s^* по правилам, изложенным в первой части книги и в [2] применительно к фундаментальной лемме. С учетом этих замечаний коммутативная диаграмма преобразуется к виду, показанному на рис. 5.2.

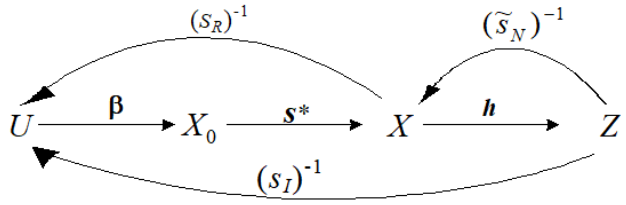


Рис. 5.2. Коммутативная диаграмма интегрированной системы

Коммутативные диаграммы, представленные на рис. 5.1 и рис. 5.2 эквивалентны. Вместе с тем диаграмма на рис. 5.2 более наглядно иллюстрирует *теорему разделения* для синтеза регулятора и наблюдателя, доказанную в [2] и в главе 10 первой части книги с акцентом на линейные системы. Ниже приводится ее уточненная формулировка применительно к весьма общему случаю произвольных, в том числе нелинейных, но удовлетворяющих условиям теоремы об интеграции, отображений h, s^*, β.

Т е о р е м а 2 (*теорема разделения*). *Для динамической системы с изоморфной структурой* s^* *интегрант* $(s_I)^{-1}$ *является композицией регулятора и наблюдателя*

$$(s_I)^{-1} = (s_R)^{-1}(\tilde{s}_N)^{-1}, \tag{5.2}$$

где

$$(s_R)^{-1} = \beta^{-1}(s^*)^{-1}, \tag{5.3}$$

$$(\tilde{s}_N)^{-1} = h^{-1}, \;\; h^{-1} = s^*(s_N)^{-1}. \tag{5.4}$$

Теорема 2, по сути, является следствием теоремы 1. Удовлетворение системой условиям теорем 1 и 2 обусловливает выполнение необходимых и достаточных условий разделения задач синтеза и последующей интеграции наблюдателя и регулятора в единой системе управления.

Теорема разделения позволяет корректно и строго декомпозировать общую задачу синтеза управления объектом на две «независимые» задачи: задачу синтеза изоморфного наблюдателя, обеспечивающего наблюдение выхода X

объекта, и задачу синтеза изоморфного регулятора, представляющего собой обратную связь от выхода X объекта к управляющим воздействиям U и обеспечивающего управление объектом в соответствии с заданной извне целью. Слово «независимые» взято в кавычки в связи с тем, что у этих задач, решаемых по отдельности, должен иметься *обязательный общий компонент – одна и та же изоморфная модель объекта*, посредством которой эти задачи связываются в единую задачу обеспечения полной наблюдаемости-управляемости объекта и, в целом, в последующую задачу целенаправленного управления.

Сначала решается задача синтеза наблюдателя $(\tilde{s}_N)^{-1}$, реализующего обратную связь от вектора Z показаний датчиков к полному вектору состояния X. Затем решается задача синтеза регулятора $(s_R)^{-1}$, замыкающего обратную связь от наблюдаемого вектора X к необходимому для его реализации вектору управлений U. Композиция обратных связей, реализуемых посредством наблюдателя $(\tilde{s}_N)^{-1}$ и регулятора $(s_R)^{-1}$, образует общую обратную связь от вектора Z к вектору U в форме интегранта (5.2). Как видно из (5.2), (5.3) и (5.4), в рамках коммутативной диаграммы, отвечающей теореме разделения (см. рис. 5.2), может быть определена и структура всех обратных связей, необходимых для управления объектом. Критерии существования, правила и примеры определения регулятора и наблюдателя изложены соответственно в главах 1-3 и 4 этой части книги.

В целом, теорема разделения *доказывает необходимость и достаточность существования обратной связи* со структурой $(s_I)^{-1}$ для однозначного, полного и точного управления объектом, а также *определяет и структуру обратной связи, которая не ограничивается лишь структурой регулятора, а является композицией* (5.2) *регулятора* (5.3) *и наблюдателя* (5.4). Существование такой композиции *для систем весьма общего вида* обеспечивает возможность декомпозиции процедуры разработки, то есть раздельной разработки регулятора и наблюдателя и последующего их объединения-синтеза в интегрированную систему, что и составляет *практическое значение теоремы разделения.*

На самом деле *теорема разделения в приведенной формулировке характеризует только потенциальную, «структурную» возможность интеграции наблюдателя и регулятора в единую ИУС, исходя из заданной структуры отображений h, s*,* β, то есть доказывает существование и единственность интегранта, а также возможность его декомпозиции (факторизации) при указанных выше условиях. *Возможность синтеза интегрированной ИУС, обеспечивающей*

целенаправленное управление объектом s при условии, что интегрант существует, то есть объект наблюдаем и управляем, будет проанализирована ниже отдельно*.

Например, для скалярного объекта (у которого все векторы U, X_0, X, Z имеют лишь по одной компоненте) регулятор в соответствии с (5.3) определяется тривиальным обращением скалярной «передаточной функции» объекта W_O (это показано в главах 1-3 этой части книги и в работах [20, 21]), являющейся композицией $W_O = s^*\beta$, то есть

$$(s_R)^{-1} = (W_O)^{-1} = \beta^{-1}(s^*)^{-1}, \qquad (5.5)$$

а наблюдатель в силу того, что единственная компонента в X в этом случае измеряется непосредственно (то есть h=1), также тривиален и в соответствии с (5.4) равен $(\tilde{s}_N)^{-1} = 1$ (см. также главу 4 этой части книги и работы [22,23]).

Для многосвязного линейного объекта, у которого в общем случае размеры векторов U, X и Z разные, (например, U - r-вектор, X – n-вектор и Z – m-вектор), регулятор, как и ранее, определяется обращением «передаточной функции» объекта W_O, но уже по формуле, лишь по форме совпадающей с (5.5). В этом случае обратные β^{-1} и $(W_O)^{-1}$ в (5.5) должны определяться с точностью до некоторого изоморфизма по правилам, приведенным в главах 1-3 этой части книги. По таким же правилам (см. главу 4 этой части книги) должно определяться и обратное с точностью до некоторого изоморфизма отображение h^{-1}, которое в данном случае определяет структуру наблюдателя по формуле (5.4). Если ввести понятие «обобщенного («интегрированного») объекта управления» (ООУ), которое объединяет композицию $s_I = hs^*\beta$ всех трех известных отображений β, s^* и h, показанных на рис. 5.1 и на рис. 5.2, то, как видно из этих рисунков, интегрант $s_I = hs^*\beta$ как раз и характеризует общую структуру ООУ.

Из новой, более общей формулировки теоремы разделения, следует, что поведение интегрированной системы, в которой объединены в изоморфный с точностью до изоморфизма s^* интегрант $(s_I)^{-1}$ изоморфные с точностью до этого же изоморфизма регулятор $(s_R)^{-1}$ и наблюдатель $(\tilde{s}_N)^{-1}$, полностью предсказуемо, то есть *интегрированная ИУС является простой системой в смысле определения, принятого в* [2] и в главе 3 первой части книги. Понятно, что введенный нами ООУ также является в этом случае простым и полностью предсказуемым.

5.2. Анализ и синтез следящих интегрированных контуров управления

Коммутативная диаграмма на рис. 5.2 характеризует *идеальную наблюдаемую и управляемую динамическую систему* (или ООУ), не связанную ни с какими другими системами и *в этом смысле закрытую*. Если на входе такой системы *произвольно* менять вектор управляющих воздействий U, то на выходе системы будут *строго определенно и взаимно однозначно с* U меняться вектор состояния X (что характеризует управляемость системы) и вектор показаний датчиков Z (что характеризует наблюдаемость системы, так как изменение любой из компонент вектора состояния так или иначе отразится в показаниях датчиков).

Такая коммутативная диаграмма соответствует широкому кругу практических *задач регулирования*, в которых в качестве цели рассматривается формирование вектора показаний Z на выходе датчиков, строго отвечающего заданному вектору уставок-управлений U. Например, в качестве U может выступать напряжение питания на входе электромеханического привода, а показания Z датчика будут отражать отвечающее ему перемещение выходного штока. При этом перемещение штока может измеряться как непосредственно, так и опосредованно (например, путем построения наблюдателя за перемещением штока по результатам прямого измерения оборотов электродвигателя). *Контур управления в таких задачах регулирования является разомкнутым*, так как обратная связь в форме интегранта $(s_I)^{-1}$ физически, как правило, не реализуется.

Вместе с тем *на практике возникает более широкий круг задач управления*. *Часто реальные управляемые системы являются открытыми* в том смысле, что *вектор управлений* U на входе ООУ *меняется* не непосредственно и произвольно, а *в соответствии с некоторой целью управления*, которая может привноситься в рассматриваемую систему (ООУ) извне, например, из системы более высокого уровня (см. главы 1-3 этой части книги и работы [20, 21]). В этом случае *процедуру объединения наблюдателя и регулятора в единую, интегрированную ИУС необходимо осуществлять с учетом задаваемой извне цели управления.* Такая цель может формироваться за пределами рассматриваемого ООУ в форме его некоторого желаемого состояния $X_ж$. Потребуем, чтобы текущее состояние вектора X отслеживало произвольно изменяющееся желаемое состояние $X_ж$ в соответствии с движением эталонной модели (ЭМ), характеризуемой «передаточной функцией» $W_{эм}$. Под $W_{эм}$ понимается отображение, формирующее эталонное движение, то есть накладывающее требования на качество управления и, таким образом, ставящее в соответствие изменяемому вектору $X_ж$ некоторое заданное состояние $X_з$, которому должен в точности соответствовать выход X объекта управления

$$X_з = W_{эм}\, X_ж, \quad X = X_з. \tag{5.6}$$

Выражение «передаточная функция» здесь используется для обозначения отображения, записанного в общем случае не в операторной форме Лапласа, а в той же форме (относительно той же независимой переменной), что и другие отображения-операторы (h, s^*,β), показанные на рис. 5.2.

В идеальном случае восстановленное на выходе наблюдателя (5.4) состояние должно точно соответствовать состоянию X на выходе объекта и, соответственно, заданному состоянию $X_з$. В общем же случае в непосредственно измеряемом сигнале Z датчиков *могут присутствовать шумы*, проникающие и в наблюдаемое на выходе наблюдателя $(\tilde{s}_N)^{-1}$ состояние, которое обозначим $\tilde{X}$. Для их фильтрации необходимо применить фильтр с передаточной функцией $W_Ф$, позволяющий сформировать окончательную оценку $\hat{X}$ вектора состояния системы:

$$\hat{X} = W_Ф \tilde{X}. \qquad (5.7)$$

В главе 4 этой части книги и в работах [22, 23] показано, что процедура синтеза фильтра является внешней и независимой по отношению к процедуре синтеза изоморфного наблюдателя так же, как процедура синтеза эталонной модели независима от процедуры синтеза изоморфного регулятора (см. главы 1-3 и работы [17, 18]).

Исходя из коммутативной диаграммы, показанной на рис. 5.2, *наблюдаемый и управляемый объект* вместе с его окружением, необходимость которого обоснована в приведенных рассуждениях, можно представить в форме цепочки (композиции, «линии») отображений, проиллюстрированных на рис. 5.3, образующих *разомкнутый, открытый «линейный» контур регулирования-наблюдения.*

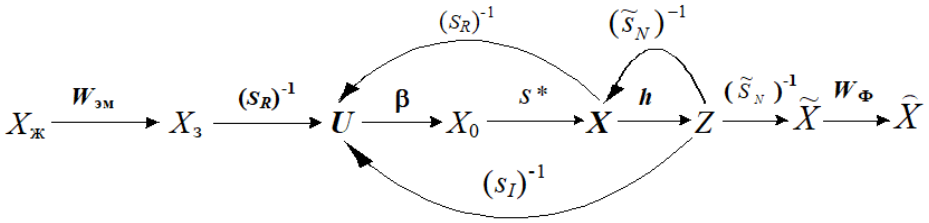


Рис. 5.3. Разомкнутый контур слежения за эталонной моделью

В этом контуре регулятор $(s_R)^{-1}$ отвечает за управляемость объекта, а эталонная модель (5.6) – за качество управления (см. главы 1-3 этой части книги и работы [20, 21]); наблюдатель $(\tilde{s}_N)^{-1}$ отвечает за наблюдаемость полного вектора выходов объекта, а фильтр (5.7) – за качество фильтрации шумов (см. главу 4 этой части книги и работы [22, 23]). Это обеспечивает возможность локализации не только задач синтеза регулятора и наблюдателя в соответствии с теоремой

разделения, *но и отделения от этих задач не менее важных задач обеспечения качества управления посредством синтеза эталонной модели и обеспечения качества фильтрации шумов посредством синтеза фильтра*.

То есть *контур обеспечивает полную аддитивность всех свойств*, необходимых для реализации цели $X_ж$. Выявленная аддитивность свойств в рассматриваемой задаче интеграции является примером проявления *фундаментального принципа суперпозиции*, справедливость которого доказана в главе 9 первой части книги и ранее в работе [2] на основе общего принципа изоморфизма в отношении не только линейных систем, но и систем весьма общего вида. Указанные принципы позволяют избежать возникновения в интегрированной ИУС различных «синергетических эффектов», обусловленных перекрестным взаимовлиянием рассматриваемых свойств и компонентов-устройств, обеспечивающих их реализацию. Это существенно упрощает как процедуры разработки контура управления, так и процедуры контроля за его функционированием.

Если в процессе управления изоморфная структура s^* системы остается неизменной, то разомкнутый контур будет абсолютно точно, полно и однозначно отрабатывать желаемое воздействие $X_ж$, поступающее на его вход. Однако на практике структура s^* часто подвергается искажениям и наблюдатель $(\tilde{s}_N)^{-1}$ и регулятор $(s_R)^{-1}$ уже не будут отвечать новой неизвестной структуре, так как они синтезированы по известной («идеальной») структуре s^*. В этом случае оценка $\hat{X}$ вектора состояния на выходе системы может значительно отличаться от желаемого состояния $X_ж$, *так как требование изоморфизма между этими состояниями в разомкнутом контуре в явном виде не накладывается*. *А именно это на самом деле и является целью управления.*

Реализация такого изоморфизма возможна двумя путями: либо путем непрерывной идентификации новой неизвестной структуры системы и соответствующей непрерывной корректировкой структур наблюдателя и регулятора, либо путем охвата разомкнутого контура новым явным изоморфизмом-целью *I:* $\hat{X} \to X_ж$ в форме дополнительной изоморфной обратной связи (ОС), обеспечивающей его робастность по отношению к некоторым допустимым возмущениям структуры системы.

В силу того, что процедура идентификации системы в процессе функционирования достаточно сложна, к ней целесообразно прибегать лишь при выходе контура за границы робастности, назначаемые нами, исходя из требуемой точности слежения $\hat{X}$ за $X_ж$. Для обеспечения робастности *открытой наблюдаемой и управляемой системы* (контура), показанной на рис. 5.3, вместо идентификации проще и предпочтительнее ввести дополнительную изоморфную

ОС по цели управления, как показано на рис. 5.4. Здесь *I:* $\hat{X} \to X_{ж}$ - *единичное изоморфное в обычном смысле отображение*, обеспечивающее точное соответствие между оценкой вектора состояния системы $\hat{X}$ и желаемым задающим воздействием $X_ж$, поступающим на ее вход, в условиях возмущений структуры *s**, то есть точное слежение $\hat{X}$ за $X_ж$.

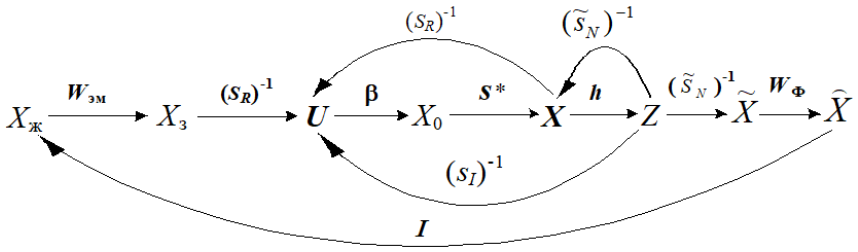


Рис. 5.4. Робастный следящий контур наблюдения и управления

В таком контуре обеспечивается выполнение равенства $\hat{X} = X_ж$ с точностью до «внешнего» изоморфизма-интегранта *I*, погружающего цель системы $X_ж$ внутрь новой, *расширенной наблюдаемой и управляемой системы*. *Система вновь становится замкнутой, но уже относительно другого изоморфизма*, а значит простой и полностью предсказуемой, обеспечивающей точную и полную отработку желаемого сигнала $X_ж$, то есть выполнение равенства $\hat{X} = X_ж$.

В этом случае *структура s* объекта управления может стать* (*или быть изначально*!) *вообще не изоморфной в обычном смысле*, но обязательно будет изоморфной с точностью до изоморфизма *I* (в соответствии с основной леммой), то есть внутри коммутативной диаграммы, *при условии, что будут выполняться композиции входящих в диаграмму отображений*. А *это условие является существенно более мягким и слабым в математическом смысле в сравнении с условием неизменности и изоморфности в обычном смысле отображения s**, так как возникающие в *s** изменения могут быть нивелированы в результате подбора отображений $W_{эм}$ и $W_Ф$ по определенным правилам, приведенным, например, в главах 1-3 и 4 этой части книги и в работах [20-23]. Основное правило таково: $W_{эм}$ и $W_Ф$ нужно выбирать такими, чтобы при малых изменениях в *s** не возникала ошибка («невязка») в слежении оценкой $\hat{X}$ за $X_ж$. Эту невязку обычно определяют в установившихся (статических) режимах работы контура, когда $X_ж$ = const на достаточно больших интервалах времени. Тогда контур, показанный на рис. 5.3, можно рассматривать как статический (контур программного управления, допускающий статическую ошибку), а контур на рис. 5.4 – астатический (точный, следящий контур управления с ОС, исключающий возникновение статической ошибки). На практике, в зависимости от требований к точности и быст-

родействию систем управления, в разных задачах управления можно использовать оба контура. В задачах, не требующих прецизионно точного управления, но требующих быстрого реагирования на управляющие воздействия, целесообразно применять простой статический разомкнутый контур. И, наоборот, в задачах, требующих более точного и вместе с тем несколько менее динамичного управления, целесообразно применять замкнутый астатический контур.

Робастность контура, показанного на рис. 5.4, в котором введена дополнительная ОС I: $\hat{X} \to X_ж$, объясняется тем, что контур коммутируется теперь не относительно изоморфизма s^*, *ставшего внутренним*, а относительно *внешнего изоморфизма, в качестве которого выступает эта ОС. То есть именно изоморфизм определяет все свойства отображений, охватываемых им в соответствующей коммутативной диаграмме.* Введение указанной ОС не является произволом и эвристикой, а *является необходимым и достаточным условием замыкания коммутативной диаграммы относительно новой цели управления* $X_ж$ для ее точной, полной и однозначной отработки. Для точного слежения вектором $\hat{X}$ за вектором $X_ж$ важна не просто ОС, а *именно изоморфная* ОС.

Действительно, пусть изменения в структуре s^* малы и не привели к нарушению коммутативности диаграммы отображений на рис. 5.4 (например, изменились лишь «параметры» отображения s^* при сохранении в нем всех существующих связей – отсутствуют обрывы связей), то есть все композиции отображений в диаграмме выполняются. Тогда, с учетом очевидных равенств (5.3) и (5.4), следующих непосредственно из диаграммы на рис. 5.4, рассматриваемая диаграмма преобразуется к виду, показанному на рис. 5.5.

$$\begin{tikzcd} X_ж \arrow[r, "W_{эм}"] & X_з \arrow[r, "\tilde{I}"] & \tilde{X} \arrow[r, "W_Ф"] & \hat{X} \arrow[lll, bend left, "I"] \end{tikzcd}$$

Рис. 5.5. Эквивалентный следящий контур

На рис. 5.5 символом $\tilde{I} \approx h^{-1}\tilde{h}\ \tilde{s}^*\beta\beta^{-1}(s^*)^{-1}$ обозначено приближенное равенство-соответствие («почти изоморфизм») $X_з \cong \tilde{X}$ между векторами $X_з$ и $\tilde{X}$, обусловленное лишь небольшими искажениями в отображении-структуре системы s^*, принявшем «значение» $\tilde{s}^*$, а также возможные небольшие искажения в отображении-структуре датчиков h, принявшем «значение» $\tilde{h}$. Если искажения отображений-структур отсутствуют, то $\tilde{I} = h^{-1}hs^*\beta\beta^{-1}(s^*)^{-1}$ – обычное единичное изоморфное отображение, размер которого равен размеру векторов $X_з$ и $\tilde{X}$.

Размер $\tilde{I}$ может не совпадать с размером единичного отображения I на том же рисунке, то есть, в общем случае, размеры векторов $X_з$ и $\tilde{X}$, с одной стороны, и векторов $\hat{X}$ и $X_ж$, с другой стороны, могут отличаться. С такими примерами мы сталкивались в параграфе 3.2 этой части книги, когда возникала необходимость регулирования не всех компонент вектора X, а только некоторых. При этом всегда размер I должен быть меньше размера $\tilde{I}$, чтобы изоморфизм I, с точностью до которого определяются наблюдатель, регулятор и все обратные, позволял «измерить» все другие отображения в коммутативной диаграмме. Это означает, что векторы $X_ж$ и $\hat{X}$ должны включать только компоненты из $X_з$ и $\tilde{X}$, подлежащие регулированию.

Отметим, что даже при наличии указанных искажений все отображения, охватываемые в коммутативной диаграмме изоморфизмом I: $\hat{X} \to X_ж$, будут изоморфными с точностью до этого изоморфизма, то есть будут иметь в диаграмме соответствующие единственные обратные отображения, что обеспечит точное слежение $\hat{X}$ за вектором $X_ж$. Необходимо учитывать также, что соответствующие отображения $(s_R)^{-1}$ и $(\tilde{s}_N)^{-1}$ в разомкнутом контуре на рис. 5.3 и в замкнутом контуре на рис. 5.4 определяются с точностью до разных изоморфизмов (на рис. 5.3 с точностью до s^*, а на рис. 5.4 с точностью до изоморфизма-интегранта I) и поэтому могут отличаться. Причем на рис. 5.4 отображение s^* может быть не изоморфным, важно лишь, чтобы оно коммутировало соседние отображения. Даже если s^* не изоморфизм, остается спараведливым преобразование диаграммы рис. 5.4 к виду, показанному на рис. 5.5.

Как видно из рис. 5.5, при небольших искажениях структур управляемой системы s^* и датчиков h *качество слежения* вектором $\hat{X}$ за вектором $X_ж$ полностью определяется отображениями-структурами эталонной модели $W_{эм}$ и фильтра $W_Ф$. Очевидно, что в коммутативной диаграмме на рис. 5.5 должно выполняться условие $I = (W_{эм})^{-1}(\tilde{I})^{-1}(W_Ф)^{-1}$, где $(W_{эм})^{-1}$ и $(W_Ф)^{-1}$ – обратные с точностью до изоморфизма I отображения, соответственно, к отображениям $W_{эм}$ и $W_Ф$, $(\tilde{I})^{-1} \cong \tilde{I}$. Как мы уже отмечали, размеры единичных отображений I и $\tilde{I}$ могут не совпадать.

Иногда может оказаться целесообразным такой выбор $W_{эм}$, при котором эталонная модель будет вполне удовлетворительно выполнять и функцию фильтра. Тогда необходимость в отдельном отображении-фильтре $W_Ф$ может отпасть. В этом случае коммутативная диаграмма примет еще более простой вид, показанный на рис. 5.6. В этом контуре для обеспечения равенства $X_ж \cong \tilde{X}$ должно

выполняться условие $I = (W_{эм})^{-1}(\tilde{I})^{-1}$, где в отображении $(\tilde{I})^{-1}$ скрыта вся информация об объекте управления s^*, датчиках h, регуляторе $(s_R)^{-1} = \beta^{-1}(s^*)^{-1}$, реализующем внутреннюю обратную связь (см. рис . 5.4) от регулируемой величины $X_з$ к потребному для ее формирования управлению $U=(s_R)^{-1}X_з$, а также о наблюдателе $(\tilde{s}_N)^{-1} = h^{-1}$, позволяющем по показаниям датчиков Z восстанавливать полный вектор состояния $\tilde{X}$.

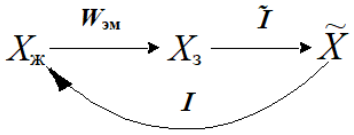


Рис. 5.6. Простейший следящий контур

Рис. 5.7. Следящий контур управления объектом

Подчеркнем еще раз, что в отличие от идеального разомкнутого контура (см. рис. 5.3), в котором все обратные отображения вычисляются с точностью до изоморфизма s^*, *в коммутативных диаграммах, показанных на рис.* 5.4–5.6, *«внешняя» ОС замкнута по цели управления* $X_ж$ *изоморфизмом I, что накладывает требование вычисления всех обратных с точностью до этого изоморфизма*. Если не раскрывать детальную структуру обобщенного объекта управления, то следящий контур, показанный на рис. 5.4, при практическом использовании приобретет вид, показанный на рис. 5.7. На вход объекта поступают сигналы управления U, формируемые регулятором $(s_R)^{-1}$, а с датчиков объекта снимаются непосредственно измеряемые сигналы Z, поступающие на наблюдатель $(\tilde{s}_N)^{-1}$. Структура этого контура введена не эвристически, а синтезирована путем применения строго формализованного метода, основанного на общем принципе изоморфизма. Эта структура весьма универсальна и применима для широкого круга задач управления линейными и нелинейными объектами скалярного (один вход – один выход) и многосвязного типа.

В теоретическом плане при анализе коммутативной диаграммы, представленной на рис. 5.4, интерес представляют следующие случаи. Наиболее очевидным и простым является случай, когда все векторы X, X_0, $\tilde{X}$, $\hat{X}$, $X_з$, $X_ж$ имеют одинаковый размер и отображения $W_{эм}$ и $W_Ф$ обратимы в обычном смысле (то есть являются обычными изоморфизмами и вне коммутативной диаграммы). Этот

случай имеет большое практическое значение: сюда относится, например, наиболее распространенный случай регулирования по типу SISO – «один вход – один выход», а также случай многосвязного регулирования по полному вектору состояния X. В этом случае если в структурах β, s^* и h возникают параметрические искажения по сравнению с «номинальными» структурами, принятыми при расчете регулятора и наблюдателя, то подбором $W_{эм}$ и $W_{Ф}$, как показано в главах 1-3 и 4 этой части книги и в работах [20-23], эти искажения можно парировать, то есть обеспечить изоморфность, а значит и робастность контура с точностью до изоморфизма I: $\hat{X} \to X_ж$. Это значит, что цель управления, состоящая в точном слежении $\hat{X}$ за $X_ж$, будет достигаться.

Более сложным является случай, когда размер вектора $X_ж$ (и, соответственно, векторов $\tilde{X}$, $\hat{X}$) меньше размера вектора $X_з$, совпадающего в общем случае с полным размером векторов X, X_0. В состав $X_ж$ может входить, например, всего одна компонента из вектора X и, соответственно, из векторов X_0 и $X_з$. В этом случае регулирование всего одной компоненты вектора $X_ж$ может осуществляться с использованием полной модели объекта управления, имеющей вектор состояния X, размер которого существенно больше размера вектора $X_ж$. Такой случай нами рассмотрен в параграфе 3.2 этой части книги и вполне поддается формализации на основе рассматриваемой теории в плане вычисления соответствующего регулятора. Вообще в практике синтеза интегрированных ИУС возможны, конечно, различные постановки задач, но опыт показывает, что при правильном выборе исходного изоморфизма-цели теория позволяет получить адекватное решение.

Следует отметить, что замкнутая обратной связью I: $\hat{X} \to X_ж$, формализующей цель управления, коммутативная диаграмма на рис. 5.4 (и все последующие диаграммы, построенные на ее основе), моделирующая интегрированную ИУС, *становится закрытой* системой, не связанной ни с какими другими системами. Такая система допускает произвольное изменение $X_ж$ на входе, как допускает произвольное изменение вектора управлений U наблюдаемая и управляемая закрытая система на рис. 5.2. *Эта система также может быть преобразована в открытую систему путем введения еще одной «эталонной модели» для формирования* $X_ж$ и, соответственно, еще одной внешней изоморфной обратной связи для обеспечения точного слежения за новой входной переменной. Такие контуры управления можно наращивать до исчерпания уровней (контуров) управления физическим объектом, число которых регламентируется и ограничивается порядком многоуровневой математической модели этого объекта управления. Так

или иначе, существует самый внешний (самого верхнего уровня) контур, на который задающее воздействие подается извне. Например, на систему встроенных друг в друга (по аналогии с «матрешкой»), замкнутых относительно своих задающих воздействий и соответствующих изоморфных обратных связей, контуров управления самолетом подаются требуемые для отработки параметры заданной траектории в виде программы полета, сформированной заранее. При этом все встроенные в такую «матрешку» контуры являются следящими с точностью до своих ОС.

5.3. Линейные интегрированные следящие контуры управления

Рассматривается линейный стационарный динамический объект

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BU, X_0 \\ Z = HX, \end{cases} \tag{5.8}$$

имеющий, с учетом преобразований

$$\begin{cases} X(p) = \Phi(p)X_0 + \Phi(p)BU(p), \quad \Phi(p) = (pI - A)^{-1}, \; Y(p) = BU(p) \\ Z(p) = HX(p), Z(p) = H\Phi(p)X_0, \end{cases} \tag{5.9}$$

вид в оператоной форме

$$\begin{cases} Y = BU, \\ X = \Phi X_0 + \Phi Y, \\ Z = H. \end{cases} \tag{5.10}$$

На вход объекта воздействует управление $U \subset R^n$, полный вектор выхода $X \subset R^n$ непосредственно измеряется датчиками $Z \subset R^n$. Объект имеет некоторое «внутреннее состояние» $Y \subset R^n$ и является полностью управляемым и наблюдаемым. Ранее в главах 1-4 этой части книги мы указывали, что если объект управляем и наблюдаем, то в этом случае путем понижения порядка модели (уменьшения размера вектора *X*) можно обеспечить равенство размеров всех векторов *X*, *Y* и *Z*, что в рассматриваемом случае и выполняется. Объединяя рис. 3.2 для регулятора и рис.4.4 для наблюдателя, из рис. 5.4 в случае линейного объекта (5.8) – (5.10) можно получить контур, показанный на рис 5.8.

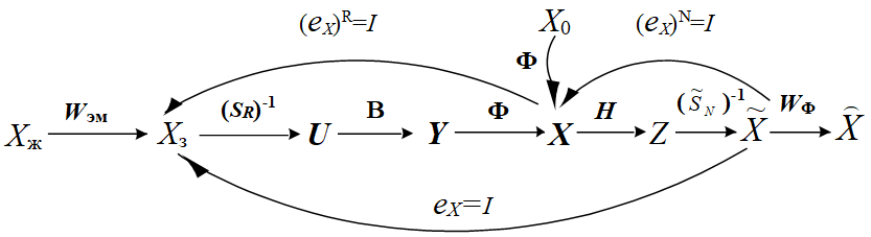


Рис. 5.8. Линейный следящий контур наблюдения и управления

Как видно из рис. 5.8, в данном случае $I = e_X = (e_X)^R \cdot (e_X)^N = I \cdot I = I$, то есть теорема разделения процедур синтеза регулятора и наблюдателя выполняется: как и в нелинейном случае интегрант-изоморфизм-цель $e_X = I$ является композицией изоморфизмов-целей, отвечающих регулятору и наблюдателю. Таким образом, наблюдатель и регулятор для рассматриваемого объекта можно синтезировать независимо и раздельно.

На рис. 5.8 для более наглядного представления теоремы разделения эталонная модель и фильтр вынесены за границы следящего контура. Это вполне допустимо и демонстрировалось нами в главах 1-4 этой части книги. В этих главах показано, что, подкорректировав соответствующие передаточные функции, их можно вносить и в контур, как проиллюстрировано на рис. 5.9. Теорема разделения при этом не нарушается.

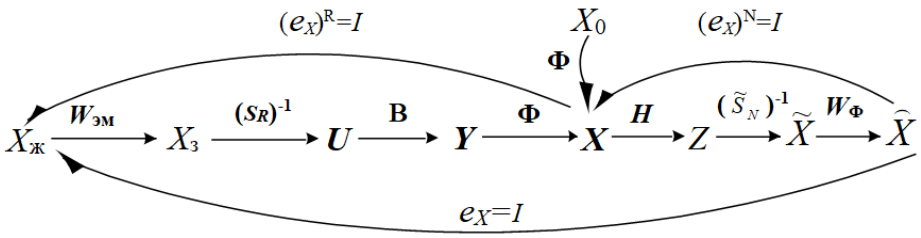


Рис. 5.9. Линейный следящий контур с эталонной моделью и фильтром

Контуры на рис. 5.8 и рис. 5.9 изображены в форме коммутативных диаграмм – в «мультипликативной форме». В обычной форме, принятой в теории автоматического регулирования (ТАР), для линейного объекта управления следящий контур, показанный на рис. 5.9, проиллюстрирован на рис. 5.10. Здесь под термином «объект управления» понимается обобщенный объект управления (5.10) с передаточной функцией $W_{ООУ}=H\Phi B$. В данном случае с учетом структуры $W_{ООУ}$ регулятор имеет вид $(s_R)^{-1}= B^{-1}\Phi^{-1}$, наблюдатель - вид $(\tilde{s}_N)^{-1} = H^{-1}$.

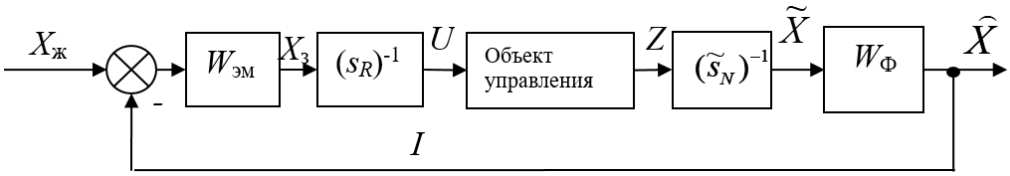


Рис. 5.10. Следящий контур управления линейным объектом

Здесь все обратные определяются внутри коммутативной диаграммы, показанной на рис. 5.9, с точностью до изоморфизма I: $\hat{X} \to X_ж$, характеризующего цель управления. При этом, например, обратная Φ^{-1} к фундаментальной матрице, как это ни парадоксально и как мы показали в параграфе 1.6 этой части книги,

может отличаться от обычной обратной к этой матрице, определенной вне коммутативной диаграммы. В этом состоит проявление принципа относительности в алгебре и соответствующего эффекта эмерджентности в синтезированной системе, причины возникновения которых мы раскрыли в первой части книги. Рис. 5.10 аналогичен рис. 5.7, иллюстрирующему интегрированный контур управления в общем нелинейном случае. Это подтверждает наш вывод, сформулированный в первой части книги, о том, что *основная лемма и теорема о реализации, опирающиеся на общий принцип изоморфизма, в рамках нашей теории позволяют работать с системами весьма общего вида, в том числе и с нелинейными, по правилам работы с линейными системами, применяемыми в ТАР*. Это обусловлено тем, что, как показано в первой части книги, в нашей теории применительно к системам весьма общего вида выполняется принцип суперпозиции. Ранее считалось, что этот принцип характерен только для линейных систем и поэтому он принимался в качестве их отличительного признака.

Отметим, что в случае линейных систем, как и в общем случае, показанном на рис. 5.7, даже при наличии возникших по каким-либо причинам параметрических искажений в отображениях, характеризующих объект, все отображения, охватываемые в коммутативной диаграмме на рис. 5.10 изоморфизмом $I: \hat{X} \to X_ж$, будут изоморфными с точностью до этого изоморфизма, то есть будут иметь соответствующие обратные отображения, что обеспечит точное слежение $\hat{X}$ за вектором $X_ж$.

Рис. 5.11 является прямой аналогией рис. 5.5 с учетом того, что в линейном случае $W_{ООУ}=H\Phi B$, регулятор $(s_R)^{-1}= B^{-1}\Phi^{-1}$ и наблюдатель $(\tilde{s}_N)^{-1}= H^{-1}$. При этом имеет место равенство

$$\tilde{I} = (\tilde{s}_N)^{-1} \cdot W_{ООУ} \cdot (s_R)^{-1} = H^{-1} \cdot H\Phi B \cdot B^{-1}\Phi^{-1},$$

из которого следует, что $\tilde{I}$ является обычным единичным изоморфным отображением-матрицей. В наиболее общем случае при разных размерах пар векторов $\hat{X}$, $X_ж$ и $\tilde{X}$, $X_з$ размеры $\tilde{I}$ и I на рис. 5.11 могут быть разными.

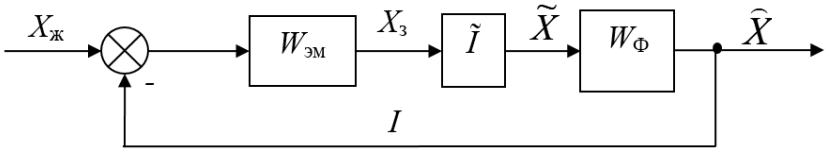


Рис. 5.11. Линейный робастный контур управления-наблюдения-управления.

Из рис. 5.11 следует, что в часто встречающемся скалярном случае (I =1) передаточная функция замкнутого контура (ЗК) может быть вычислена по формуле $W_{ЗК} = \frac{W_{ЭМ}W_{Ф}}{1+W_{ЭМ}W_{Ф}} = \left\langle W_{ЭМ}W_{Ф} = \frac{1}{Tp} \right\rangle = \frac{1}{Tp+1}$, где для получения идеального переходного процесса передаточная функция разомкнутого контура (РК) в качестве примера выбрана равной $W_{РК} = W_{ЭМ}W_{Ф} = \frac{1}{Tp}$. Потенциально эталонная модель, либо фильтр, могут выполнять обе функции – формирования эталонного (требуемого идеального) движения и фильтрации, то есть $W_{РК} = W_{ЭМ} = \frac{1}{Tp}$, $W_{Ф} = 1$, либо $W_{РК} = W_{Ф} = \frac{1}{Tp}$, $W_{ЭМ} = 1$.

Тогда в первом случае ($W_Ф$=1) контур приобретет вид, показанный на рис. 5.12.

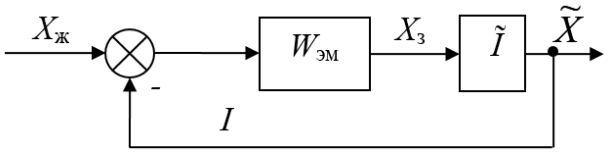


Рис. 5.12. Функции формирования идеального движения и фильтра выполняет эталонная модель

Для второго случая ($W_{ЭМ}$=1) контур показан на рис. 5.13.

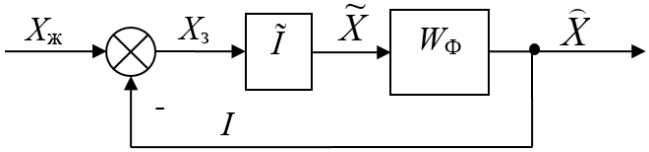


Рис. 5.13. Функции формирования идеального движения и фильтра выполняет фильтр

На практике в контуре могут применяться одновременно эталонная модель и фильтр, как это показано на рис. 5.11 и как часто бывает. Какой из вариантов более предпочтителен, необходимо определять из практических соображений в каждом конкретном случае.

В качестве заключения по главе 5 отметим, что в рамках общего принципа изоморфизма, исходя из классических определений управляемости и наблюдаемости, нами расширена формулировка классической теоремы разделения и дано ее доказательство для весьма общего случая нелинейных систем, цель управления которыми формализуется некоторым изоморфным в обычном смысле отображением, а также предложен полностью формализованный метод синтеза

структур контуров интегрированных ИУС и входящих в контуры обратных связей. Как следует из новой, более общей формулировки теоремы разделения, поведение интегрированной системы, в которой объединены регулятор и наблюдатель, изоморфные с точностью до некоторого обыкновенного изоморфного интегранта-цели, полностью предсказуемо, то есть интегрированная ИУС является простой системой.

Литература к Главе 5 Раздела 1 Части 2:

1. *Кулабухов В.С.* Принцип изоморфности в задаче реализации и его приложения к анализу свойств систем управления // В сборнике: XII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014. Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН. 2014. С. 438-448.
2. *Кулабухов В.С.* Общий принцип изоморфизма в теории систем // Cloud of Science. 2018. Т.5. №3. С. 400-472.
3. *Кулабухов В.С.* Алгебраическая формализация процедур анализа и синтеза сложных интегрированных систем // 6-я Международная конференция “Авиация и космонавтика – 2007”. 1-4 октября 2007г. Москва. Тезисы докладов. - М.: Изд-во МАИ, 2007.
4. *Буков В.Н., Кулабухов В.С., Косьянчук В.В., Рябченко В.Н., Горюнов С.В., Наумов А.И.* Основы интеграции систем авиационного оборудования. Учебное пособие. М.: Изд. ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского, 2007. 338 с.
5. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А.А.Красовского. М.: Наука, 1987.
6. *Заде Л., Дезоер Ч.* Теория линейных систем. Метод пространства остояний. М.: Наука, 1970. 704 с.
7. *Андреев А.Ю.* Управление конечномерными линейными объектами. М.: Наука, 1976. 424 с.
8. *Первозванский А.А.* Курс теории автоматического управления. М.: Наука, 1986.
9. *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977.
10. *Мирошник И.В.* Теория автоматического управления. Линейные системы. СПб.: Питер, 2005. – 336 с.
11. *Буков В.Н., Кулабухов В.С., Максименко И.М., Рябченко В.Н.* Вложение систем // АиТ. 1999. №8. С. 61-73.

12. *Буков В.Н.* Вложение систем. Аналитический подход к анализу и синтезу матричных систем. Калуга: Изд-во научн. литературы Н.Ф. Бочкаревой, 2006. 720с.
13. *Косьянчук В.В.* Вложение систем. Управление с редуцированным наблюдателем // АиТ. 2002. №6. С. 23-35.
14. *Косьянчук В.В.* Синтез интегрированных систем наблюдения и управления с заданными динамическими характеристиками // В сборнике: НАВИГАЦИЯ И УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ Сборник докладов VI конференции молодых ученых. Научный редактор О.А. Степанов; под общ. редакцией В.Г. Пешехонова. 2004. С. 215-221.
15. *Косьянчук В.В.* Синтез интегрированных систем наблюдения и управления с заданными динамическими характеристиками // Гироскопия и навигация. 2005. №1 (48). С.100.
16. *Kosjanchuk V.V., Bukov V.N., Ryabchenko V.N.* SYSTEM IMBEDDING. LINEAR CONTROL WITH OBSERVATION. Automation and Remote Control. 2001. Т. 3. С. 15.
17. *Кулабухов В.С.* Общий принцип изоморфизма: интеграция регулятора и наблюдателя в следящей системе // Материалы XVI Всероссийской научно-технической конференции «Научные чтения по авиации, посвященные памяти Н.Е. Жуковского» [текст]. Сборник докладов. М.: Издательский дом Академии им. Н.Е. Жуковского, 2019. С. 321-329.
18. *Kulabukhov V.* A General Principle of Isomorphism: Integration of Regulator and Observer in the Control System // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 714 (2020) 012013. doi:10.1088/1757-899X/714/1/012013
19. *Абгарян К.А.* Матричное исчисление с приложениями в теории динами-ческих систем. Учеб. Пособие: Для вузов. М.: Физматлит, 1994. 544 с.
20. *Кулабухов В.С.* Синтез регуляторов для следящих систем на основе принципа изоморфности // Мехатроника, автоматизация, управление. 2017. Том 18, №8. С. 507-515.
21. *Kulabukhov V.* Linear Isomorphic Regulators // CMTAI2016. MATEC Web of Conf. 2017. Т. 99. С. 03008.(doi:10.1051/matecconf/20179903008)
22. *Кулабухов В.С.* Изоморфные наблюдатели состояния и робастная фильтрация сигналов систем // Радиотехника. 2017. №8. С. 50-55.
23. *Kulabukhov V. S.* Isomorphic observers of the linear systems state // Workshop on Materials and Engineering in Aeronautics (MEA2017) 15–16 November 2017, Moscow, Russian Federation. doi:10.1088/1757-899X/312/1/012016. p. 012016.

Глава 6

Способ и технология идентификации систем с точностью до изоморфизма

Общий принцип изоморфизма, являющийся базовым для решения многих задач теории систем, может служить фундаментальной основой и для решения задачи идентификации систем в весьма общей постановке, а также в сочетании с современными парадигмами искусственных нейронных сетей позволяет предложить рациональные пути упрощения способов конструирования и калибровки различных приборов и датчиков.

6.1. Способ идентификации моделей нелинейных систем и калибровка датчиков

Здесь в книге и ранее в ряде работ показано [1-6], что *общий принцип изоморфизма* может служить единой методологической и формально-математической основой для решения многих задач теории систем. Одной из таких задач является классическая *задача реализации системы* [7], рассматриваемой в качестве «черного ящика», подразумевающая построение модели системы по некоторым данным о ней, то есть *идентификацию модели*. В первой части книги было отмечено, что задача не имела формально строгого решения, так как не удавалось, как указано в [7], не только доказать, но и сформулировать «теорему о реализации». Введение *общего принципа изоморфизма* позволило сформировать новую парадигму в теории систем [1, 6], основанную на этом единственном принципе, в рамках которой была не только сформулирована и доказана теорема о реализации [6], но и формализованы и взаимоувязаны все основные свойства

систем: наблюдаемость, управляемость, контролируемость, идентифицируемость, разделимость задач синтеза регуляторов и наблюдателей и их комплексируемость в интегрированную информационно-управляющую систему [1-6]. Соответствующие результаты обобщены и развиты в первой части и в главах 1-5 этой части книги.

Существует много постановок и способов решения задач идентификации применительно к различным целям построения моделей систем [8]. Здесь предлагается способ и прикладная технология идентификации нелинейных систем [22-27], опирающиеся на общий принцип изоморфизма и соответствующую теорию идентификации (реализации), суть которых изложена в первой части книги. В связи с тем, что большой практический интерес представляет анализ проблемы идентификации в приложении к моделям и калибровке *средств измерений* и датчиков физических величин [9, 10], акцент делается на решении этой проблемы.

Инженерная *задача калибровки* решается как *задача параметрической идентификации*, заключающаяся в определении параметров математической модели датчика, *как правило, линейной*, для последующей *алгоритмической компенсации его систематических погрешностей*. Под математической моделью понимают некоторую *функцию преобразования,* ставящую в соответствие измеряемому физическому воздействию на входе датчика некоторый «сигнал» на выходе для всего множества *установившихся режимов и условий* (например, температур) его работы в форме, удобной для использования (например, в форме цифрового кода). По сути, речь идет об определении *статической характеристики*, называемой в задачах метрологии [9, 10] также *функцией преобразования датчика*, *калибровочной характеристикой, тарировочной характеристикой*, *градуировочной характеристикой, измерительной характеристикой*.

Линейность функции преобразования, с одной стороны, позволяет существенно упростить процедуры калибровки, но, с другой стороны, достигается сложными конструкторскими и технологическими приемами и отбраковкой большого числа датчиков, характеристики моделей которых не отвечают общим для датчиков данного типа техническим условиям. Параметры линейных моделей датчиков, прошедших процедуру отбраковки, для повышения точности измерений дополнительно индивидуально уточняют как раз в процессе калибровки, что и обеспечивает алгоритмическую компенсацию систематических погрешностей датчика в рабочих режимах функционирования.

Модель (функцию преобразования) применяемых на практике «скалярных» и «векторных» датчиков стремятся получить в линейной параметрической форме вида

$$U = C + KX, \tag{6.1}$$

где, в общем случае, X – вектор входных сигналов, то есть измеряемая векторная физическая величина, U – вектор сигналов на выходе датчика, K – матричный «*масштабный коэффициент*», C – вектор «*смещений нуля*», измеряемых на выходе при заведомо известном нулевом векторе сигналов на входе датчика. Такая модель является полиномом минимальной (первой) степени для аппроксимации сигналов на выходе и требует идентификации лишь двух параметров – C и K.

Линейная модель позволяет идентифицировать ее параметры с использованием простой процедуры калибровки. Достоинством линейной функции является и то, что восстановление и предсказание измеряемой физической величины осуществляется по весьма просто получаемой из (6.1) *обратной функции преобразования*

$$X = K^{-1}(U - C). \tag{6.2}$$

Однако линейность модели достигается, в прямом смысле, дорогой ценой, которую приходится платить за сложные конструкторские ухищрения, специально направленные на обеспечение линейности, и высокий коэффициент отбраковки датчиков. Простые способы избавления от этого недостатка не известны. Недостатком является и то, что даже такая простая модель обеспечивает безусловное существование обратной функции вида (6.2) лишь в случае скалярного датчика.

Вместе с тем *задача калибровки может быть сформулирована в терминах общего принципа изоморфизма* [1, 6], что позволяет предложить пути упрощения способов конструирования и калибровки датчиков.

В отличие от подхода к конструированию датчиков, обусловливающего необходимость обеспечения линейности их моделей и порождающего соответствующие проблемы, *общий принцип изоморфизма* [1, 6] *позволяет исходить из того, что датчики в производстве не отбраковываются, их модели существенно индивидуальны, нелинейны, а в наиболее общем случае и вообще не известны.* Это требует ставить *задачу непараметрической идентификации модели датчика, как системы,* по известным данным на его входе и выходе. Такая задача идентификации (реализации [7]) может быть решена на основе теоремы о реализации, сформулированной и доказанной в [6] и в первой части книги в форме основной леммы, применяемой к анализу всех свойств систем. На основе леммы для общей задачи идентификации систем и задачи калибровки, в частности, можно построить *коммутативную диаграмму*, показанную на рис. 6.1.

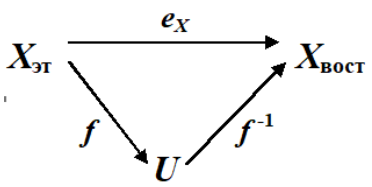


Рис. 6.1. Коммутативная диаграмма отображений в задаче калибровки

В коммутативной диаграмме должны выполняться условия (см. первую часть книги и [6]):

$$X_{вост} = e_X X_{эт},\ e_X = f^{-1}f,\ (e_X)^{-1} = f^{-1}f,\ e_X = (e_X)^{-1} = e,\ X_{эт} = (e_X)^{-1}X_{вост},\ X_{вост} \equiv X_{эт},$$

$$e_{Xэт}^{лев} = f^{-1}f,\ \ e_{Xэт}^{прав} = (e_X)^{-1}e_X = e_X = f^{-1}f,\ e_{Xэт}^{лев} = e_{Xэт}^{прав} = e_X = f^{-1}f,$$

$$e_{Xвост}^{лев} = e_X(e_X)^{-1} = e_X = f^{-1}f,\ e_{Xвост}^{прав} = f^{-1}f,\ \ e_{Xвост}^{лев} = e_{Xвост}^{прав} = e_X = f^{-1}f,$$

$$e_U^{лев} = f f^{-1},\ \ e_U^{прав} = f f^{-1},\ e_U^{лев} = e_U^{прав} = e_U, \qquad (6.3)$$

где e_X - изоморфное отображение, характеризующее желаемое тождество между известным (эталонным) сигналом $X_{эт}$ на входе идентифицируемой системы (калибруемого датчика) и восстановленным сигналом $X_{вост}$, полученным после преобразования выходного сигнала U системы (датчика) обратной моделью f^{-1}; f – неизвестная функция преобразования (модель), отображающая сигнал $X_{эт}$ в сигнал U на выходе идентифицируемой системы (датчика); f^{-1} – обратное *с точностью до изоморфизма* $e_X=e$ отображение к отображению f, характеризующее функцию восстановления измеряемой физической величины $X_{вост}$ для датчика или обратную модель для идентифицируемой системы; $e_{Xэт}^{лев}$, $e_{Xэт}^{прав}$, $e_{Xвост}^{лев}$, $e_{Xвост}^{прав}$, $e_U^{лев}$, $e_U^{прав}$ – соответственно левая и правая единицы на множествах сигналов $X_{эт}$, $X_{вост}$, U, $e_X=e$ – тождественное отображение единица-изоморфизм на множествах $X_{эт}$, $X_{вост}$, равная обычной единичной матрице соответствующего размера. Причем, в соответствии с условиями и результатами доказательства основной леммы в первой части книги и в [6], матричные единицы $e_U^{лев} = e_U^{прав} = e_U$, определяемые на множестве U в рамках (и только в рамках!) коммутативной диаграммы, не обязательно должны быть обычными единичными матрицами. Отметим важность понимания этого, доказанного в первой части книги и ранее в [6] утверждения.

Кроме того, следует иметь в виду, что в отличие от применяемых датчиков, у которых функция преобразования линейна и обязательно обратима, у датчиков, идентифицируемых (калибруемых) на основе общего принципа изоморфизма, векторная функция преобразования f может быть не только нелинейной, но и необратимой в обычном смысле. *На f накладывается лишь одно требование-огра-*

ничение (см. первую часть книги и [6]) – *она должна быть мономорфным отображением* f: $X_{эт} \to U$. Это условие легко выполнить при калибровке (оно выполняется и для обычных «линейных датчиков»): каждому калибровочному эталонному сигналу из $X_{эт}$ должен строго соответствовать единственный выходной сигнал из U и, наоборот, в множестве сигналов U должно существовать подмножество $U^* \subset U$ таких сигналов, каждому из которых обязательно отвечает единственный сигнал из множества $X_{эт}$. Тогда будет существовать эпиморфное отображение f^{-1}: $U \to X_{вост}$, восстанавливающее сигналы из множества $X_{вост}$, точно и взаимно однозначно соответствующие сигналам из $X_{эт}$. Это означает также (см. первую часть книги и [6]), что отображение f есть *изоморфизм с точностью до изоморфизма* e_X: $X_{эт} \to X_{вост}$, то есть *внутри коммутативной диаграммы.* Доказательство этих утверждений здесь приводить не будем, так как оно аналогично доказательству основной леммы, изложенному в первой части книги и [6].

Условия (6.3) позволяют решить задачу идентификации отображений f и f^{-1} как прямо после формирования множеств $X_{эт} \equiv X_{вост}$ и U в результате проведения калибровочных экспериментов, так и опосредованно - путем решения оптимизационной задачи, предполагающей минимизацию «невязки» между множествами $X_{эт}$ и $X_{вост}$ при условии удовлетворения уравнений связи (6.3). *Такой подход, опирающийся на основную лемму нашей теории, обеспечивает решение в общей постановке задач идентификации моделей любых систем, удовлетворяющих условиям мономорфности соответствующих отображений и рассматриваемых как* «*черный ящик*». Причем проще идентифицировать обратную модель f^{-1}. Модель f может оставаться неизвестной, так как во многих задачах используется именно обратная модель f^{-1}. Это относится, например, к задачам синтеза регуляторов и наблюдателей, рассмотренных в главах 1-4 этой части книги и в работах [2-5].

На практике при калибровке датчиков не нужно решать выражения (6.3). Действительно, под обратной функцией f^{-1} может подразумеваться некоторый алгоритм «интеллектуальной» обработки выходных сигналов U, который может быть сформирован в результате процедуры обучения «интеллектуального датчика», представленного на рис. 6.1 в виде коммутативной диаграммы. Обучение реализуется на примерах сигналов из множеств $X_{эт}$ и U с учетом тождества $X_{вост} \equiv X_{эт}$. В общем случае *идентификации любых систем* формирование обратной модели f^{-1} может осуществляться аналогично - в форме «интеллектуального алгоритма», обучаемого на примерах сигналов из множеств $X_{эт}$ и U с учетом выполнения условия $X_{вост} \equiv X_{эт}$. *Из приведенных утверждений и рассуждений следуют выводы*:

- во-первых, *на множестве выходных сигналов U датчика допускается существование «зашумленных» сигналов, ни один из которых не отвечает какому-либо эталонному сигналу из множества* $X_{эт}$. Тем не менее «интеллектуальная» обработка зашумленных сигналов посредством обратной функции f^{-1}:$U \rightarrow X_{вост}$ позволит восстановить точные сигналы из $X_{вост}$, однозначно отвечающие соответствующим сигналам из $X_{эт}$, посредством выделения в U указанного выше подмножества $U^* \subset U$;

- во-вторых, *предложенный подход является строго формализованным и позволяет в весьма общей постановке решать задачу реализации* (*идентификации*) *систем с шумами в выходном сигнале, которую изначально ставили в классической литературе* [7];

- в-третьих, *утверждение о существовании и единственности* f^{-1} и его доказательство справедливы в том случае, когда требование изоморфизма отображения e_X: $X_{эт} \rightarrow X_{вост}$ *заявлено заранее и реализовано*, например, путем «обучения» интеллектуального датчика в процессе калибровки. Процесс обучения позволяет сформировать обратную, с точностью до изоморфизма e_X: $X_{эт} \rightarrow X_{вост}$, функцию преобразования f^{-1} датчика, то есть *решить задачу непараметрической идентификации его модели*.

Технологию обучения интеллектуального датчика можно описать следующим образом. Ставятся калибровочные эксперименты, позволяющие получить для каждого эталонного сигнала из $X_{эт}$ единственный сигнал из множества U выходных сигналов датчика (например, некоторый уникальный цифровой код). Далее, *в качестве модели обратной функции* f^{-1} *выбирается, например, искусственная нейронная сеть*, обучаемая на полученных калибровочных примерах таким образом, чтобы каждому уникальному сигналу из U отвечало строго единственное восстановленное значение физической величины из множества $X_{вост}$, точно соответствующее тому значению входной физической величины из $X_{эт}$, которому точно соответствует сигнал из U, вызвавший указанный отклик нейронной сети (сигнал из множества $X_{вост}$). После обучения нейронной сети на всем множестве калибровочных сигналов-примеров для проверки точности модели f^{-1} может быть проведена серия контрольных экспериментов с подачей на вход датчика таких сигналов, которые не вошли в множество обучающих эталонных сигналов $X_{эт}$. При необходимости для повышения точности интеллектуального датчика нейронная сеть может быть дообучена на результатах дополнительных экспериментов, позволяющих сформировать промежуточные обучающие точки-сигналы. Такая *процедура обучения* опирается на изоморфное отображение e_X:

$X_{эт} \rightarrow X_{вост}$ и *в неявной форме* (*в форме нейронной сети*) *позволяет получить обратную функцию преобразования* f^{-1}, *восстанавливающую с заданной точностью реальные значения физической величины, действующей на вход датчика*.

Нейронная сеть (*обратная функция* f^{-1}), *сформированная и обученная в процессе калибровочных экспериментов, должна записываться в память интеллектуального датчика и в дальнейшем использоваться при его рабочем функционировании*. Обратим внимание на то, что необходимость идентификации самой функции преобразования f, а также необходимость решения системы алгебраических уравнений (6.3) для определения обратной функции f^{-1} при рассмотренном подходе отсутствует. *Функция* f *может оставаться вообще неизвестной. К ней предъявляется лишь обычное и для «линейного» датчика требование - высокая стабильность* (*неизменность*) *при длительных сроках эксплуатации. Это должно обеспечиваться стабильностью технических характеристик самого датчика*. При этом f может изменяться (трансформироваться) при изменении в широких пределах ожидаемых условий эксплуатации датчика. В этом случае нейронная сеть должна быть обучена применительно ко всем этим условиям путем проведения дополнительных калибровочных экспериментов. Кроме того, у конструкторов, в отличие от традиционного подхода, связанного с необходимостью обеспечения линейности функции f, появляется свобода выбора таких ее видов, которые обеспечивают, например, избирательное повышение чувствительности датчика в некоторых, интересующих разработчика, диапазонах измерения физической величины. Если таких требований нет, конструктор может вообще не задаваться каким-либо видом функции f, ориентируясь лишь на приемлемую чувствительность датчика.

Аналогичная процедура аппроксимации функции f^{-1} *нейронной сетью может применяться и в общем случае идентификации нелинейных систем, в том числе и нелинейных динамических*. В последнем случае может быть рассмотрена задача аппроксимации амплитудно-фазовой частотной характеристики системы нейронной сетью или могут использоваться динамические нейронные сети [11].

Отметим, что применение многих известных видов искусственных нейронных сетей [11], потенциально отвечающих целям обучения интеллектуальных датчиков и идентификации систем, в практических приложениях может встретить трудности, так как алгоритмы их обучения сложны и, как правило, итерационны. Возникнет необходимость проведения заранее неизвестного числа эпох обучения, что увеличит сроки калибровки и потребует повышения квалификации персонала. Исходя из практически значимых критериев, нужно использовать такие нейронные сети, которые легко обучаются персоналом обычной квалификации, допускают высокий уровень автоматизации и имеют предсказуемое время

обучения, не приводящее к увеличению обычных сроков калибровки. Таким требованиям удовлетворяют, например, искусственные нейробионические сети, рассмотренные в [12]. Вместе с тем, как показала практика [24, 34], вполне можно использовать и искуственные нейронные сети «традиционных» архитектур [8, 11].

Таким образом, *показана возможность расширения парадигмы в теории систем, основанной на общем принципе изоморфизма* [1-6], *на широко востребованную прикладную область, связанную с идентификацией многомерных нелинейных систем, а также с разработкой и калибровкой датчиков*. Получено решение задач идентификации и калибровки в весьма общей постановке, опирающейся на общий эффект от применения двух технологий – технологии идентификации систем на основе общего принципа изоморфизма [1-6] и технологии разработки и обучения искусственных нейронных сетей [11, 12]. Предложены способ идентификации нелинейных систем [25], способ идентификации и калибровки интеллектуальных датчиков [26] и метод (система) разработки и обучения интеллектуальных датчиков [27], исключающий требование линеаризации их моделей приемами конструирования. Применение метода позволит создавать «интеллектуальные датчики» с заданной точностью восстановления измеряемой физической величины в ожидаемых условиях функционирования, обладающие свойством избирательного повышения чувствительности в интересующих диапазонах. Полученные результаты обеспечивают возможность реализации принципиально новых, более простых способов конструирования и калибровки датчиков различного назначения. Ниже излагаются практические аспекты применения изложенной технологии идентификации систем и калибровки датчиков.

6.2. Вариант технологии обучения и калибровки интеллектуальных инерциальных датчиков

Предлагается вариант технологии калибровки интеллектуальных датчиков, основанный на синергетическом эффекте от применения двух инноваций – идентификации систем на основе общего принципа изоморфизма и аппроксимации моделей с помощью искусственных нейронных сетей. Целью является упрощение процессов разработки и производства датчиков за счет их индивидуального обучения с использованием разработанного «интеллектуального» алгоритма. На примере датчика угловых скоростей демонстрируется процедура идентификации его неизвестной реальной двумерной измерительной характеристики по данным калибровочных экспериментов. Технология позволяет по известному коду аналогово-цифрового преобразователя угловой скорости и по текущей температуре получать на выходе датчика, обладающего индивидуально особенной функцией

преобразования, и дополненного «интеллектуальным» алгоритмом, истинные значения измеряемой физической величины с требуемой точностью в ожидаемых условиях эксплуатации.

Представлены некоторые результаты моделирования и обучения искусственной нейронной сети, которая реализует вышеуказанный «интеллектуальный» алгоритм.

Процесс калибровки основывается на информации о математической модели (ММ) функции преобразования (ФП) датчиков [10, 13-15]. Как правило, на стадии разработки и производства стараются получить линейную ММ ФП. Такими моделями пользуются и применительно к датчикам угловых скоростей (ДУС) и линейных ускорений (ДЛУ), широко применяемым в бесплатформенных инерциальных навигационных системах (БИНС) [16-21] летательных аппаратов. Это существенно облегчает определение структуры и идентификацию по результатам калибровки параметров обратной ФП (ОФП) датчика, которая собственно и используется на стадии эксплуатации для вычисления воздействующей на его вход физической величины [10, 13-15]. Линейная модель ФП (полином первой степени) позволяет минимизировать набор параметров ОФП, подлежащих идентификации, что упрощает программу калибровочных испытаний.

В последнее время с целью повышения точности датчиков для интерполяции ОФП широкое применение находят более сложные полиномиальные модели [15]. В этом случае целью работ является, как правило, определение минимально возможной степени полинома, обеспечивающего наилучшее, либо равномерное приближение ОФП к полученным в калибровочном эксперименте данным. Несмотря на применение для интерполяции ОФП полиномов различных степеней, всегда стараются обеспечить линейность исходной ФП датчиков данного типа, что достигается сложными и дорогостоящими конструктивно-производственными приемами. При этом относительно сложный полином, интерполирущий ОФП, на самом деле используется для приближения погрешности линейности ФП с требуемой для практики точностью [15]. Это относится и к двумерным приближениям ОФП, характеризующим зависимость выхода датчика от воздействующей на него измеряемой физической величины и, чаще всего, температуры [15].

Во всех случаях калибровка применяется к серийно изготавливаемым датчикам и включает проведение испытаний по определенным заранее для датчиков данного типа узлам интерполяции, вычисление коэффициентов интерполирующего полинома, соответствующих индивидуальным особенностям каждого датчика, и сохранение этих коэффициентов в памяти датчиков. Использование для калибровки серийных датчиков «информации, определенной по результатам исследований ограниченной группы датчиков, исходит из предположения, что все

ОФП датчиков одной модели, изготавливаемых по одной технологии в течение определенного времени, могут быть приближены полиномом одной степени с заданным пределом погрешности приближения» [15].

Однако на самом деле, на практике ММ ФП получается нелинейной и зачастую остается неизвестной, что усложняет калибровку и снижает ее точность. Не удается существенно уменьшить и трудоемкость калибровочных испытаний, так как для идентификации всех параметров интерполирующих полиномов с приемлемой точностью должна быть реализована обширная программа калибровочных экспериментов и обеспечена их высокая информативность. Особенно это касается векторных датчиков, как это имеет место в случае БИНС [18-21].

На примере ДУС рассматривается новый подход к калибровке датчиков, который позволяет не только упростить саму процедуру калибровки и повысить степень ее автоматизации, но и предложить иные, существенно отличающиеся от традиционных, способы и методы конструирования, отработки и испытаний датчиков различных типов и назначения. Способ достаточно подробно описан в работах [22-24, 34] и патентах [25-27] и основан на синергетическом эффекте от использования двух инноваций – метода идентификации нелинейных систем на основе математической теории, опирающейся на общий принцип изоморфизма в теории систем [6, 22], и метода обучения интеллектуальных датчиков, построенных с использованием искусственных нейронных сетей (НС) [11, 28, 34]. На практике при калибровке датчиков не нужно решать сложные уравнения, характеризующие процедуру идентификации в рамках общего принципа изоморфизма [6, 22]. Под ОФП датчика достаточно подразумевать некоторый алгоритм «интеллектуальной» обработки выходных сигналов его ФП, который может быть представлен в форме искусственной НС. Такая НС после обучения на примерах, полученных по результатам калибровочных экспериментов, прошивается в память «интеллектуального датчика.

Само по себе использование искусственных НС для идентификации систем [8] и, в частности, ОФП датчиков не является новым [29]. Однако ранее, как правило, предполагалось наличие априорной информации об общем характере ФП (градуировочной зависимости) датчика [29]. По умолчанию постулировалась и традиционная технология конструирования и изготовления датчиков, при которой стремились обеспечить высокий уровень линейности ФП и весьма малый разброс технических характеристик датчиков одного типа в серийном производстве.

В отличие от традиционного подхода к конструированию датчиков, требующего обеспечения линейности их моделей, общий принцип изоморфизма [6, 22], в целом, позволяет исходить из того, что датчики в производстве не отбраковываются, их модели существенно индивидуальны и нелинейны, а в наиболее

общем случае и вообще не известны. Реальная ОФП каждого датчика определяется в процессе индивидуальной калибровки с использованием способа непараметрической идентификации модели датчика, как системы [22, 25-27]. Такая идентификация осуществляется путем обучения искусственной НС, аппроксимирующей ОФП, по известным данным на входе и выходе датчика. По сути, идентифицируемый датчик рассматривается как «черный ящик». Обученная НС-ОФП прошивается в память датчика и датчик в результате такой прошивки становится «интеллектуальным».

Применение предложенного способа позволяет создавать «интеллектуальные датчики» с заданной точностью восстановления измеряемой физической величины в ожидаемых условиях функционирования, обладающие индивидуально особенными (уникальными) функциями преобразования и свойством избирательного повышения чувствительности в интересующих диапазонах. Полученные результаты обеспечивают возможность реализации принципиально новых способов конструирования и калибровки датчиков различного назначения.

Преимущество такого подхода заключается в универсальности ММ ОФП датчика, основанной на задании ее структуры в виде искусственной НС. Параметры ММ автоматически настраиваются в процессе обучения НС в среде моделирования. В процессе обучения НС на вход датчика подают эталонные сигналы с калибровочного стенда. Эти сигналы посредством ФП датчика (которая может быть вообще неизвестна) преобразуются, например, в коды аналого-цифрового преобразователя (АЦП). Коды с АЦП поступают на вход искусственной НС, моделирующей ОФП датчика. Выходной сигнал НС эквивалентен физической величине, воздействующей на вход датчика, и выдается в единицах измерения этой величины. Если сигналы на выходе НС с требуемой точностью совпадают с эталонными сигналами, формируемыми калибровочным стендом, при всех значениях в пределах обучающей выборки, процесс обучения считается успешным. В противном случае обучение проводится до тех пор, пока не будет получен нужный результат. Далее на примере ДУС рассматривается вариант технологии калибровки интеллектуальных инерциальных датчиков, опирающийся на способ идентификации нелинейных систем на основе общего принципа изоморфизма [22-27, 34].

В начале представлены исходные данные для калибровки ДУС и алгоритм аппроксимации ОФП датчика искусственной нейросетью с использованием одной из возможных архитектур. Затем описываются процесс обучения НС с разными функциями потерь, а также процедуры вычисления ошибок обученной сети. Приведены результаты вычислений и графики выходных данных. В выводах обобщены результаты и указаны направления дальнейших исследований.

Исходные данные. В качестве исходных данных используются три параметра, полученные в результате проведения предварительных калибровочных экспериментов с ДУС:

1. коды на выходе АЦП датчика, соответствующие измеряемой ДУС угловой скорости;
2. температура окружающей среды;
3. эталонная (истинная) угловая скорость ДУС, создаваемая калибровочным стендом.

Данные предварительно отсортированы по кодам АЦП и температурам. После сортировки автоматически убираются дублирующиеся строки: их наличие объясняется тем, что частота съема информации с ДУС намного превышает частоту вращения поворотного стола стенда. Пример первых десяти строк исходных данных представлен в таблице 6.1.

Таблица 6.1. Исходные данные

Код АЦП	Температура, °С	Угловая скорость, град/с
-29057	-51,448264	-177,361
-29045	-51,431160	-177,288
-29035	-51,508128	-177,227
-29027	-51,555164	-177,178
-29023	-51,443988	-177,154
-29019	-51,448264	-177,129
-29011	-51,089080	-177,081
-28998	-51,358468	-177,001
-28987	-51,550888	-176,934

Общая формула для аппроксимации полученных данных имеет вид:

$$f(x, y) = z, \tag{6.4}$$

где $\boldsymbol{x}$ – код АЦП, $\boldsymbol{y}$ – температура, $\boldsymbol{z}$ – угловая скорость.

В качестве входных данных аппроксимации используются коды АЦП и температура в виде матрицы, а в качестве выходных – вектор угловых скоростей:

$$(x, y) = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ \cdots & \cdots \\ x_n & y_n \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \cdots \\ z_n \end{pmatrix}.$$

Цель аппроксимации – по входным значениям (кодам АЦП и температуре) найти функцию *f(x, y)*, которая вычислит такое предсказанное значение угловой скорости $\hat{z}$, ошибка которой будет минимальной по отношению к заданным выходным данным, то есть к истинной угловой скорости $\boldsymbol{z}$. Построенная в результате аппроксимации функция *f(x, y)* представляет собой искомую ОФП, позволяющую восстанавливать на выходе датчика истинное значение угловой скорости, воздействующее на вход его чувствительного элемента – первичного измерительного преобразователя.

Требуемую аппроксимирующую функцию $f(x, y)$ будем искать в виде искусственной НС. Обучение НС будем проводить с помощью учителя, в роли которого выступает набор известных истинных угловых скоростей $\boldsymbol{z}$, воздействующих на ДУС.

Для реализации поставленной цели необходимо разработать архитектуру НС, а именно выбрать набор гиперпараметров НС, влияющих на скорость и качество её обучения:

- количество скрытых слоев;
- количество нейронов в каждом скрытом слое;
- вид функции активации (ФА) для каждого слоя (кроме входного и выходного);
- тип функции потерь (ФПт) (так называемой *loss*);
- скорость обучения НС;
- количество эпох обучения НС.

Отметим, что процесс выбора целесообразных гиперпараметров НС является плохо формализуемой эвристической процедурой. Как вариант, возможен перебор всех возможных сочетаний параметров в некотором заранее заданном интервале их возможных значений.

После выбора гиперпараметров, обучение НС сводится к автоматической настройке весовых коэффициентов (ВК) и смещений для нейронов каждого слоя сети с целью минимизации ФПт на всех обучающих данных. Значения ВК и смещений меняются на каждой эпохе обучения. Оценка точности выходных значений НС определяется выбранной ФПт.

Значение сигнала out_j на выходе j-го нейрона скрытого слоя определяется формулой:

$$out_j = f_A\left(\sum_{i,j=1}^{n} w_{i,j} \cdot x_i + b_j\right),$$

где f_A – функция активации нейрона, $w_{i,j}$ – весовой коэффициент (i – номер нейрона, с которого поступает сигнал, j – номер нейрона, на который сигнал поступает), x_i – сигнал, поступающий на вход нейрона, b_j – смещение нейрона.

Существует несколько типовых ФПт для оценки ошибки на выходе НС:

- MSE: $MSE = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(z_i - \hat{z}_i)^2$,

  MAE: $MAE = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|z_i - \hat{z}_i|$,

  MAPE: $MAPE = \frac{100\,\%}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{z_i - \hat{z}_i}{z_i}\right|$, где

z_i – истинное значение, $\hat{z}_i$ – предсказанное значение.

Помимо типовых ФПт возможно использование собственных функций. Например, MAE^2, MAPE/100 и т.д. Примеры собственных функций представлены формулами:

$$MAE^2 = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|z_i - \hat{z}_i|\right)^2,$$

$$MAPE/100 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{z_i - \hat{z}_i}{z_i}\right|.$$

После получения предсказанных выходных значений проводится расчет абсолютной (*Delta*) и относительной (*DeltaO*) ошибок:

$$Delta_i = |z_i - \hat{z}_i|, \tag{6.5}$$

$$DeltaO_i = \left|\frac{z_i - \hat{z}_i}{z_i}\right| \cdot 100\ \%. \tag{6.6}$$

Для каждой ошибки вычисляются среднее, минимальное, максимальное значения ошибки, среднее квадратичное отклонение и медиана. По результатам оценки ошибок предсказанных значений выбирается НС с наилучшими показателями.

Разработка нейронной сети. В соответствии с методикой, описанной в статьях [22-24, 34], в патентах [25-27] и в параграфе 6.1, восстановлению, то есть аппроксимации с помощью НС, подлежит не реальная ФП ДУС, характеризующая зависимость кода АЦП *x* от воздействующих на ДУС эталонной угловой скорости *z* и температуры *y*, формируемых калибровочным стендом, а обратная к ней ОФП в виде функции (6.4), позволяющая по коду АЦП *x* и температуре *y* восстанавливать на выходе «интеллектуального ДУС» измеряемое значение *z* угловой скорости, соответствующее действующей на ДУС истинной угловой скорости с допустимой погрешностью.

Из текстовых данных, содержащих результаты калибровочных экспериментов с ДУС, импортируются данные, которые применительно к функции вида (6.4) разделяются на входные (АЦП и температура) и выходные (истинная угловая скорость). В соответствии с методикой, изложенной в параграфе 6.1 и в работах [22-27, 34] предварительно из импортированных данных удаляются дублирующиеся строки. В рассматриваемом случае общее количество строк импортированных данных составило 78073, а после удаления строк-дубликатов – 59567.

Поскольку НС при работе с большими абсолютными значениями данных имеет большую ошибку предсказания на выходе, необходимо нормализовать входные данные. Нормализация проводится по формуле:

$$x_{i.norm} = \frac{x_i}{|x_{max}|},$$

где $x_{i.norm}$ – значение нормированной величины, x_i – значение ненормированной величины, x_{max} – максимальное по модулю возможное значение величины.

После нормализации данные разделяются на тренировочные и валидационные (проверочные) в определенном процентном соотношении. Валидационные данные нужны для проверки того, что НС правильно предсказывает истинную угловую скорость не только на «знакомых» ей тренировочных данных, но и на незнакомых. В настоящей работе выборка тренировочных и валидационных данных составлялась в соотношении 50% / 50%.

Как было указано выше, для создания НС необходимо задать её архитектуру: количество скрытых слоев, количество нейронов в каждом слое, функции активации, скорость обучения и количество эпох обучения. С целью отработки методики построения интеллектуальных датчиков, сокращения времени моделирования и выбора целесообразной ФП, для аппроксимации была выбрана следующая простейшая архитектура НС:

– входной слой с двумя нейронами – на вход сети поступают два значения: код АЦП $\boldsymbol{x}$ и температура $\boldsymbol{y}$;

– один скрытый слой с тремя нейронами, функция активации скрытого слоя f_A ReLU [30];

– выходной слой с одним нейроном – сумматор выходов скрытых нейронов, на выходе слоя формируется предсказанная угловая скорость $\boldsymbol{z}$;

– скорость обучения (далее LR), равная 0,0007;

– количество эпох обучения: 100.

Значения скорости обучения и количества эпох обучения подобраны эмпирически. Архитектура НС показана на рис. 6.2.

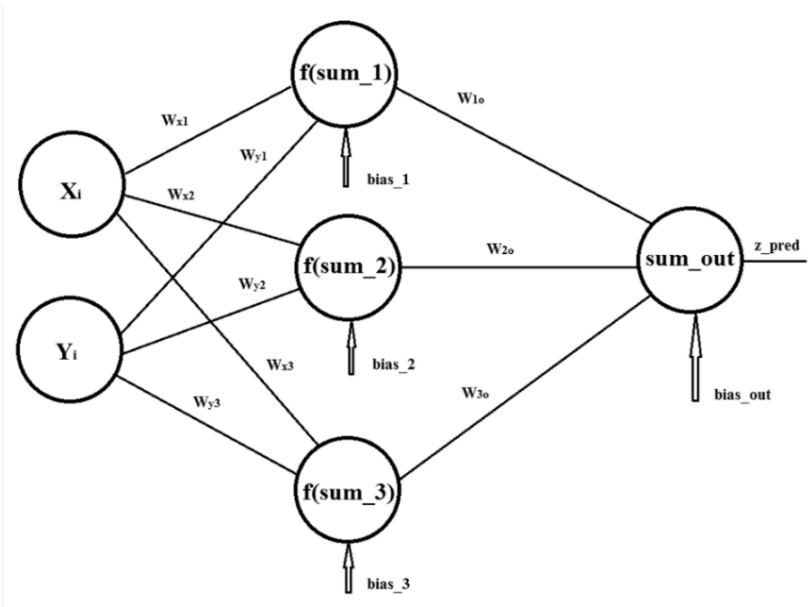


Рис. 6.2. Структура НС

Перед началом обучения НС весовые коэффициенты (далее ВК) $w_{i,j}$ и смещения b_j принимают случайные значения и меняют свои значения на каждой

эпохе обучения с целью уменьшения суммарной ошибки предсказания на выходе (то есть значения ФПт). Используется подход к целенаправленному изменению ВК и смещений в соответствии с методом обратного распространения ошибки [31].

Для определения лучшей НС в выбранной архитектуре исследовались следующие ФПт: MSE, MAE, MAE^2 и MAPE/100 – см. выше. Последние две функции создаются отдельно средствами языка программирования Python и библиотеки Keras [32, 33]. В соответствии с подходом, принятым в библиотеке Keras, объявляется функция НС *basemodel*, в которой описываются:

1. входной слой, принимающий два сигнала (***x***, ***y***);
2. скрытый слой, принимающий на вход выходы входного слоя и выдающий значения ФА от взвешенной суммы и смещений на каждом нейроне;
3. выходной слой, принимающий на вход выходы нейронов скрытого слоя и вычисляющий ФПт для оценки ошибки предсказанного значения на выходе НС.

Также объявляется функция остановки обучения (так называемая *Early Stopping*), которая останавливает обучение НС при возникновении переобучения [28] или при достижении заданной точности предсказанного выхода сети.

После этого запускается автоматическое обучение НС. Графики значений ФПт в зависимости от номера эпохи обучения представлены на рис. 6.3 - 6.6. Видно, что сработала функция остановки обучения и 100 эпох обучения не потребовалось. Значения ФПт обучаемых и валидационных данных, представленные в заголовках графиков, определялись на предпоследней эпохе обучения, так как после нее начинается переобучение.

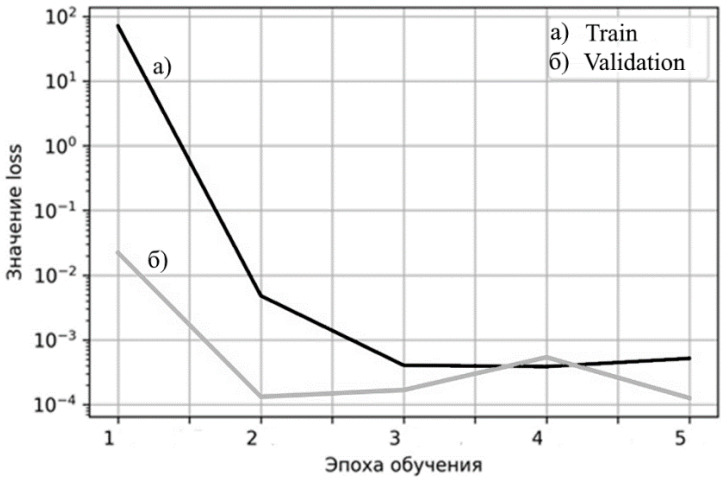


Рис. 6.3. График ФПт MSE

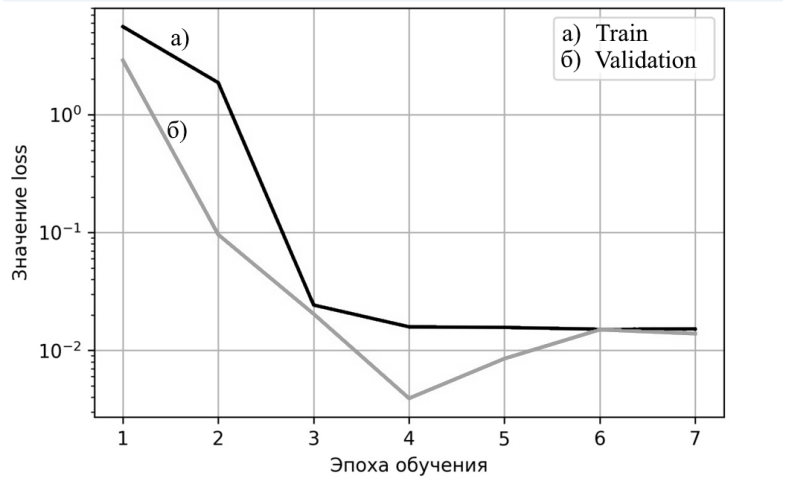


Рис. 6.4. График ФПт MAE

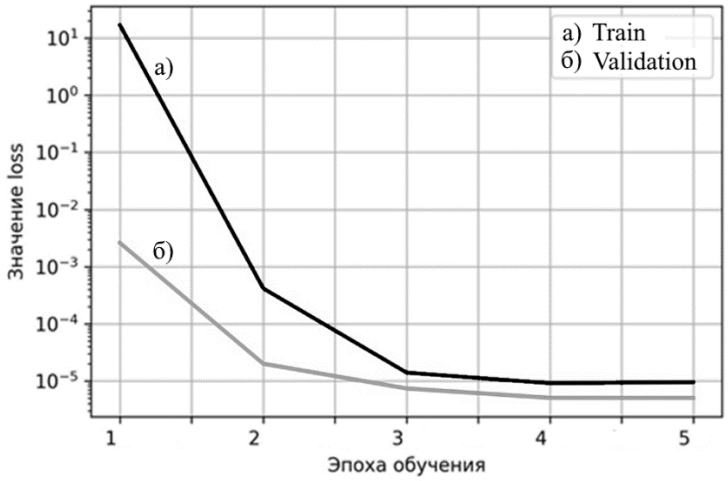


Рис. 6.5. График ФПт MAE2

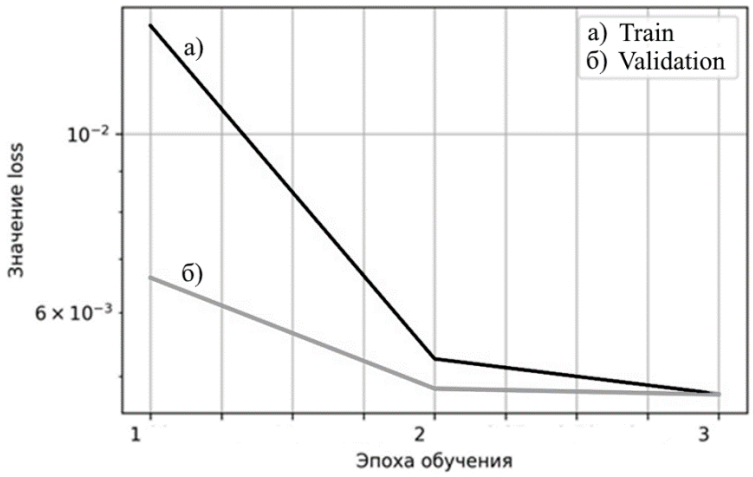


Рис. 6.6. График ФПт MAPE/100

Графики соотношения истинной и предсказанной угловых скоростей при граничной для ДУС температуре -50 °С показаны на рис. 6.7, 6.8. Графики для ФПт MSE, MAE, MAE^2 на рис. 6.7 визуально неразличимы. Из графиков на рис.

6.3 - 6.8 видно, что наиболее перспективной является ФПт MAE^2. Функции MAPE/100 и MAE исследовать нецелесообразно.

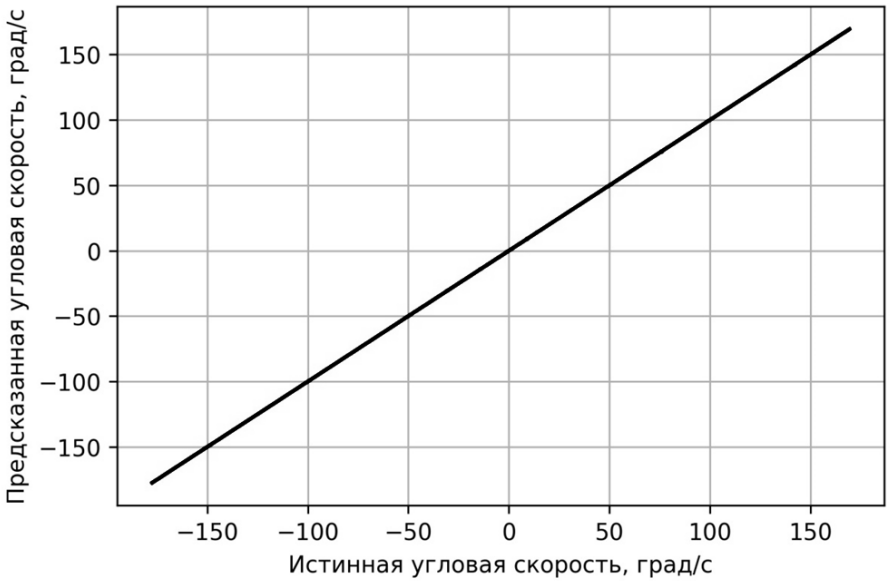


Рис. 6.7. График соотношения истинной и предсказанной угловых скоростей MAE^2

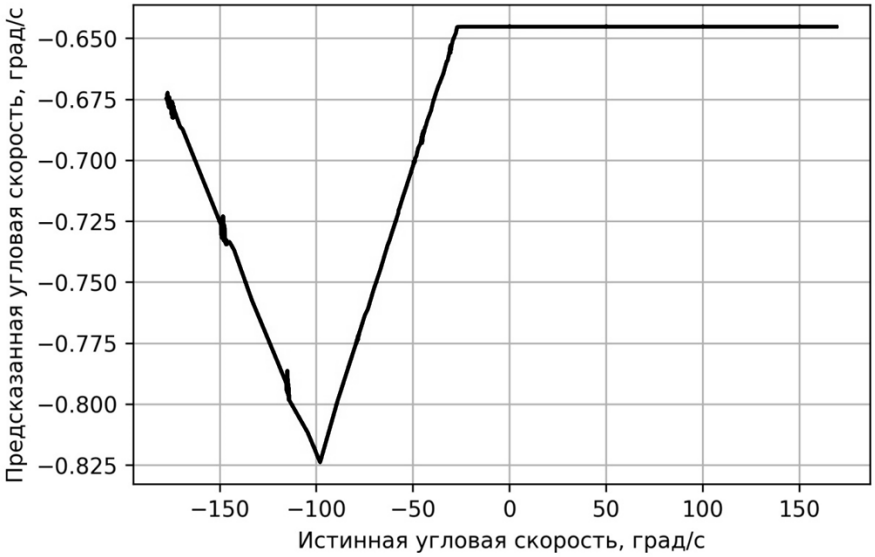


Рис. 6.8. График соотношения истинной и предсказанной угловых скоростей ФПт MAPE/100

После обучения НС по формулам (6.5), (6.6) вычислялись ошибки *Delta* и *DeltaO* для каждой ФП. Графики ошибок для ФПт MAE^2 показаны на рис. 6.9, 6.10.

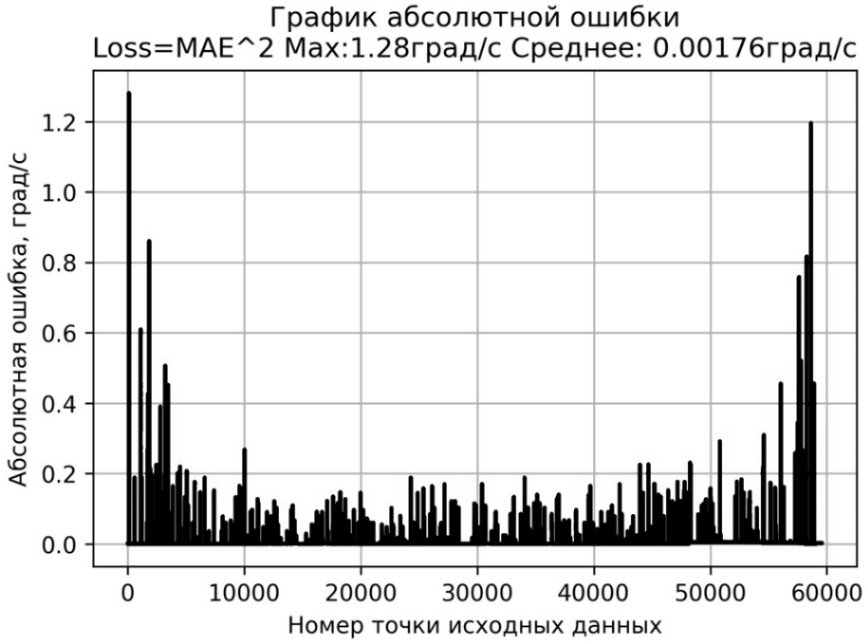


Рис. 6.9. График абсолютной ошибки Delta при ФПт MAE^2

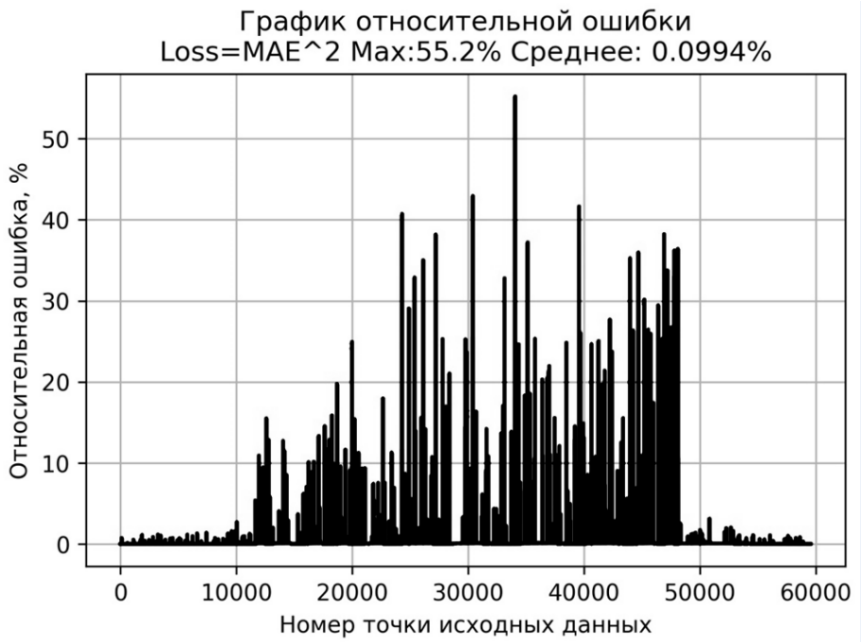


Рис. 6.10. График относительной ошибки DeltaO при ФПт MAE^2

Величины среднего, минимального, максимального значения ошибок, среднеквадратического отклонения (СКО) и медианы представлены в табл. 6.2 и 6.3. Лучшие результаты (то есть минимальные значения ошибок) выделены полужирным курсивом.

Из таблиц 6.2 и 6.3 видно, что наилучшей ФПт для НС является MAE^2, поскольку она обладает наибольшим количеством наименьших значений абсолютных и относительных ошибок; функции MAPE/100 и MAE дальше исследовать нецелесообразно.

Таблица 6.2. Абсолютная ошибка *Delta* моделей НС.

Ошибка, °/сек	MSE	MAE	MAE^2	MAPE/100
Минимум	***$3{,}05 \cdot 10^{-8}$***	$1{,}3 \cdot 10^{-6}$	$6{,}1 \cdot 10^{-8}$	$3{,}05 \cdot 10^{-6}$
Среднее	0,0066	0,015	***0,0018***	14,5089
Максимум	1,1939	***1,1648***	1,2814	176,6866
СКО	0,0233	0,02	***0,0137***	32,763
Медиана	0,0014	0,001	***0,0003***	0,1548

Таблица 6.3. Относительная ошибка *DeltaO* моделей НС.

Ошибка, %	MSE	MAE	MAE^2	MAPE/100
Минимум	$2{,}23 \cdot 10^{-6}$	$8{,}66 \cdot 10^{-6}$	***$5{,}49 \cdot 10^{-8}$***	$6{,}5 \cdot 10^{-4}$
Среднее	0,1561	1,148	***0,099***	47,392
Максимум	55,254	***52,705***	55,232	1273,101
СКО	1,0423	1,4055	***1,0422***	43,3484
Медиана	0,0749	0,8926	***0,0362***	23,9144

Также для ошибок *Delta*, *DeltaO* при различных ФПт были найдены десять точек с наибольшими значениями ошибок; определялись значения исходных данных, при которых возникают указанные наибольшие ошибки. Примеры для НС с ФПт MAE^2 представлены в табл. 6.4 для абсолютных ошибок и в табл. 6.5 для относительных ошибок. Из таблиц 6.4 и 6.5 видно, что для НС с целесообразной ФПт MAE^2, например, при максимальной абсолютной ошибке *Delta* = 1,28 °/сек, относительная ошибка *DeltaO* не превышает 0,7%, а при максимальной относительной ошибке 55,2%, абсолютная ошибка не превышает 0,19 °/сек, так как наблюдается при околонулевой угловой скорости.

Таблица 6.4. Десять точек с максимальным значением абсолютных ошибок *Delta* для НС с ФПт MAE^2.

Истинная угловая скорость, °/сек	Предсказанная угловая скорость, °/сек	Код АЦП	Температура, °C	Абсолютная ошибка, °/сек
-176,0	-174,719	-28624	-19,246	1,281
140,941	139,745	22895	41,615	1,196
-77,334	-76,473	-12528	41,935	0,861
109,586	110,403	18088	48,867	0,817
75,472	74,713	12241	48,91	0,759
-114,487	-113,877	-18656	-19,224	0,61
76,064	75,544	12377	-51,816	0,5204
-43,165	-43,672	-7154	49,2	0,507
142,552	142,096	23280	-51,961	0,457
42,354	41,898	6865	49,149	0,456

Таблица 6.5. Десять точек с максимальным значением относительных ошибок *DeltaO* для НС с ФП МАЕ^2.

Истинная угловая скорость, °/сек	Предсказанная угловая скорость, °/сек	Код АЦП	Температура, °С	Относительная ошибка, %
-0,342	-0,531	-86	41,469	55,232
-0,397	-0,568	-92	41,144	42,951
-0,336	-0,476	-77	49,179	41,664
-0,464	-0,653	-106	49,649	40,735
-0,256	-0,354	-57	49,487	38,247
-0,446	-0,616	-100	39,861	38,193
-0,378	-0,519	-84	41,619	37,218
-0,403	-0,256	-41	50,077	36,414
-0,488	-0,311	-50	49,908	36,233
-0,629	-0,403	-65	39,87	35,978

Для уменьшения значений ошибок возможен вариант дальнейшего дообучения НС – то есть следует продолжить обучать сеть до тех пор, пока не будет достигнута необходимая точность.

Гистограммы абсолютных и относительных ошибок для ФПт МАЕ^2 представлены на рис. 6.11, 6.12. Количество ошибок представлено в логарифмическом масштабе. Внутри каждого столбца дополнительно указан процент соответствующих ошибок от общего числа точек измерения. Анализ таких рисунков для всех видов используемых ФПт также подтвердил, что наилучшей ФПт для НС является МАЕ^2.

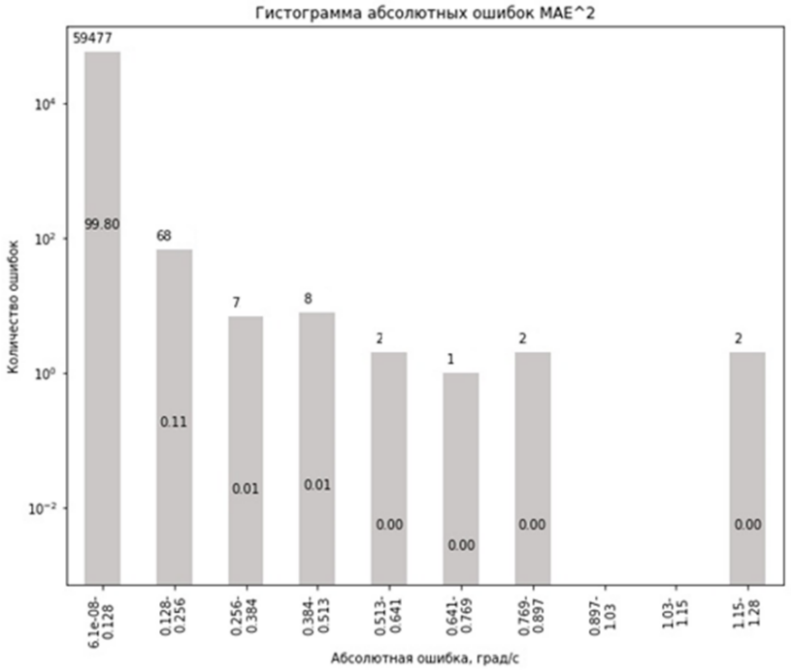


Рис. 6.11. Гистограмма абсолютной ошибки Delta при ФПт MAE2

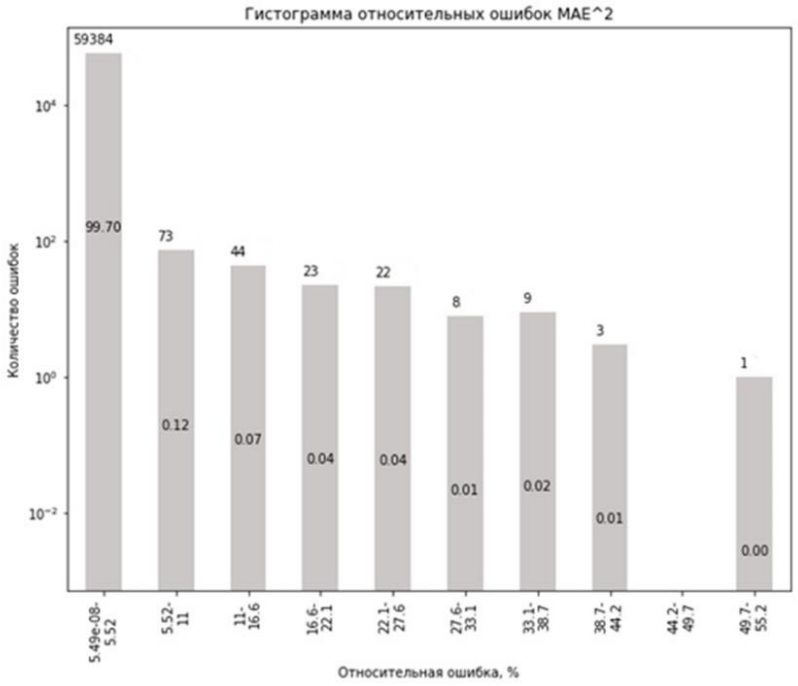


Рис. 6.12. Гистограмма относительной ошибки DeltaO при ФПт MAE2

Заключение. На примере ДУС показана возможность практической реализации технологии создания и обучения интеллектуальных датчиков, использующих способ идентификации систем на основе общего принципа изоморфизма и аппрокимации с требуемой точностью двумерной ОФП датчика с помощью искусственной НС, обучаемой на данных калибровочных экспериментов. Это позволяет использовать искусственные НС для решения задач индивидуальной калибровки инерциальных навигационных датчиков. Такие датчики можно разрабатывать и изготавливать в производстве не накладывая типовых жестких требований как на линейность их ФП, так и на параметры разброса технических характеристик датчиков одного типа. Таким образом, можно утверждать, что создание так называемых «интеллектуальных» датчиков является решаемой задачей. Качество и точность решения задач аппроксимации ОФП датчиков с помощью искусственных НС во многом зависят от выбора ФПт. Из результатов проведенных исследований следует, что для ДУС целесообразным является выбор ФПт типа MAE^2. После выбора предпочтительной ФПт дальнейшие исследования могут быть продолжены с целью уточнения целесообразной архитектуры искусственной НС.

Литература к Главе 6 Раздела 1 Части 2:

1. *Кулабухов В.С.* Принцип изоморфности в задаче реализации и его приложения к анализу свойств систем управления // В сборнике: XII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014. Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН. 2014. С. 438-448.
2. *Кулабухов В.С.* Изоморфные наблюдатели состояния и робастная фильтрация сигналов систем // Радиотехника. 2017. №8. С. 50-55.
3. *Кулабухов В.С.* Синтез регуляторов для следящих систем на основе принципа изоморфности // Мехатроника, автоматизация, управление. 2017. Том 18, №8. С. 507-515.
4. *Kulabukhov V.* Linear Isomorphic Regulators // CMTAI2016. MATEC Web of Conf. 2017. Т. 99. С. 03008. (doi:10.1051/matecconf/20179903008)
5. *Kulabukhov V. S.* Isomorphic observers of the linear systems state // Workshop on Materials and Engineering in Aeronautics (MEA2017) 15–16 November 2017, Moscow, Russian Federation. doi:10.1088/1757-899X/312/1/012016. p. 012016.
6. *Кулабухов В.С.* Общий принцип изоморфизма в теории систем // Cloud of Science. 2018. Т.5. №3. С. 400-472.
7. *Калман Р.Е.* Идентификация систем с шумами // УМН. 1985. Т. 40. Вып.4 (244). С. 27-41.
8. *Цыпкин Я.З.* Информационная теория идентификации. М.: Наука. Физматлит, 1995. 336 с.
9. *Ларионов В.А.* Оптимальное планирование с гарантированной точностью калибровочных испытаний измерительных датчиков: диссертация ... доктора технических наук: 05.13.01 / Ларионов Владимир Александрович; [Место защиты: Юж.-Ур. гос. ун-т]. Челябинск. 2012. 301 с.
   URL: https://search.rsl.ru/ru/record/01006744194
10. ГОСТ Р 8.879-2014 Государственная система обеспечения единства измерений. Методики калибровки средств измерений. Общие требования к содержанию и изложению.
11. *Хайкин С.* Нейронные сети. Полный курс. 2-е изд. Пер. с англ. М.: Издательский дом «Вильямс», 2006. 1104 с.
12. *Кулабухов В.С.* Модель нейробионической сети для бортовых систем искусственного интеллекта // В сборнике: III Всероссийская научно-техническая конференция «Моделирование авиационных систем». Сборник тезисов докладов. ФГУП «ГосНИИАС», 21-22 ноября 2018 г., г. Москва. С. 339-341.
13. *Семенов Л.А., Сирая Т.Н.* Методы построения градуировочных характеристик средств измерений. - М.: Изд-во стандартов, 1986. 127 с.

14. *Грановский В.А.* Методы обработки экспериментальных данных при измерениях / В.А. Грановский, Т.Н. Сирая. - Л.: Энергоатомиздат, 1990. 288 с.
15. *Ларионов В.А.* Автоматизация калибровки и контроля интеллектуальных датчиков технологических производств. - Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2011. 119 с.
16. *Shin E.H.* Accuracy improvement of low cost INS/GPS for land applications: PHD Thesis. – Calgary, Canada: The University of Calgary, 2001. 137 p.
17. *Шаврин В.В., Конаков А.С., Тисленко В.И.* Калибровка микроэлектромеханических датчиков ускорений и угловых скоростей в бесплатформенных инерциальных навигационных системах // Доклады ТУСУРа, № 1 (25), часть 2, июнь 2012, С. 265-269.
18. *Качанов Б.О., Кулабухов В.С., Туктарев Н.А., Ахмедова С.К., Тимошенков А.С.* О калибровке блока микромеханических датчиков угловой скорости // В сборнике: Материалы IV научно-практической конференции памяти О.В. Успенского. Сборник докладов. 2017. С. 185-190.
19. *Заец В.Ф., Кулабухов В.С., Качанов Б.О., Туктарев Н.А., Гришин Д.В., Ахмедова С.К.* Патент RU 2655053 C1. Способ определения коэффициентов калибровки интегрированного блока датчиков. Опубликован 23.05.2018. бюллетень №15. Патентообладатель: АО МНПК «Авионика».
20. *Качанов Б.О., Кулабухов В.С., Туктарев Н.А., Ахмедова С.К., Новиков В.А., Тимошенков А.С.* Калибровка трехосного МЭМС-датчика угловых скоростей с учетом нелинейной модели смещений нулей // Датчики и системы. 2018. № 8-9 (228). С. 46-55.
21. *Заец В.Ф., Кулабухов В.С., Качанов Б.О., Туктарев Н.А., Ахмедова С.К., Новиков В.А.* Патент RU 2718142 C1. Способ повышения точности калибровки масштабных коэффициентов и углов неортогональности осей чувствительности блока датчиков ДУС. Опубликован 30.03.2020, бюллетень №10. Патентообладатель: АО МНПК «Авионика».
22. *Кулабухов В.С.* Общий принцип изоморфизма и калибровка датчиков на его основе // В сборнике: V научно-практическая конференция памяти О.В. Успенского. Сборник докладов. Под редакцией Сорокина В.А., 2018. С. 98-105.
23. *Кулабухов В.С.* Общий принцип изоморфизма: идентификация моделей и калибровка датчиков // XIII Всероссийское совещание по проблемам управления. ВСПУ-2019. Москва 17-20 июня 2019 г. URL: https://vspu2019.ipu.ru/files/vspu/%D0%94%D0%BE%D0%BA%D0%BB%D0%B0%D0%B4%D1%8B%20%D0%92%D0%A1%D0%9F%D0%A3-2019/19%20%D0%A3-

765/%D0%9A%D1%83%D0%BB%D0%B0%D0%B1%D1%83%D1%85%D0%BE%D0%B2%D0%92%D0%A1.pdf (дата доступа 31.08.2020).

24. *Кулабухов В.С., Новиков В.А., Ахмедова С.К., Туктарев Н.А.* Калибровка интеллектуальных датчиков с применением искусственных нейронных сетей // В книге: Навигация, наведение и управление летательными аппаратами. Тезисы докладов. 2019. С. 195-197.
25. *Кулабухов В.С., Цацин А.А., Заец В.Ф. и др*. Патент RU 2 714 612 C1. Способ идентификации нелинейных систем. Опубликован 18.02.2020, бюллетень №5. Патентообладатель: АО МНПК «Авионика».
26. *Кулабухов В.С., Цацин А.А., Заец В.Ф., Туктарев Н.А., Ахмедова С.К., Булгаков В.В.* Патент № RU 2 730 367 C1. Способ калибровки интеллектуальных датчиков. Опубликован 21.08.2020, бюллетень № 24. Патентообладатель: АО МНПК «Авионика».
27. *Кулабухов В.С., Цацин А.А., Заец В.Ф. и др.* Патент RU 2 714 039 C1. Система для разработки интеллектуального датчика. Опубликован 11.02.2020, бюллетень №5. Патентообладатель: АО МНПК «Авионика».
28. *Осовский С.* Нейронные сети для обработки информации. М.: Финансы и статистика, 2002. 346 с.
29. https://www.dissercat.com/content/razrabotka-neirosetevykh-metodov-postroeniya-graduirovochnykh-kharakteristik-sensorov-i-sens (дата доступа 31.08.2020).
30. https://neurohive.io/ru/osnovy-data-science/activation-functions/ (дата доступа 27.07.2020).
31. https://neurohive.io/ru/osnovy-data-science/obratnoe-rasprostranenie/ (дата доступа 27.07.2020).
32. https://www.tensorflow.org/tutorials (дата доступа 27.07.2020).
33. https://keras.io/api/ (дата доступа: 27.07.2020).
34. *Кулабухов В.С., Булгаков В.В., Новиков В.А.* Вариант технологии обучения и калибровки интеллектуальных инерциальных датчиков // Авиакосмическое приборостроение. 2020. №10. С. 11-25.

Глава 7

Современное состояние математической теории анализа и синтеза систем на основе общего принципа изоморфизма

Введение. В главе дается краткий обзор современного состояния и направлений развития новой фундаментальной парадигмы в математической теории систем, в которой все основные понятия и свойства систем формализованы на основе единого и единственного принципа - общего принципа изоморфизма. С момента его возникновения, а по сути, открытия в 1996 году, когда была сформулирована и доказана основная лемма теории и теорема о реализации изоморфизма композицией отображений, прошло уже почти 30 лет и можно подвести некоторые итоги.

Несмотря на то, что теория опирается на фундаментальное, математическое, предельно формализованное понятие изоморфизма алгебраических структур (систем, категорий), развивалась она долгое время автором практически в одиночку, так как уже первые результаты были настолько необычны и непривычны даже для профессиональных математиков, что у многих вызывали непонимание, а у некоторых и прямое отторжение по принципу «такого не может быть». Это вызывало необходимость проведения многочисленных проверок доказательств основных утверждений и выдвигаемых «контрпримеров», что приводило к медленному движению фактически «на ощупь». Каждая более-менее значимая публикация и каждое выступление на конференциях требовали тщательной проработки и подготовки. Некоторые известные «старые, авторитетные журналы» даже после весьма придирчивого, педантичного, долгого научного редактирования и рецензирования под разными предлогами «на всякий случай» отклоняли статьи несмотря на то, что ранее в них статьи автора по другой проблематике были опубликованы.

Тем не менее в настоящее время уже можно констатировать, что новая теория состоялась, выдержала проверку временем, опубликована в весомых отечественных и зарубежных журналах, прошла апробацию на многих отечественных и зарубежных научных форумах и, самое главное, нашла практическое примене-

ние, а значит и подтверждение, при решении различных прикладных задач. Проанализируем развитие основных научных положений и прикладных аспектов алгебраической теории систем, опирающейся на общий принцип изоморфизма.

Во-первых, главный и единственный аксиоматический принцип новой теории, общий принцип изоморфизма, не является «надуманным» и «умозрительным». В своей основе он изначально опирался на фундаментальный «принцип единственности» Р.Е. Калмана, а фактически является просто естественно-научной интерпретацией, обобщением давно известного в математике и философии понятия и определения изоморфизма. В простейшем случае изоморфизм преломляется в тождественный автоморфизм (самый «сильный» изоморфизм в математическом смысле) – абсолютно полную и точную идентичность (тождественность) каждой «вещи», в философском смысле, самой себе. В этом смысле общий принцип изоморфизма, как аксиома, становится «естественным» и неоспоримым в принципе.

Объединения понятия и определения изоморфизма, а также сформировавшегося к концу XX столетия понятия «система» оказалось вполне достаточно для формирования новой цельной и непротиворечивой алгебраической теории систем, явившейся, по сути, «математической философией систем» и основой более широкой и общей новой научной парадигмы в теории систем, включающей не только фундаментальные теоретические положения и базовые утверждения, но и более «узкие ответвления» в самые разные дисциплины и приложения. В этом смысле *парадигма является системообразующей и многодисциплинарной*, развивающейся как в области «чистой математики», так и в области математической теории систем, в теории управления динамическими системами, в теории обработки информации, в теории идентификации объектов на основе моделей искусственного интеллекта, в теории интеграции систем в «системы систем» – в интегрированные комплексы - и, вообще, в теории системного анализа и проектирования сложных (недетерминированных) искусственных целенаправленных систем. Уже сейчас можно с уверенностью утверждать, что новая парадигма найдет широкое развитие и применение в алгебраической и системной биологии, в квантовой физике и в космологии. О других возможных направлениях развития и приложениях можно только догадываться.

Во-вторых, принцип позволил сформулировать и доказать фундаментальную лемму и теорему о реализации изоморфизма композицией отображений. Оказалось, что установить идентичность («строения», «устройства» в определенном смысле, то есть изоморфизм) вещей и полную идентичность вещи самой себе (тождественный автоморфизм) можно даже не непосредственно, что часто

и невозможно, а опосредованно, с помощью композиции некоторых отображений, реализующих указанный изоморфизм (или тождественный автоморфизм в «сильном» случае).

Часто много проще «подобрать» отображения и построить их композицию, чем обеспечить изоморфизм «вещей» напрямую. Более того, в природе могут «случайно» возникать композиции, реализующие те или иные изоморфизмы. При определенных обстоятельствах такие одинаковые композиции могут возникать неоднократно, что, по сути, обеспечивает возможность «самовоспроизводиться» на «выходе» соответствующего изоморфизма некоторой «вещи», имеющейся на его «входе». В этом случае изоморфизм формализует «цель» указанного воспроизводства – обеспечить полную идентичность «новой вещи» на выходе изоморфизма «старой вещи» на его входе, - а композиция отображений формализует и реализует привлечение для построения «новой вещи» некоторых «ресурсов».

Такой «механизм самовоспроизводства» является весьма универсальным и природа часто его использует применительно к естественным системам. Человек же, например, использует изоморфизм между техническими требованиями и их материальным воплощением при конструировании искусственных систем, создаваемых для удовлетворения своих нужд и потребностей, но тоже не напрямую, в форме композиции реализующих его отображений. «Система», построенная на таком изоморфизме и формализующая его «реализацию» (реализацию цели) с помощью соответствующей композиции отображений, как раз и является средством указанного самовоспроизведения или конструирования «вещи».

Математически строгая формализация понятия «система» на единой основе общего принципа изоморфизма, основной леммы и теоремы о реализации с использованием замкнутой композиции отображений, построенной на соответствующем изоморфизме, позволила по-новому формализовать все основные, но производные от понятия «система», определения «старой» теории систем - модель, абстрактная система, простая, сложная, большая система. Формализованное с использованием определения изоморфизма понятие «система» позволило опять-таки по-новому, с точностью до изоморфных моделей весьма общего вида, также строго формализовать и определить другие фундаментальные понятия, свойства систем и критерии их обеспечения, а именно понятия и критерии наблюдаемости, управляемости, контролируемости, идентифицируемости систем, а также разработать новые формализованные методы анализа и синтеза регуляторов, наблюдателей и интегрированных динамических информационно-управляющих систем. Все новые определения понятий и критериев прошли практическую апробацию в рамках различных приложений теории.

В-третьих, самое главное, общий принцип изоморфизма, основная лемма и теорема о реализации позволили фундаментально-математически, строго формально объяснить ранее необъяснимые явления «эмерджентности» и «системного эффекта», «неожиданно» проявлявшиеся и возникавшие в системах самой разной природы и в чисто математических, алгебраических системах, в частности. С этим связан открытый в рамках новой теории *принцип относительности в алгебре*: оказалось, что свойства математических объектов (например, матриц), ранее казавшиеся незыблемыми, могут меняться в зависимости от того, в какой композиции объектов (в какой «системе») они рассматриваются или вообще вне систем и композиций. В это не хотели верить некоторые «чистые» математики и именно это вызывало у них отторжение новой теории. В связи с этим, возможно, придется пересмотреть и семантику «устоявшегося» в математике понятия «алгебраическая система», так как оно не коррелирует с определением понятия «система», принятым в общей теории систем и в философии, а теперь уже не коррелирует и с формализованным определением понятия «система» в рамках рассматриваемой парадигмы. Вообще говоря, понятия «алгебраическая система» и «алгебраическая структура» в алгебре часто рассматриваются, по существу, как синонимичные. В связи с новой парадигмой более целесообразным представляется в рамках «старой семантики» применять понятие «алгебраическая структура», а термин «алгебраическая система» более целесообразно относить к понятию более высокого уровня анализа, предполагающему объединение нескольких «алгебраических структур» (то есть некоторых «частей») в замкнутую композицию-систему (коммутативную диаграмму) посредством отношений-морфизмов (то есть в нечто «целое»). В этом смысле понятие «алгебраическая система» будет синонимичным понятию «абстрактная система» и, в целом. будет более точно отвечать понятию «система», сложившемуся в общей теории систем.

Далее рассмотрим, как возникали и развивались фундаментальные теоретические положения и базовые утверждения новой теории и как они преломлялись в практические приложения.

7.1. Развитие теоретических положений новой научной парадигмы в математической теории систем

Одной из прикладных «технических» и вместе с тем фундаментальных естественно-научных проблем является проблема существования и единственности решений задач теории систем, начало анализа которой было положено в работах [1, 2], где она сформулирована в виде принципа единственности в задаче реализации (идентификации). Суть проблемы реализации состоит в построении модели, объясняющей (реализующей) некоторые данные об объекте исследований (о системе).

Принцип единственности в задаче реализации гласит [1]: если данные точные и полные, то существует одна и только одна минимальная система (математическая модель), воспроизводящая эти данные. Следствие: все минимальные объяснения одних и тех же данных суть изоморфные модели. Отметим, что «понятие минимальной реализации, для которой пространство состояний имеет минимальную размерность» [2], является одним из фундаментальных понятий «теории абстрактной реализации» [2] и, в целом, «алгебраической теории линейных систем» [2]. В [1] был сделан вывод, что общая теорема о реализации, соответствующая принципу единственности, не сформулирована и не доказана, так как математически строго не определены понятия «данные», «система», «полнота данных» и «точность данных», то есть не решена проблема формализации понятий.

Зарубежные и отечественные ученые, периодически обращавшиеся к проблематике единственности решений задач теории систем, обсуждали ее, например, в работах [3-7, 40-42, 44]. Однако и в этих, и в других работах не удалось решить и снять проблему формализации понятий, а также, в целом, дать приемлемую формулировку и привести доказательство общей теоремы о реализации, что не позволило получить единственные в смысле [1, 6, 7, 40-42] решения классических задач анализа и синтеза систем в их исходной постановке (без редукции моделей с использованием, например, вложения в односвязные изоморфные системы-образы, как это делается в рамках теории вложения систем [7, 42, 68, 69]).

Указанную проблему, как представляется, удалось решить в работах [8-13], в которых была обоснована и предложена новая формулировка принципа единственности в форме общего принципа изоморфизма, позволившая, на наш взгляд, разрешить как фундаментальные проблемы теории систем, так и проблемы, обусловленные трудностями решения часто встречающихся прикладных задач в их исходной постановке.

Как и в работах [1, 2, 6, 7, 40-42, 44, 68], в работах [8-13] изложение ведется на алгебраическом языке отображений и морфизмов, но интерпретируемых с учетом сложившихся понятий общей теории систем. Такой подход позволил переложить на язык математики ранее практически неформализованные и часто достаточно вольно трактуемые понятия и определения общей теории систем, носившей «гуманитарно-философский» характер. Конечно формальные определения в теории систем различными авторами вводились и ранее, но эти определения не имели под собой прочной формально-математической, аксиоматической основы и часто являлись, по сути, отпечатком некоторых «вкусовых» предпочтений авторов.

В рамках новой парадигмы именно предельно простая, интуитивно понятная и прозрачная, непротиворечивая и максимально формализованная аксиоматика позволила поставить теорию систем на прочный формально-математический фундамент, полностью ей адекватный в смысле отражения системно-философских понятий на наиболее общем, алгебраическом языке математики.

В рамках новой теории, исходя из фундаментальных положений теории реализации [1, 2], на основе введенного общего принципа изоморфизма была сформулирована и доказана теорема о реализации изоморфизма композицией отображений [8-13], утверждающая существование обратных у отображений, образующих эту композицию. Новизна заключается в том, что отображения, составляющие композицию, в общем случае, вне коммутативной диаграммы, могут не являться изоморфизмами в обычном смысле. Более того, в параграфе 1.6 этой части книги (см. рис. 1.24) было показано, что даже обыкновенный изоморфизм, имеющий вне коммутативной диаграммы некоторое единственное обратное отображение, внутри коммутативной диаграммы в составе композиции отображений, реализующей системообразующий изоморфизм-цель, может иметь совсем другое обратное! В связи с этим задача определения обратных становится нетривиальной. Теорема о реализации позволила эту задачу решить: здесь в книге и в работах [8-13] показано, что обратные к отображениям, составляющим композицию, реализующую некоторый изоморфизм, можно вычислить в соответствующей коммутативной диаграмме по строго определенным правилам с точностью до этого изоморфизма. В книге и в указанных работах приведен метод решения этой фундаментальной задачи, проиллюстрированный примерами. В книге и в ряде других работ, на которые мы дадим ссылки ниже, проиллюстрированы многочисленные приложения теоремы о реализации и указанного метода к решению задач моделирования и идентификации систем, синтеза и интеграции регуляторов и наблюдателей в информационно-управляющей системе, задач системного проектирования и интеграции систем общего вида, задач построения и калибровки интеллектуальных датчиков, а также синтеза информационных систем.

В целом рассматриваемая научная парадигма содержит цельную, строго формализованную на языке современной алгебры, внутренне непротиворечивую, самодостаточную совокупность логически взаимосвязанных и согласованных взглядов на системы и методы их исследования, анализа и синтеза, а также общий формально-математический подход к анализу их свойств и опирается на прозрачную, минимально необходимую и строго обоснованную с точки зрения практики аксиоматику, опирающуюся на общий принцип изоморфизма. Рассмотрим, как возник и развивался указанный принцип.

Как мы указывали в начале параграфа, отправной точкой анализа фундаментальных подходов к формализации постановок и процедур решения задач теории систем явился принцип единственности, сформулированный Р. Калманом в [1, 2] применительно хотя и к фундаментальной, но достаточно «узкой» и во многом «технической» задаче идентификации объектов в условиях шумов. В процессе анализа было установлено, что как в работах [1, 2], так и в последующих работах других исследователей (см., например, [3-7, 40-42, 44, 68, 69]) конструктивное с точки зрения практики решение проблем формализации понятий, а также существования и единственности решения даже этой «узкой» задачи найдено не было, не говоря уже о других классических задачах теории систем.

В связи с этим с практической точки зрения формулировку принципа единственности, данную в [1], было предложено уточнить [8-13]. Дело в том, что, наблюдая поведение объекта (системы) как «черного ящика» (вход и выход), априори неизвестно, полные ли и точные ли данные об объекте исследований мы имеем. Кроме того, как указывалось в [1], весьма сложно формально определить сами понятия «полнота» и «точность» данных. Поэтому было сочтено целесообразным ввести новую, более «сильную» в математическом смысле, но более практичную формулировку принципа единственности в форме ниже следующего общего принципа изоморфизма [8-13]: если существует такое минимальное в смысле [1, 2] отображение (модель) f, которое однозначно (изоморфно) объясняет некоторые данные о системе, то

a) с точностью до модели-изоморфизма f эти данные являются полными и точными – имеет место изоморфизм данных;

b) модель f единственна в том смысле, что если существуют другие минимальные изоморфные модели-объяснения тех же данных, то эти модели-объяснения изоморфны модели f – имеет место изоморфизм моделей.

Другими словами, изоморфизм наблюдается в обе стороны: во-первых, как взаимно-однозначное преобразование друг в друга входных и выходных данных (изоморфизм самой модели-отображения f, который назовем изоморфизмом данных); во-вторых, как взаимно-однозначное преобразование друг в друга любого количества «минимальных объяснений» (моделей), построенных на этих данных (такой изоморфизм назовем изоморфизмом моделей).

В этой формулировке нет ничего неопределенного: с точностью до изоморфизма, если таковой найдется, рассматриваемые данные автоматически становятся полными и точными. Более того, любой другой изоморфизм, построенный на тех же данных автоматически становится изоморфным первому изоморфизму и в этом смысле первый изоморфизм удовлетворяет принципу единственности,

так как является минимальным отображением рассматриваемых данных или, если пользоваться терминологией работ [1, 2], - их минимальной реализацией.

Продолжая обобщения, в первой части книги было отмечено, что общий принцип изоморфизма, в первоначальном варианте отталкивавшийся от формулировки принципа единственности [1] и сформулированный применительно к некоторым «данным» об объекте реальной действительности, может быть абстрагирован на объекты любой природы и соответствующие «данные» о них. Действительно, обычно «данные» об объектах упорядочивают в форме матриц, векторов, таблиц и вообще некоторых *упорядоченных множеств с операциями и отношениями* на них. Такие множества называют *алгебраическими структурами* [14, 63-65]. Опираясь на это понятие в первой части книги была дана следующая абстрактно-обобщающая формулировка общего принципа изоморфизма.

Общий принцип изоморфизма в теории систем: если существует изоморфное отображение (модель) *f*, которое взаимно однозначно отображает друг в друга алгебраические структуры, характеризующие некоторый объект исследований (предмет, явление), то

a) с точностью до модели-изоморфизма *f* эти алгебраические структуры являются взаимно полными и точными – имеет место изоморфизм алгебраических структур;

b) изоморфное отображение (модель) *f* единственно и минимально в том смысле, что если существуют другие изоморфные модели-отображения тех же алгебраических структур, то эти модели-отображения изоморфны модели *f* – имеет место изоморфизм моделей.

Таким образом, принцип изоморфизма справедлив для весьма общих случаев, характеризующих разную алгебраическую и физическую природу соответствующих отображений, что и дало основание называть его *общим или фундаментальным принципом изоморфизма*. По сути, общий принцип изоморфизма дает естественно-научную интерпетацию известного в алгебре общепринятого формально-математического определения изоморфизма и в этом смысле не является открытием чего-то абсолютно нового. Но оказалось, что взгляд на сложившуюся общую теорию систем с позиций этого принципа позволяет предельно четко формализовать и систематизировать понятия этой теории, их соотношения и всю логику построения этой рассматриваемой научной дисциплины и ее взаимосвязи с другими естественно-научными дисциплинами и даже с дисциплинами, которые вряд ли можно отнести к естественным наукам, но которые широко используют понятия теории систем и системного анализа, например, с

«чистой» математикой, с теорией обработки информации, с философией и с другими гуманитарными науками. Более того, математическая, алгебраическая теория систем, построенная на аксиоматике общего принципа изоморфизма, может явиться своеобразным связующим мостиком между собственно математикой и естественными и гуманитарными науками, позволяя, наконец, приступить к фундаментальной математической формализации последних на единой теоретико-методологической, алгебраической системной основе.

На рис. 7.1 приведена иллюстрация математического понятия и определения изоморфизма $f{:}X\to Y$ между некоторыми алгебраическими структурами или, применительно к исследуемому объекту, «данными» X и Y.

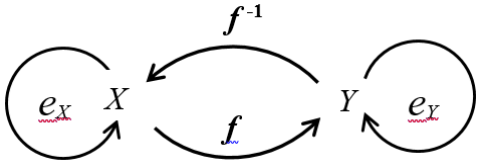


Рис. 7.1. Иллюстрация изоморфизма

Отображение $f{:}X\to Y$ является изоморфизмом, если оно взаимно-однозначно отображает не только объекты алгебраических структур друг в друга, но также взаимно однозначно отображает и правила преобразования этих объектов в соответсвующих алгебраических структурах. В этом случае отображение $f{:}X\to Y$ имеет единственное обратное $f^{-1}{:}Y\to X$ и тождественные отображения («единицы») на соответствующих структурах определяются соотношениями:

$$e_x=f^{-1}\cdot f\,,\ \ e_x\cdot e_x=e_x\,, \tag{7.1}$$

$$e_y=f\cdot f^{-1},\ \ e_y\cdot e_y=e_y\,. \tag{7.2}$$

В главе 14 первой части книги показано, что соотношения вида

$$f=f\cdot e_x,\ \ f^{-1}=e_x\cdot f^{-1}, \tag{7.3}$$

$$f=e_y\cdot f,\ \ f^{-1}=f^{-1}\cdot e_y, \tag{7.4}$$

вытекающие, по сути, из определения изоморфизма, доказывают обязательное существование хотя бы одной композиции (произведения) отображений, реализующей данный изоморфизм. Композиции (7.3), (7.4) являются *тривиальными*. Вместе с тем безусловное существование тривиальных композиций показывает, что даже на двух изоморфных алгебраических структурах X и Y может быть *реализована* «*система*» в смысле определения этого понятия, данного в главе 3 первой части книги. В 14-й главе первой части книги продемонстрировано, что такие «тривиальные» системы существуют в реальности. Таким образом, *существование* по крайней мере одной композиции, реализующей изоморфизм, было доказано.

Вместе с тем общий принцип изоморфизма позволил сформулировать и доказать основную (фундаментальную) лемму рассматриваемой теории систем и опирающуюся на нее теорему о реализации, раскрывающие свойства композиций существенно более общего вида, реализующих тот или иной изоморфизм. В рамках леммы и теоремы рассматривается коммутативная диаграмма, показанная на рис. 7.2.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & Y \\ & Z \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

Рис. 7.2. Коммутативная диаграмма к теореме о реализации

К такому виду приводятся коммутативные диаграммы во многих задачах алгебраической теории систем [8-13]. Доказательство леммы и теоремы о реализации приведено в работах [12-13] и в первой части книги. Здесь ограничимся лишь их формулировками.

Основная (фундаментальная) лемма. Если отображение $f{:}X\to Y$ изоморфно и существуют отображения $g{:}X\to Z$ и $h{:}Z\to Y$, такие, что выполняется композиция $f=hg$, то отображения h и g изоморфны *с точностью до изоморфизма* f, то есть изоморфны в рамках коммутативной диаграммы отображений, показанной на рис. 7.2.

Теорема о реализации: *Если найдется модель* $f{:}X\to Y$ *изоморфно отображающая данные* X *в данные* Y *и существуют отображения* $g{:}X\to Z$ *и* $h{:}Z\to Y$ *такие, что выполняется композиция* $f=hg$, *то*

а) *с точностью до изоморфизма* f *данные* X *и* Y *являются точными и полными;*

б) *модель* f *минимальна и единственна* (*в смысле* [1]);

в) отображения h *и* g *являются изоморфизмами с точностью до изоморфизма* f;

г) *если найдется другая минимальная модель-изоморфизм* $f^*{:}X\to Y$, *объясняющая те же данные, то существует и единственно изоморфное отображение* $\varphi{:}f^*\to f$ *такое, что выполняются соотношения* $f=\varphi f^*$ *и* $f^*=\varphi^{-1}f$, *то есть отображения* f *и* f^* *изоморфны между собой*: $f\cong f^*$.

Теорема о реализации объединяет новую формулировку принципа единственности в форме общего принципа изоморфизма и формулировку основной

леммы. Про композицию hg отображений g и h можно сказать, что она *реализует, моделирует* отображение-изоморфизм f. Отображение f должно быть изоморфным вне коммутативной диаграммы, то есть должно быть обыкновенным, «безусловным» изоморфизмом. Применительно к отображениям g и h теорема утверждает, что даже если они по отдельности, вне композиции и коммутативной диаграммы, не являются изоморфизмами, то в составе композиции $f=hg$, замкнутой изоморфизмом f в коммутативную диаграмму, становятся *изоморфизмами с точностью до изоморфизма* f, то есть становятся некоторыми «относительными изоморфизмами» – изоморфизмами относительно (с точностью до) изоморфизма f. Это означает, что каждое из отображений g и h является изоморфизмом только в рамках коммутативной диаграммы отображений, показанной на рис. 7.2. При этих условиях отображения g и h в коммутативной диаграмме удовлетворяют всем свойствам изоморфных отображений, определенным в алгебре [14, 63-65]. Доказательство приведено в [12] и в первой части книги. В рамках этого доказательства показано, что, вообще говоря, кроме «обыкновенных», существуют некоторые «необыкновенные изоморфизмы», которые также могут быть реализованы некоторой композицией отображений и полностью отвечают основной лемме и теореме о реализации. В случае матриц «необыкновенность» некоторых изоморфизмов заключается в том, что они имеют единственное обратное вне коммутативной диаграммы и при этом их определитель равен нулю. Выявлены такие «необыкновенные изоморфизмы» и в практических задачах синтеза регуляторов, наблюдателей, систем сжатия-восстановления информации и др. Причем было показано, что возникновение таких «необыкновенных изоморфизмов» даже в системах, реализованных на обыкновенном изоморфизме, является объективной «системной закономерностью».

Применительно к отображениям g и h, составляющим композицию, реализующую даже обыкновенный изоморфизм f, сложность заключается в том, что в общем случае, вне коммутативной диаграммы, эти отображения не являются изоморфизмами в обычном смысле. В связи с этим задача определения для них обратных становится нетривиальной. Теорема о реализации позволяет эту задачу решить. В [12, 13] и в первой части книги приводится и иллюстрируется примерами метод решения этой задачи. Как следует из теоремы о реализации (см. первую часть книги и [12, 13]), обратные g^{-1} и h^{-1} для отображений g и h единственны и применительно к ним в коммутативной диаграмме должны выполняться соотношения

$$e_x^{\text{right}}=f^{-1}f,\ \ e_y^{\text{left}}=ff^{-1},\ \ e_x^{\text{left}}=g^{-1}g,\ \ e_y^{\text{right}}=hh^{-1},\ \ f^{-1}=e_xf^{-1},\quad f^{-1}=f^{-1}e_y,$$

$$e_x= e_x^{\text{right}} = e_x^{\text{left}}= e_y^{\text{right}} = e_y^{\text{left}} = e_y=e,$$

$$h^{-1} = e_z\, h^{-1},\ h^{-1} = h^{-1}e_y,\ g^{-1} = g^{-1}e_z,\ g^{-1} = e_xg^{-1},$$

$$f^{-1} = g^{-1}h^{-1},\ e_z^{\text{left}} = g\,g^{-1},\ e_z^{\text{right}} = h^{-1}h,$$

$$e_z^{\text{left}} = g\,g^{-1},\ e_z^{\text{right}} = h^{-1}h,\ \ e_z^{\text{left}} = e_z^{\text{right}} = e_z,\ e_z^{\text{left}}e_z^{\text{right}} = e_z,\ e_z^{\text{right}}e_z^{\text{left}} = e_z,$$

$$(e_z)^{-1} = e_z,\ e_z\,e_z = e_z\,, \qquad (7.5)$$

где e_x^{right}, e_x^{left} – правая и левая единицы на X; e_y^{right}, e_y^{left} – правая и левая единицы на Y; e_z^{left}, e_z^{right} – левая и правая единицы на Z. В силу единственности отображения f^{-1} (так как по условию f – изоморфизм), отображения e_x и e_y также единственны и равны e, где e – обычное единичное отображение такое, что $e = ee = ee^{-1} = e^{-1}e = e^{-1}$. Отметим, что в общем случае e_z – некоторая единица на Z – не является обычным единичным отображением и не равна e. Обратные достаточно просто вычисляются по формулам

$$g^{-1} = f^{-1}h, \quad h^{-1} = g\,f^{-1},$$

которые прямо следуют из коммутативной диаграммы. Убедиться, что отображения g^{-1} и h^{-1} действительно являются обратными можно путем их подстановки в равенства (7.5). Таким образом, соотношения (7.5) являются, по сути, лишь проверочными и не обременяют процедуру определения обратных дополнительными вычислениями.

На основе леммы и теоремы о реализации в работе [12] были даны, а в первой части книги уточнены и систематизированы формализованные определения всех основных понятий алгебраической теории систем, опирающиеся на базовое определение понятия «система». *Формальная* (*абстрактная* или абстрактно-алгебраическая) *система* определена как композиция любого количества отображений (и соответствующих им объектов, алгебраических структур), реализующих какой-либо изоморфизм и образующих замкнутую коммутативную диаграмму, свойства которой, как целого, не сводятся к множеству изначальных свойств, включаемых в систему объектов-компонент и соответствующих им отображений, а сами эти объекты-компоненты и отображения приобретают в системе свойства, отсутствовавшие у них до включения в систему.

Это определение вытекает непосредственно из формулировки основной леммы. Иллюстрацией понятия «абстрактная система», по сути, и является коммутативная диаграмма, относящаяся к лемме и показанная на рис. 7.2. В этой диаграмме свойства отображений g и h, составляющих композицию $hg=f$, реализующую *изоморфизм-цель* системы f, не сводятся к свойствам этих отображений до включения их в систему: до включения в систему эти отображепния могут не иметь обратных, но в системе, в композиции и в соответствующей коммутативной диаграмме, реализующей изоморфизм $f=hg$, эти отображения обязательно

будут иметь соответствующие единственные обратные, то есть в системе возникает «системный эффект», часто обозначаемый термином «эмерджентность». Это, по сути, главный признак возникновения системы как некоего целого, состоящего из частей, свойства которого не сводятся к сумме свойств частей.

Другие определения, производные от определения понятия «система», здесь приводить не будем. Отметим лишь, что в рассматриваемой теории на основе базового определения понятия «система» формализованы понятия «модель» «простая система», «сложная система», «большая система».

Анализ понятий общей теории систем, теории динамических систем и кибернетики с учетом указанных новых формализованных «алгебраических» определений «систем» позволил в работе [12] сформулировать, а в первой части книги существенно скорректировать и дополнить *ряд важных следствий к основной лемме и теореме о реализации*. Смысл этих следствий достаточно ясен из приведенных ниже названий:

- С л е д с т в и е 1 (о «первосистемах»);

- С л е д с т в и е 2 (об измеримости систем);

- С л е д с т в и е 3 («постулат» причинности с точностью до изоморфизма);

- С л е д с т в и е 4 (о детерминированности «случайностей»);

- С л е д с т в и е 5 (о принципе относительности в теории систем);

- С л е д с т в и е 6 (о фундаментальных свойствах систем);

- С л е д с т в и е 7 (о принципе суперпозиции в теории систем);

- С л е д с т в и е 8 (о цели системы);

- С л е д с т в и е 9 (об общем принципе изоморфизма в сильной формулировке);

- С л е д с т в и е 10 (о предельных, финитных состояниях в системах);

- С л е д с т в и е 11 (об эмерджентности или системном эффекте).

Даже если судить по названиям, то видно, что следствия позволяют формально-математически на достаточно высоком уровне абстрагирования описать различные явления и эффекты, возникающие в системах безотносительно их природы, и, самое главное, раскрыть математические основы и причины возникновения этих «эффектов». Здесь не будем подробно характеризовать следствия, хотя каждое из них формализует и раскрывает весьма глубокие аспекты теории систем. Изучить их можно, обратившись к главе 3 первой части книги. Отметим лишь следствие 6 - о фундаментальных свойствах систем.

К фундаментальным свойствам систем в первой части книги отнесены контролируемость, наблюдаемость, управляемость, идентифицируемость, интегрируемость (комплексируемость) в «системы систем» - в интегрированные комплексы. В формально-теоретическом, методологическом плане каждое из таких свойств в первой части книги дополнительно анализируется в отдельной главе, а в прикладном – в отдельных главах второй части книги в отношении прежде всего динамических, а также информационных систем. Однако это не означает, что указанные свойства рассматриваются в рамках новой теории только в таком «узком смысле». Они, конечно, имеют общесистемное значение, проявляются в системах самой разной природы и именно в указанном «широком смысле» понимаются в рамках рассматриваемой научной парадигмы. Анализ их в приложении к динамическим и информационным системам нужно рассматривать лишь как пример.

В целом, можно констатировать, что к настоящему времени в достаточно большом числе отечественных и зарубежных публикаций все основные аспекты новой математической, алгебраической теории систем, основанной на общем принципе изоморфизма и опирающейся на основную (фундаментальную) лемму и теорему о реализации, уже с высокой степенью проработки изложены. Об этом можно судить по прилагаемой к этой главе библиографии – см., например, работы [8-13, 15-22, 27-31, 33-36, 50, 51, 55], а также первую часть настоящей книги. Продолжают развиваться приложения рассматриваемой теории к естественным и искусственым (целенаправленным) системам, обзор которых приведен ниже.

7.2. Приложения общего принципа изоморфизма к анализу и синтезу систем управления

Учитывая, что во второй части книги обобщены и достаточно подробно изложены как опубликованные, так и новые материалы прикладных исследований различных аспектов применения общего принципа изоморфизма к динамическим системам, здесь дадим лишь весьма краткий обзор результатов исследований, посвященных приложениям новой алгебраической теории к системам управления динамическими объектами, а также приведем ссылки на работы, в которых изложены соответствующие приложения новой научной парадигмы.

Алгебраические процедуры и теоретические основы формализации общих свойств динамических систем (наблюдаемость, контролируемость, управляемость и идентифицируемость систем с точностью до изоморфизма, двойственность управляемости и наблюдаемости) изложены в первой части книги и в работах [8, 9, 11, 12], а в части приложений обобщены во второй части книги и

опубликованы в работах [21-26, 38, 39, 52, 56] – применительно к изоморфным регуляторам, в работах [27-30] - применительно к изоморфным наблюдателям, в работах [10, 17-20, 37, 39, 43, 45, 47-49, 53] - применительно к моделированию, идентификации систем и калибровке датчиков, в работах [12, 15, 16, 31] - применительно к интеграции регулятора и наблюдателя, а также к теореме разделения для синтеза интегрированных информационно-управляющих систем.

Отметим, что новая теория, отталкиваясь от известных положений классической теории динамических систем и опираясь на них, позволила, тем не менее, совершенно по-новому определить понятия управляемости и наблюдаемости, идентифицируемости объектов и систем и др. В рамках алгебраической теории, основанной на общем принципе изоморфизма, все эти понятия определяются с точностью до изоморфизмов, на которых реализуются соответствующие системы. В первой части книги и в [12] показано, что известные понятия наблюдаемости и управляемости по Калману являются частными случаями наблюдаемости и управляемости с точностью до изоморфизма.

Далее, несмотря на то, что в рамках рассматриваемой новой парадигмы теоретические аспекты наблюдаемости, управляемости и других свойств динамических систем изложены на весьма высоком уровне математического абстрагирования, с использованием языка морфизмов, тем не менее, для «скалярных» (один вход – один выход) SISO-систем и «векторных» (многомерных, многосвязных, много входов – много выходов) MIMO-систем весьма общего вида, описываемых дифференциальными уравнениями и соответствующими уравнениями в операторной форме, получены очень простые по форме и в вычислительном отношении критерии наблюдаемости и управляемости.

Преимущество понятий управляемости и наблюдаемости с точностью до изоморфизма и соответствующих критериев в сравнении с известными понятиями и критериями заключается как в отмеченной простоте, так и в универсальности – их можно применять не только к линейным SISO и MIMO-системам, но и к любым нелинейным системам при условии, что модели этих систем можно формализовать некоторыми изоморфными отображениями, что на практике не очень сложно сделать, а часто можно избежать и этого. Например, как показано в работах [17-20, 37, 39, 43, 45, 47-49, 53] и во второй части книги применительно к задачам идентификации нелинейных систем и построения и калибровки интеллектуальных датчиков, модель идентифицируемой системы может быть неизвестна в принципе и может вообще не потребоваться – идентифицируется «обратная модель» в форме искусственной нейронной сети, так как в указанных задачах (например, в задаче калибровки датчиков) и в задачах построения изоморфных наблюдателей и регуляторов используется именно обратная модель.

Нейронная сеть при этом обучается на реальных эталонных («калибровочных») сигналах, составляющих обучающую выборку, то есть изоморфной должна быть не сама модель объекта, а изоморфным должно быть отображение эталонных входных сигналов объекта (например, датчика) в выходные сигналы нейронной сети. Причем такое изоморфное отображение может быть предельно простым, тривиальным по структуре, а именно, тождественным единичным отображением – единичной матрицей.

Таким образом, как в задаче идентификации объектов, так и в задачах оценки управляемости и наблюдаемости и, соответственно, синтеза регуляторов и наблюдателей можно работать не с изоморфизмами-моделями динамических объектов, а с изоморфизмами-целями, характеризующими собственно цели идентификации, управления и наблюдения. В качестве таких изоморфизмов можно, например, привести изоморфизм-цель, предусматривающий полное и точное слежение за заданным вектором состояния или изоморфизм-цель, предусматривающий полное и точное восстановление вектора состояния по данным косвенных измерений. При этом модели самих объектов могут быть вообще неизоморфными и заданы в весьма общем виде, например, в нелинейной форме. Кроме того, весьма полезным и эффективным оказалось комплексное использование в задачах идентификации нелинейных систем, калибровки датчиков и конструирования интеллектуальных датчиков двух инновационных технологий – технологии идентификации объекта на основе общего принципа изоморфизма и технологии аппроксимации обратной модели объекта на основе искусственной нейронной сети. Помимо вполне реализуемого применения «связки» этих технологий в задачах синтеза регуляторов и наблюдателей, на что обращалось внимание выше, напрашиваются достаточно «прозрачные аналогии» ее применения в других задачах теории систем.

Так развивая указанный подход на другие области приложений, в качестве гипотезы можно предположить, что подобным образом «работает» человеческий мозг, используя многомодальные сигналы органов чувств для идентификации объектов реальной действительности с помощью собственных обширных естественных нейронных сетей. При этом прогнозируемое поведение нейросетевой модели объекта сравнивается с поведением реального объекта, по результатам которого естественная нейросетевая модель дообучается (корректируется) в замкнутом контуре «отображение «восприятие» - отображение «стимул» до полного совпадения прогнозируемого с использованием модели поведения объекта с реальным поведением, то есть до достижения изоморфизма-цели. В этом случае изоморфизм-цель «точная и полная идентичность поведений модели и объекта» реализуется композицией отображений «восприятие»-«стимул», «общей

точкой сопряжения» или «общей структурой» для которых является «модель объекта». В рамках такой гипотезы потенциально может быть сгенерирована и верифицирована модель «естественного интеллекта» и, в целом, «модель сознания», но это область перспективных исследований.

Вообще, проводя дальнейшие параллели между рассматриваемой алгебраической теорией систем, опирающейся на общий принцип изоморфизма, общей теорией систем и кибернетикой, отметим поразительные возможности новой теории по формализации «системных закономерностей» и «законов», давно сформулированных основоположниками этих наук [70-74] и преломившихся в трудах их многочисленных последователей в самые разные интерпретации применительно к различным научным дисциплинам и областям человеческой деятельности (см., рапример, [75-81]).

Так «принцип обратной связи», являющийся одним из эвристически обоснованных «постулатов» кибернетики [77-78] и теории функциональноых систем организма в форме «принципа обратной афферентации» [81], является, как неоднократно указывалось в этой книге и в более ранних работах (см., например, [11, 12]), прямым следствием основной леммы и теоремы о реализации изоморфизма. При анализе проблемы управляемости систем и в прикладной задаче о регуляторе (см. главу 5 первой части и главы 1-3 второй части книги) формально-математически обосновывается необходимость обратной связи и определяется ее структура. Вообще, как оказалось, обратная связь есть не что иное, как изоморфизм-цель, на котором реализуется система, обеспечивающая полную управляемость объекта и идеальное регулирование его вектора состояния с точностью до указанного изоморфизма. Таким образом, рассматриваемая теория раскрывает причину, по которой природа «изобрела» обратную связь и ее структуру, как средство стабилизации динамических систем с заданной точностью и регулирования процессов в таких системах.

В качестве примера формализации системных закономерностей отметим также фундаментальный закон эквифинальности Л. фон Берталанфи. Эта закономерность характеризует некоторые предельные возможности системы, ее предельные состояния. Л. фон Берталанфи, предложивший этот термин, определил эквифинальность как «способность в отличие от состояния равновесия в закрытых системах, полностью детерминированных начальными условиями ... достигать не зависящего от времени состояния, которое не зависит от ее начальных условий и определяется исключительно параметрами системы» [73]. Нами формализация указанного закона на основе общего принципа изоморфизма продемонстрирована применительно к системам сжатия-восстановления информации (см. Утверждение 13.4 - Закон предельных состояний – в главе 13 первой части

книги) и применительно к регулированию многосвязных систем (главы 1-3 второй части книги).

На формализацию в рамках рассматриваемой теории «закона необходимого разнообразия» У.Р. Эшби мы неоднократно обращали внимание применимтельно к задаче о регуляторе (см. главу 5 первой части и главы 1-3 второй части книги). По У.Р. Эшби [78]: «только разнообразие может уничтожить разнообразие». Это утверждение можно интерпретировать так: для того чтобы «познать» некоторый объект природы или «управлять» им, «познающая система» или «управляющая система» должна иметь в своем составе такое множество познающих (управляющих) элементов, мощность которого не меньше мощности множества элементов в составе познаваемого (управляемого) объекта. В частности, нами показано, что «разнообразие» изоморфного регулятора, включающего в свой состав обратную модель объекта регулирования, тождественно «разнообразию» объекта. Совершенно аналогично в задаче идентификации систем вообще и датчиков, в частности, нами на основе общего принципа изоморфизма была построена с использованием искусственной нейронной сети обратная модель системы (датчика), идентичная в плане «разнообразия» самой системе (датчику). Проводя дальнейшую аналогию с живой природой в качестве гипотезы выскажем предположение, что природа неспроста снабдила человеческий мозг необъятно большим числом естественных нейронов: по оценкам ученых в мозгу насчитывается более 86 миллиардов нейронов, сообщающихся между собой посредством сотни триллионов синапсов [82]. Такое количестсво (читай «разнообразие») нейронов необходимо человеку для идентификации множества всевозможных объектов среды и связей между ними, с которыми он сталкивался в процессе своей эволюции и с которыми с большой вероятностью может столкнуться конкретный человек в процессе своей жизни. Другие устоявшиеся закономерности и «постулаты» общей теории систем («постулат причинности», «принцип относительности», «принцип эмерджентности», различные законы сохранения и др.) также, как показано нами в книге, поддаются естественной формально-математической интерпретации на языке рассматриваемой алгебраической теории систем, не опирающейся ни на какие эвристические предпосылки.

В целом сформированная на основе общего принципа изоморфизма алгебраическая теория систем и ее составная часть – теория управления динамическими системами, - первый обзор которой дан в работах [50, 51], по сути, *обобщает классическую теорию автоматического регулирования на системы весьма общего вида, позволяя работать с ними, как с линейными системами*. Это обеспечивается применением обобщенных в рамках теории, более широких

по трактовке принципов суперпозиции, модульности и вновь сформулированного принципа относительности в алгебре, изложенных в работе [12] и развитых в первой части книги.

Отдельного внимания заслуживает анализ применения алгебраической теории, основанной на общем принципе изоморфизма, к различным аспектам синтеза и функционирования информационных систем (сжатие-восстановление, кодирование-декодирование информации и др.). Начала и некоторые методологические положения соответствующей теории изложены в главе 13 первой части книги. Многие выводы этой главы относятся не только к информационным системам, но и, как мы уже указывали, могут быть интерпретированы в гораздо более широком, общесистемном контексте. Это, например, относится к Утверждениям 13.1 (о степени сжатия информации), 13.2 (закон сохранения информации), 13.3 (закон соответствия устойчивых состояний и отвечающих им инвариантных форм информации), 13.4 (закон предельных состояний), 13.5 (о признаках предельных состояний).

Для понимания сути этих утверждений читатель может обратиться к указанной главе, но даже их формулировки позволяют ассоциировать процессы в информационных системах с аналогичными процессами в эволюции Вселенной, в эволюции живых систем, с процессами и явлениями в квантовой физике и в других областях естествознания. Вообще создается впечатление, что Природа, однажды успешно использовав «механизм» порождения и эволюции систем, основанный на общем принципе изоморфизма, в дальнейшем применяет его многократно в отношении самых разных систем. Но это только гипотеза. Соответствующие интерпретации и исследования еще ждут своего часа и мысли в этих направлениях требуют отдельного обстоятельного анализа и изложения.

Вместе с тем даже поверхностный анализ дростижений и направлений развития естественных наук, в том числе наук о жизни, показывает, что эти достижения и новые факты, доставляемые в рамках современных исследований, а также существующие общепринятые теории и модели эволюции естественных систем, носящие пока во многом феноменологический, описательный характер, очень хорошо «ложатся» на основные положения алгебраической теории систем, опирающейся на общий принцип изоморфизма. В рамках рассматриваемой алгебраической теории с учетом указанных феноменологических моделей могут быть разработаны хорошо формализованные, математические «модели высокого уровня» для описания процессов возникновения и эволюции естественных систем, а также для описания различных наблюдающихся в них «системных эффектов» и явлений. В этом практически уже нет сомнений.

Дополнительным подтверждением этого является применение общего принципа изоморфизма и соответствующей алгебраической теории для формализованного описания процедур формирования или, как говорят, системного проектирования («системной инженерии», системотехники) искусственных систем, создаваемых человеком с целью удовлетворения каких-либо потребностей путем наделения создаваемых систем нужными человеку функциями на основе привлечения необходимых для этого ресурсов. В этом случае должен быть реализован какой-либо изоморфизм между требованиями к системе, образующими некоторый «гипершар-облик», внутри которого должны лежать все допустимые варианты «структур» создаваемой системы, то есть изоморфизм между прогнозируемым «обликом» системы и ее реальным «воплощением в железе».

Другим примером, также лежащим в области системотехники, является формализация на основе общего принципа изоморфизма процедур интеграции систем в более крупные образования – в «системы систем», называемые также «комплексными системами», «интегрированными системами (комплексами)» или просто «комплексами». Оказалось, что интеграция, как процесс объединения систем в «системы систем», то есть в интегрированные комплексы, хорошо поддается формально-математической интерпретации на основе основной леммы и теоремы о реализации изоморфизма композицией отображений – основных утверждений новой алгебраической теории систем. При этом наблюдаемые или прогнозируемые «парадоксы интеграции» и свойства интегрированных систем также хорошо формализованно описываются в рамках рассматриваемой теории. Соответствующие приложения алгебраической теории к системному проектированию рассмотрены в работах [12, 31-36, 54, 55, 67], а к интеграции информационно-управляющих систем – в работах [15,16]. При этом содержательная, описательно-феноменологическая основа телеоцентрического (целецентрического) подхода к системному проектированию человеко-машинных и «чисто технических» систем, в опоре на которую проведена алгебраическая формализация, изложена в работах [46, 52, 57-62, 66]. В работах [54, 55] приведена алгебраическая формализация процедур системного проектирования, основанных на так называемом *V*-процессе, рекомендованном международным нормативным документом (де-факто стандартом) ARP4754A, для использования при проектировании сложных, недетерминированных систем, прежде всего авиационных.

Указанный телеоцентрический подход, также предполагающий реализацию некоторого *V*-процесса, и подход к проектированию на основе *V*-процесса по ARP4754A изначально возникли из эвристических соображений. Казалось бы, эти «подходы», предложенные исходя из обобщения накопленного опыта проектирования сложных систем, являются чисто вербально-описательными, по сути,

«гуманитарными», «творческими» и не имеют никакого отношения к математике. Объективно же они, хотя и только содержательно, отражают необходимость обеспечения при создании сложной системы некоторого изоморфизма-цели между ее прогнозируемым обликом (совокупностью требований) и его физическим воплощением в форме некоторой реальной структуры системы, что, в свою очередь, позволит добиться предсказуемости поведения, то есть обеспечения максимально возможного детерминизма функционирования создаваемой системы. Причем этот изоморфизм-цель создания системы невозможно обеспечить напрямую, непосредственно, так как заранее неизвестно, какие ресурсы должны быть привлечены для выполнения требований и использованы при создании системы. Указанный изоморфизм можно лишь «реализовать», достичь опосредованно, в форме «композиции» («произведения») «отображений», то есть последовательного выполнения операции декомпозиции (факторизации) исходных требований для выявления требуемых классов привлекаемых ресурсов и их еще большей детализации до необходимого и понятного уровня локализации ресурсов и последующей операции интеграции локальных ресурсов, выбранных или созданных на основе локальных целей-требований, в общую материальную структуру системы.

В качестве элементарного примера выдвинем весьма общее требование X =«Разработать и изготовить деревянный стул с наклонной спинкой». Это требование формализуем с помощью цели-изоморфизма f=«По требованию X создать стул Y». Непосредственное «изготовление» Y по X невозможно (см. рис. 7.2). Цель f может быть реализована только опосредованно, с помощью композиции отображений $f=hg$: в начале с помощью процедуры (отображения) $g{:}X\rightarrow Z$ необходимо разработать по крайней мере три чертежа, характеризующих ортогональные проекции-«архитектуры» стула на соответствующие плоскости и объединенных в «структуру» Z стула, то есть детализировать и согласовать требования-архитектуры, а затем с помощью процедуры (отображения) $h{:}Z\rightarrow Y$ по чертежам-«архитектурам» изготовить необходимые детали из дерева и по общей «структуре» собрать стул в целом, который, в соответствии с отображением f^{-1}=«Создан стул Y по требованию X», будет точно и полно, то есть взаимно-однозначно отвечать заявленным требованиям.

Таким образом, сама жизнь заставляет применять при создании искусственных систем тот или иной «V-процесс» проектирования для «реализации» соответствующего изоморфизма-цели, предусматривающего обеспечение взаимно-однозначного соответствия между требованиями к системе (прогнозируемым «обликом») и их физическим воплощением, то есть собственно созданной систе-

мой. Причем в рамках телеоцентрического подхода и подхода, рекомендованного стандартом ARP4754A, соответствующие процессы были предложены независимо, то есть *V*-процесс является объективно необходимым. Более подробно формально-математическипе основы системного проектирования на основе общего принципа изоморфизма будут рассмотрены в следующем разделе этой части книги.

В целом в данной главе представлен краткий обзор развития и состояния основных положений новой алгебраической теории систем и ее составной части - математической теории анализа и синтеза систем управления, - разработанной на основе простой аксиоматики, опирающейся на единый и единственный принцип, обоснованный с точки зрения практики, – общий принцип изоморфизма. Практическая реализуемость и значимость теории проиллюстрирована примерами ее приложений к решению как типовых задач идентификации, анализа и синтеза регуляторов, наблюдателей и информационно-управляющих систем в целом для динамических объектов, так и задач системного проектировании сложных систем и комплексов различного назначения. Демонстрация эффективности разработанных на основе теории прикладных методов синтеза произведена в сравнении с известными и традиционно используемыми методами.

Литература к Главе 7 Раздела 1 Части 2:

1. *Калман Р.Е.* Идентификация систем с шумами // УМН. 1985. Т. 40. Вып.4 (244). С. 27-41.
2. *Калман Р., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971.
3. *Sain M.K.* The Growing Algebraic Presence in Systems Engineering: An Introduction // Proceedings IEEE, Volume 64, Number 1, January 1976.
4. *Месарович М., Такахара Я.* Общая теория систем: математические основы. – М.: Мир, 1978.
5. *Уонэм М.* Линейные многомерные системы управления. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980.
6. *Буков В.Н., Кулабухов В.С., Максименко И.М., Рябченко В.Н.* Проблема единственности решения задач теории систем // АиТ. 1997. №12. С. 4-17. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=13269728
7. *Буков В.Н., Кулабухов В.С., Максименко И.М., Рябченко В.Н.* Вложение систем // АиТ. 1999. №8. С. 61-73.
8. *Кулабухов В.С.* Алгебраические аспекты некоторых свойств сложных систем // В сборнике научно-методических материалов: Управление техническим состоянием авиационного оборудования. М.: Изд. ВВИА им. Н.Е.Жуковского, 1998. С. 107-118.
9. *Кулабухов В.С.* Принцип изоморфности в теории систем // Международная конференция по проблемам управления (29 июня-2июля 1999г.). Тезисы докладов в 3-х томах. Том 1. ИПУ РАН. Москва. 1999г.
10. *Кулабухов В.С.* Теория реализации и ее приложения к моделированию систем // Моделирование авиационных систем. Матер. Всероссийской научно-практической конф. М.: Изд. ГНЦ РФ ФГУП ГосНИИАС, 2013. С. 13-14. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=21000658
11. *Кулабухов В.С.* Принцип изоморфности в задаче реализации и его приложения к анализу свойств систем управления // XII Всероссийск. совещ. по проблемам управления ВСПУ-2014. Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2014. С. 438-448. URL: http://vspu2014.ipu.ru/prcdngs
12. *Кулабухов В.С.* Общий принцип изоморфизма в теории систем // Cloud of Science. 2018. Т.5. №3. С. 400-472. URL: https://cloudofscience.ru/sites/default/files/pdf/CoS_5_400.pdf
13. *Vladimir S. Kulabukhov* A General Principle of Isomorphism: Determining Inverses // Symmetry 2019, 11 (№10), 1301; doi: 10.3390/sym11101301. URL: https://www.mdpi.com/2073-8994/11/10/1301
14. *Кострикин А.И.* Введение в алгебру. Основы алгебры. М.: Физматлит, 1994.

15. *Кулабухов В.С.* Общий принцип изоморфизма: интеграция регулятора и наблюдателя в следящей системе // Материалы XVI Всероссийской научно-технической конференции «Научные чтения по авиации, посвященные памяти Н.Е. Жуковского» [текст]. Сборник докладов. М.: Издательский дом Академии им. Н.Е. Жуковского, 2019. С. 321-329.
16. *Kulabukhov V.* A General Principle of Isomorphism: Integration of Regulator and Observer in the Control System // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 714 (2020) 012013. doi:10.1088/1757-899X/714/1/012013 URL: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/714/1/012013
17. *Кулабухов В.С.* Общий принцип изоморфизма и калибровка датчиков на его основе / Материалы V научно-практической конференции памяти О.В. Успенского [Текст]. Сборник докладов. М.: Издательский дом Академии имени Н.Е. Жуковского, 2018. С.98-105.
18. *Кулабухов В.С., Цацин А.А., Заец В.Ф. и др.* Патент RU 2 714 612 C1 Способ идентификации нелинейных систем. Опубликован 18.02.2020, бюллетень №5. Патентообладатель: АО МНПК «Авионика».
19. *Кулабухов В.С., Цацин А.А., Заец В.Ф. и др*. Патент RU 2 714 039 C1 Система для разработки интеллектуального датчика. Опубликован 11.02.2020, бюллетень №5. Патентообладатель: АО МНПК «Авионика».
20. *Кулабухов В.С.* Общий принцип изоморфизма: идентификация моделей и калибровка датчиков // Материалы XIII Всероссийского совещания по проблемам управления ВСПУ-2019. Москва, 17-20 июня 2019 г. URL: https://vspu2019.ipu.ru/files/vspu/%D0%94%D0%BE%D0%BA%D0%BB%D0%B0%D0%B4%D1%8B%20%D0%92%D0%A1%D0%9F%D0%A3-2019/19%20%D0%A3-765/%D0%9A%D1%83%D0%BB%D0%B0%D0%B1%D1%83%D1%85%D0%BE%D0%B2%D0%92%D0%A1.pdf
21. *Кулабухов В.С.* Синтез регуляторов для следящих систем на основе принципа изоморфности // Мехатроника, автоматизация, управление. 2017. Том 18, №8. С. 507-515. https://elibrary.ru/item.asp?id=29810192
22. *Kulabukhov V.* Linear Isomorphic Regulators // CMTAI2016. MATEC Web of Conf. 2017. T. 99. C. 03008. DOI: 10.1051/matecconf/20179903008 URL: https://www.matec-conferences.org/articles/matecconf/pdf/2017/13/matec-conf_cmtai2017_03008.pdf
23. *Булгаков В.В., Кулабухов В.С.* Сравнительный анализ формализованных методов синтеза регулятора для следящей системы // Приборы. 2013. № 1 (151). С. 39-44.

24. *Кулабухов В.С., Булгаков В.В.* Сравнительный анализ некоторых формализованных методов синтеза регулятора в вертикальном канале вертолета / Материалы IV научно-практической конференции памяти О.В. Успенского [Текст]. Сборник докладов. М.: Издательский дом Академии имени Н.Е. Жуковского, 2017. С.45-53.
25. *Кулабухов В.С., Булгаков В.В.* Сравнительные исследования некоторых алгебраических методов формализованного синтеза регуляторов для следящих систем // Приборы. 2017. №12 (210). С. 13-18.
26. *Кулабухов В.С., Булгаков В.В., Сайганов М.А.* Синтез регулятора для газового привода на основе анализа экспериментальных данных // Приборы. 2020. № 5 (239). С. 32-44.
27. *Кулабухов В.С.* Синтез изоморфных наблюдателей состояния систем // Материалы IV научно-практической конференции памяти О.В. Успенского [текст] / Сборник докладов. М.: Издательский дом Академии им. Н.Е. Жуковского, 2017. С. 28-36.
28. *Кулабухов В.С.* Изоморфные наблюдатели состояния и робастная фильтрация сигналов систем // Радиотехника. 2017. №8. С. 50-55.
29. *Kulabukhov V.S.* Isomorphic observers of the linear systems state // Workshop on Materials and Engineering in Aeronautics (MEA2017) 15–16 November 2017, Moscow, Russian Federation. doi:10.1088/1757-899X/312/1/012016. p. 012016. URL: http://iopscience.iop.org/issue/1757-899X/312/1
30. *Кулабухов В.С.* Синтез линейных изоморфных наблюдателей // Материалы XIV Всероссийской научно-технической конференции «Научные чтения по авиации, посвященные памяти Н.Е. Жуковского» [текст]. Сборник докладов. М.: Издательский дом Академии им. Н.Е. Жуковского, 2017. №5. С. 271-279.
31. *Кулабухов В.С.* Алгебраическая формализация процедур анализа и синтеза сложных интегрированных систем // 6-я Международная конференция “Авиация и космонавтика – 2007”. 1-4 октября 2007г. Москва. Тезисы докладов. М.: Изд-во МАИ, 2007.
32. *Буков В.Н., Кулабухов В.С., Косьянчук В.В., Рябченко В.Н., Горюнов С.В., Наумов А.И.* Основы интеграции систем авиационного оборудования. Учебное пособие. М.: Изд. ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского, 2007. 338с.
33. *Кулабухов В.С.* Некоторые результаты теории интеграции бортового оборудования аэрокосмических эргатических систем // Третий Международный аэрокосмический конгресс. IAC’-2000: Сборник тезисов, Москва, 23-27 августа 2000г. М: Международный фонд попечителей Московского государственного авиационного технологического университета им. К.Э. Циолковского; ООО «Научно-техническая компания «Аффинор»; Издательство СИП РИА, 2000. – 360 с.

34. *Кулабухов В.С.* Некоторые результаты алгебраической теории телеоцентрического системного проектирования аэрокосмических эргатических комплексов // Тезисы докладов 6-й международной конференции “Системный анализ и управление аэрокосмическими комплексами”, Евпатория, 02.07-08.07.2001г.
35. *Кулабухов В.С.* Алгебраическая формализация телеоцентрического подхода к системному проектированию // Материалы XV Всероссийской научно-технической конференции «Научные чтения по авиации, посвященные памяти Н.Е. Жуковского» [текст]. Сборник докладов. М.: Издательский дом Академии им. Н.Е. Жуковского, 2018. №6. С. 279-287.
36. *Kulabukhov V.* Algebraic Formalization of System Design Based on a Purposeful Approach // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 476 (2019) 012017. doi:10.1088/1757-899X/476/1/012017
URL: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/476/1/012017/pdf
37. *Кулабухов В.С., Новиков В.А., Ахмедова С.К., Туктарев Н.А.* Калибровка интеллектуальных датчиков с применением искусственных нейронных сетей // В книге: Навигация, наведение и управление летательными аппаратами. Тезисы докладов. 2019. С. 195-197.
38. *Кулабухов В.С., Кулифеев Ю.Б., Булгаков В.В.* Синтез изоморфного регулятора для позиционного привода с вентильным двигателем с использованием датчика углового положения ротора // Материалы VII научно-практической конференции памяти О.В. Успенского [Текст] / Сборник докладов. М.: Издательский дом Академии имени Н.Е. Жуковского, 2021, С. 68-82.
39. *Кулабухов В.С., Кулифеев Ю.Б., Булгаков В.В.* Синтез изоморфного регулятора для управления скоростью вращения вентильного двигателя // Материалы VII научно-практической конференции памяти О.В. Успенско-го [Текст] / Сборник докладов. М.: Издательский дом Академии имени Н.Е. Жуковского, 2021, С. 83-96.
40. *Bukov V.N., Kulabukhov V.S., Maksimenko I.M., Ryabchenko V.N.* Uniqueness of solutions of problems of the theory of systems // Automation and Remote Control. 1997. Т. 58. № 12 Part 1. С. 1875-1885.
41. *Bukov V.N., Kulabukhov V.S., Maksimenko I.M., Ryabchenko V.N.* Uniqueness of solutions of the problems of the theory of systems // Автоматика и телемеханика. 1997. № 12. С. 3.
42. *Bukov V.N., Kulabukhov V.S., Maksimenko I.M., Ryabchenko V.N.* Embedding of systems // Automation and Remote Control. 1999. Т. 60. С. 1106.
43. *Кулабухов В.С., Булгаков В.В., Новиков В.А.* Вариант технологии обучения и калибровки интеллектуальных инерциальных датчиков // Авиакосмическое приборостроение. 2020. №10. С. 11-25.

44. *Буков В.Н., Кулабухов В.С., Максименко И.М., Рябченко В.Н.* Проблема и критерии единственности отображения вход-выход в задачах и методах теории систем // Отчет о НИР № 97-01-00014 (Российский фонд фундаментальных исследований) URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=230424
45. *Кулабухов В.С., Перепелицин А.В., Новиков В.А.* Постановка экспериментов на трехосном стенде для отработки методики калибровки инерциальных датчиков // В сборнике: V научно-практическая конференция памяти О.В. Успенского. Сборник докладов. 2018. С. 127-137.
46. *Кулабухов В.С.* Телеоцентрическое проектирование интеллектуальных систем управления летательных аппаратов // В книге: Навигация, наведение и управление летательными аппаратами. Тезисы докладов. 2019. С. 331-332.
47. *Новиков В.А., Булгаков В.В., Кулабухов В.С.* Использование искусственной нейронной сети для решения задач аппроксимации // В сборнике: Материалы VI научно-практической конференции памяти О.В. Успенского. Сборник докладов. 2019. С. 32-41.
48. *Булгаков В.В., Кулабухов В.С.* Использование нейронной сети для решения задачи восстановления зависимости // В сборнике: Материалы VI научно-практической конференции памяти О.В. Успенского. Сборник докладов. 2019. С. 24-31.
49. *Кулабухов В.С., Цацин А.А., Заец В.Ф., Туктарев Н.А., Ахмедова С.К., Булгаков В.В.* Способ калибровки интеллектуальных датчиков // Патент на изобретение 2730367 C1, 21.08.2020. Заявка № 2019117879 от 10.06.2019.
50. *Кулабухов В.С.* Математическая теория анализа и синтеза систем управления на основе общего принципа изоморфизма // В сборнике: Математическая теория управления и ее приложения (МТУиП-2020). материалы конференции. Государственный научный центр Российской Федерации АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор». Санкт-Петербург, 2020. С. 206-210.
51. *Kulabukhov V.S.* Mathematical theory of analysis and synthesis of control systems based on the general principle of isomorphism // Journal of Physics: Conference Series. Volume 1864.13th Multiconference on Control Problems (MCCP 2020). 2021. p. 012056. doi:10.1088/1742-6596/1864/1/012056
52. *Кулабухов В.С.* Технологии системной интеграции комплексных систем управления полетом перспективных летательных аппаратов // Авиационные системы в XXI веке. Юбилейная Всероссийская научно-техн. конф. сб. тезисов докладов. (Москва, 26–27 мая 2016 г.) М. : ФГУП «ГосНИИАС», 2016.
53. *Новиков В.А., Булгаков В.В., Кулабухов В.С.* Исследование применения нейронных сетей для аппроксимации кодов АЦП датчиков при калибровке // В сборнике: Материалы VII научно-практической конференции памяти О.В. Успенского. Сборник докладов. Москва, 2021. С. 220-229.

54. *Kulabukhov V.* Mathematical foundation of system design regulatory controls based on ARP4754A // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 1027 (2021) 012015. Workshop on Materials and Engineering in Aeronautics (MEA 2020). p. 012015. doi:10.1088/1757-899X/1027/1/012015
55. *Кулабухов В.С.* Математическое обоснование современных эвристических подходов к проектированию сложных систем // Cloud of Science. 2020. Т. 7. № 4. С. 801-814.
56. *Булгаков В.В., Кулабухов В.С.* Анализ формализованных методов синтеза регулятора для следящей системы // Научные чтения по авиации, посвященные памяти Н.Е. Жуковского. 2013. № 1. С. 135-139.
57. *Кулабухов В.С.* Федеративно-интегрированная распределенная модульная авионика // Авиакосмическое приборостроение. 2015. №12. С. 11-31.
58. *Кулабухов В.С.* Принципы оптимизации взаимодействий экипажа с системами интеллектуальной поддержки в телеоцентрических эргатических системах управления полётом. // Авиакосмическое приборостроение. 2008. - №5. – С. 24-39.
59. *Кулабухов В.С.* Инновационные технологии разработки комплексных систем дистанционного управления для перспективных вертолетов // Материалы Девятой Всероссийской научно-практической конференция «Перспективные системы и задачи управления». 2014. С.227-237.
60. *Александров В.В., Кулабухов В.С., Кулешов С.В., Федунов Б.Е., Чунтул А.В.* Эргономика в системе проектирования и испытаний вертолетов и тренажеров «Ми»: Том 3. Технологии интеллектуальной поддержки экипажей вертолётов / Под ред. Федунова Б.Е., Чунтула А.В. М.: Когито-Центр, 2015. 167 с.
61. *Кулабухов В.С.* Функциональный статус и функциональное состояние человека-оператора в телеоцентрической эргатической системе // Человеческий фактор в авиации и космонавтике: Сборник научных трудов / Под ред. А.А. Меденкова. М: Полет. 2007.
62. *Воробьев А.В., Кулабухов В.С.* Принципы телеоцентрического системного проектирования интеллектуальных систем управления летательных аппаратов // Материалы III Всероссийской научно-практической конференции «Перспективные системы и задачи управления». Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ. 2008. С. 267.
63. *Мальцев А.И.* Алгебраические системы. М.: Наука, 1970. 392 с.
64. *Артамонов В.А.* Введение в высшую алгебру и аналитическую геометрию. М.: Факториал Пресс, 2007. 128 с.
65. *Курош А.Г.* Общая алгебра. М.: Наука, 1974.

66. *Кулабухов В.С.* Функционально-структурный подход к формированию облика и архитектур базовых эргатических интегрированных бортовых комплексов ЛА // Тез. докл. Научных чтений, посвященных творческому наследию Н.Е. Жуковского (к 150-летию со дня рождения). М., 1997.
67. *Кулабухов В.С.* Вариант формализации системного анализа и синтеза структур авионики и систем управления полетом // Тезисы докладов 9 Международного Аэрокосмического Конгресса IAC'18. Москва, 28–31 августа 2018 г. М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, 2018. С. 12860
68. *Буков В.Н.* Вложение систем. Аналитический подход к анализу и синтезу матричных систем. Калуга: Изд-во научн. литературы Н.Ф. Бочкаревой, 2006. 720с.
69. *Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Рябченко В.Н.* Матричные методы в теории и практике систем автоматического управления летательных аппаратов. М.: Изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016.
70. *Богданов А.А.* Тектология: Всеобщая организационная наука. М.: «Финансы», 2003, 287 с.
71. *Ludwig von Bertalanffy* The Theory of Open Systems in Physics and Biology// Science 13 January 1950 111: 23-29 [DOI: 10.1126/science.111.2872.23] (in Articles).
72. *Берталанфи Л. фон* Общая теория систем: основы, развитие, приложения. Нью-Йорк: Джордж Бразиллер. 1968. (von Bertalanffy, Ludwig. 1968. General System Theory: Foundations, Development, Applications New York: George Braziller)
73. *Берталанфи Л. фон* Общая теория систем — критический обзор. В кн.: Исследования по общей теории систем. Сборник переводов. М.: «Прогресс», 1969.
74. *Берталанфи Л. фон* Общая теория систем — обзор проблем и результатов. // Системные исследования. Ежегодник. М.: «Наука», 1969. 203с.
75. *Рапопорт А.* Принцип математического изоморфизма в общей теории систем // Системные исследования. Ежегодник. М.: «Наука», 1973. С.158-172.
76. *Уемов А.И.* Методы построения и развития общей теории систем // Системные исследования. Ежегодник. М.: «Наука», 1973. С.147-157.
77. *Норберт Винер* Кибернетика или управление и связь в животном и машине. Второе издание. М.: Советское радио, 1968. 328 с.
78. *Эшби У.Р.* Введение в кибернетику. М.: Иностранная литература, 1959. (Ashby W. R. Introduction to Cybernetics. — Chapman & Hall, 1956.)
79. *Урманцев Ю.А.* Общая теория систем: состояние, приложения и переспективы развития // Система, симметрия, гармония. М.: Мысль, 1988.

80. Урманцев Ю.А. Общая теория систем в доступном изложении. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2014. 408 с.
81. *Анохин П.К.* Узловые вопросы теории функциональных систем. М.: «Наука», 1980. С. 154.
82. URL:https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D0%BE%D0%BB%D0%BE%D0%B2%D0%BD%D0%BE%D0%B9_%D0%BC%D0%BE%D0%B7%D0%B3_%D1%87%D0%B5%D0%BB%D0%BE%D0%B2%D0%B5%D0%BA%D0%B0

Раздел 2

Системное проектирование на основе общего принципа изоморфизма

В первом разделе второй части книги были рассмотрены технологии применения фундаментальных положений новой формально-математической парадигмы в общей теории систем при решении прикладных задач целенаправленного управления динамическими системами. Было показано, что привлечение мощного теоретического алгебраического инструментария, опирающегося на общий принцип изоморфизма, даже при решении традиционных, по сути уже классических задач теории систем позволяет получить новые, нетривиальные, практически значимые результаты.

В первом разделе и ранее в работах [1-4] и в ряде других работ алгебраическая формализация применялась в основном к решению хорошо формализуемых задач наблюдения, регулирования, контроля, идентификации динамических систем. В отличие от них, задачи системного проектирования относятся к трудно формализуемым и, как правило, решаются с использованием «творческих», основанных на искусстве проектировщика, эвристических подходов, которые можно охарактеризовать лишь на содержательном (описательном) уровне.

Таких подходов наработано достаточно много и сам факт их существования говорит о стремлении так или иначе регламентировать деятельность проектировщиков, максимально ее формализовать с учетом обобщения накопленного опыта. Это делается как в интересах сокращения времени разработок и затрат на них, так и, прежде всего, в интересах повышения эффективности разрабатываемых сложных систем, как комплексного показателя их качества и совершенства.

В связи с этим среди эвристических подходов имеются такие, которые предусматривают достаточно строгую формализацию процедур и правил проектирования, учета ограничений и принципов проектирования, а также, в целом, формализацию деятельности проектировщика в процессе создания новой системы. Таким образом, стремление к формализации проектирования является объективным и актуальным.

Во втором разделе второй части книги рассматривается прикладная технология алгебраической формализации современных эвристических подходов к системному проектированию и вообще к системному анализу и синтезу, как методу

решения сложных слабо структурируемых проблем. Как нам представляется, формально-математическая интерпретация процесса проектирования сложной системы (решения сложной проблемы) на языке современной алгебраической теории, опирающейся на общий принцип изоморфизма, позволит выявить объективные фундаментальные закономерности, опираясь на которые, во-первых, можно будет более строго обосновать целесообразность и преимущества применения тех или иных эвристических подходов и, во-вторых, поставить эти подходы на прочную научно-теоретическую основу. Практические аспекты системного анализа и системного проектирования (синтеза) сложных систем будут рассматриваться на примере систем авионики.

Глава 1

Системное проектирование как процесс деятельности по созданию искусственных целенаправленных систем. Способы интеграции систем

Все системы, создаваемые человеком, являются искусственными целенаправленными, предназначенными для удовлетворения определенных потребностей и/или реализации необходимых функций. Разнообразие создаваемых систем весьма велико и здесь классифицировать их не будем. Отметим лишь, что с этим связано большое число терминов и понятий, которыми характеризуют процессы создания систем (объектов) в различных областях человеческой деятельности. Ограничимся рассмотрением только технических и человеко-машинных (эргатических или «систем человек-машина» - СЧМ) динамических систем и соответствующих понятий, относящихся к процессам их создания («проектирования»). Другие системы и проблемы системного анализа-синтеза могут быть рассмотрены на основе аналогий.

Одним из базовых понятий, относящихся к созданию искусственных технических и человеко-машинных систем, является понятие «*инженерное дело* (*инжиниринг*)». В [5] оно определяется так: «*Инжене́рное де́ло, инжене́рия* (от фр. ingénierie, производное от лат. ingenium - «искусность» и лат. ingeniare — «изловчиться, разработать» - «искусный» [6]), а также инжене́рная де́ятельность, инжене́рно-техни́ческая де́ятельность, инжене́рное иску́сство - *область технической деятельности, включающая в себя целый ряд специализированных областей и дисциплин, направленная на практическое приложение и применение научных, экономических, социальных и практических знаний с целью обращения природных ресурсов на пользу человека*… Инженерное дело тесно переплетается с наукой, опираясь на постулаты фундаментальной науки и результаты прикладных исследований. В этом смысле оно является отраслью научно-технической деятельности». В широком смысле «инженерное дело (инжиниринг)» - область человеческой интеллектуальной деятельности, дисциплина, профессия, задачей которой является применение достижений науки, техники, использование законов и природных ресурсов для решения конкретных проблем, целей и задач человечества. В узком смысле целями инженерной деятельности являются изобретение, разработка, создание, внедрение, ремонт, обслуживание и/или улучшение техники, материалов или процессов. В отечественной литературе советских времён близким к понятию «инженерия», «инжиниринг» в узком смысле было по-

нятие «*схемотехнического проектирования*», которое, в отличие от «*системотехнического проектирования*» или «внешнего проектирования» [7], подразумевало детальную проработку конструкции узлов устройства и системы в целом, электрических схем, схем соединений узлов и т.д.

Как следует из определения, понятие «инжене́рное де́ло, инжене́рия» очень широкое и относится не только к созданию новых систем (объектов). Кроме того, в определении не упоминается необходимость применения «системного подхода», «системных аспектов» в инженерии. В настоящее время близким к понятию инженерной деятельности в широком смысле, инжинирингу в смысле создания и улучшения техники и более близким к целям нашего исследования является понятие «*системной инженерии*».

Системноинженерное мышление - это использование системного подхода в инженерии. Самое *современное определение системной инженерии* дано в «Руководстве по основам знаний в области системной инженерии» («Guide to the Systems Engineering Body of Knowledge» [8]). Определение системной инженерии развивалось с течением времени. Ниже приводятся принятые в настоящее время определения [9]:

«(1) *Междисциплинарный подход, регулирующий общие технические и управленческие усилия, необходимые для преобразования набора потребностей, ожиданий и ограничений клиента в решение и поддержки этого решения на протяжении всего срока его службы* (ISO/IEC/IEEE 2010).

(2) *Междисциплинарный подход и средства, позволяющие реализовать успешные системы*. Он фокусируется на определении потребностей клиентов и требуемой функциональности на ранних этапах цикла разработки, документировании требований, а затем при переходе к синтезу дизайна и проверке системы при рассмотрении полной проблемы».

Обратим внимание, что по-английски «системная инженерия» - systems engineering, хотя более ранним написанием было system engineering. Правильная интерпретация (и правильный перевод) именно «системная» (подразумевающая использование системного подхода) инженерия, а не «инженерия систем» (engineering of systems), когда любой «объект» называют «системой», но не используют системный подход во всей его полноте. В рамках нашей теории, как указывалось в первой части книги, понятие «объект» рассматривается в качестве синонима понятия «система». Исходя высказанного выше замечания, далее будем учитывать необходимость разработки любой «системы» («объекта») с использованием системного же (всестороннего) подхода.

Применительно к процессам создания искусственных систем в качестве синонима к термину «системная инженерия» в отечественной литературе часто используют термин «системное проектирование» [10]. Как и системная инженерия, «*системное проектирование*» *комплексно* (*именно системно*) *решает поставленные задачи разработки технического объекта, принимает во внимание взаимодействие и взаимосвязь отдельных объектов-систем и их частей как между собой, так и с внешней средой*, учитывает социально-экономические и экологические последствия их функционирования. В отечественной литературе советских времён вместо термина и понятия «системное проектирование» часто использовалось понятие «*системотехническое проектирование*» или «внешнее проектирование» [7], которое противопоставлялось упомянутому выше понятию «схемотехническое проектирование».

Применительно к созданию систем часто применялось понятие «*системная интеграция*». Семантика этого понятия прошла определенную эволюцию: сначала так называли интеграцию (объединение) аппаратных и программных средств в технике, затем - объединение нескольких систем, сформированных в ходе «лоскутной автоматизации», на единой интеграционной платформе, и, наконец, сформировалось новое понимание этого термина. В настоящее время понятие «системная интеграция» относится к области оптимизации и автоматизации функционирования организационных и организационно-технических систем, в частности предприятий, на основе применения автоматизированных систем управления (АСУ). *Под* «*системной интеграцией*» *теперь понимают разработку комплексных решений по автоматизации технологических и бизнес-процессов предприятия* [11]. Её конечная цель - максимально эффективное управление технологическим процессом, производством, организацией в целом. Таким образом, понятие «системная интеграция» к настоящему времени узурпировано специалистами IT-отрасли (отрасли разработки и внедрения информационных технологий) применительно к автоматизации функционирования (автоматизации так называемых «бизнес-процессов») различных предприятий и организаций самого разного профиля.

Таким образом, наиболее близким к целям нашего исследования прикладных аспектов развиваемой теории, является понятие «*системное проектирование*», *которым в дальнейшем и будем оперировать*. Рассмотрим подробнее содержательный смысл этого понятия.

Системное проектирование основывается на тщательном совместном рассмотрении объекта проектирования и процесса проектирования [10], которые в свою очередь включают ещё ряд важных компонентов и процессов (см. рис. 1.1).

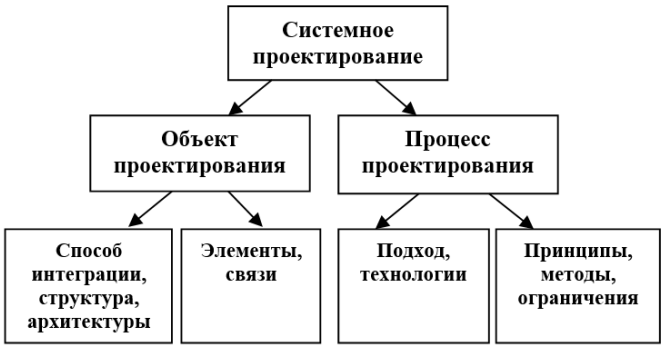


Рис.1.1. Содержание системного проектирования

Составные элементы, связи объединяются в *объект проектирования* (интегрированную (комплексную) систему), то есть в систему в целом, теми или иными *способами*. *Процесс проектирования* основывается на определённых формализованных или эвристических подходах (технологиях), при применении которых должны учитываться наработанные наукой и практикой принципы и методы проектирования, а также ограничения, обусловленные доступностью тех или иных ресурсов, из которых предполагается строить систему, и ограничения, обусловленные необходимостью применения тех или иных правил проектирования, стандартов, нормативов, предписанных соответствующей нормативной документацией. В целом, *проектирование является целенаправленной деятельностью, включающей последовательность процедур, ведущих к формированию эффективных проектных решений*. Такая деятельность как раз и обобщается понятием «*подход к проектированию*».

Применительно к объекту проектирования некоторые возможные способы объединения (интеграции) частей объекта (подсистем) в целое – в интегрированную систему-комплекс [12] - представлены на рис. 1.2.

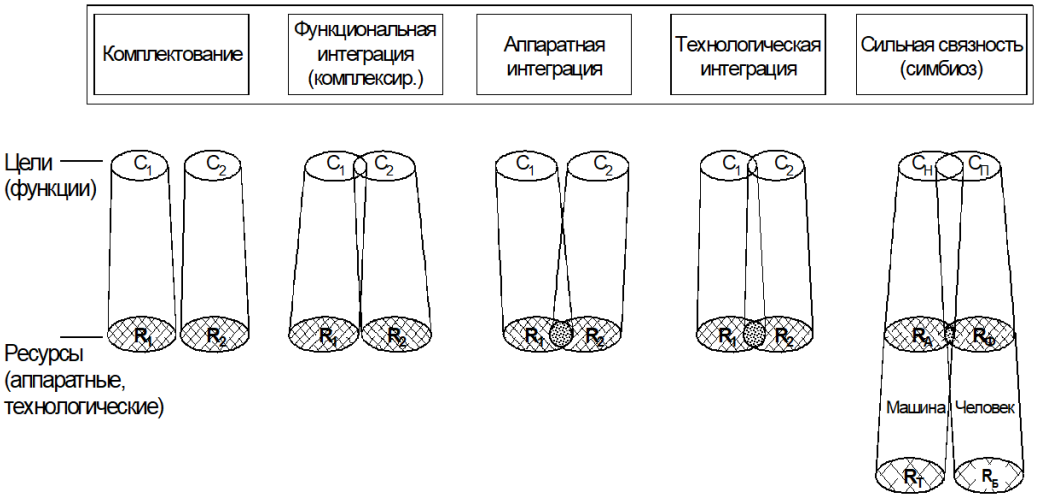


Рис. 1.2. Типовые способы объединения (интеграции) систем

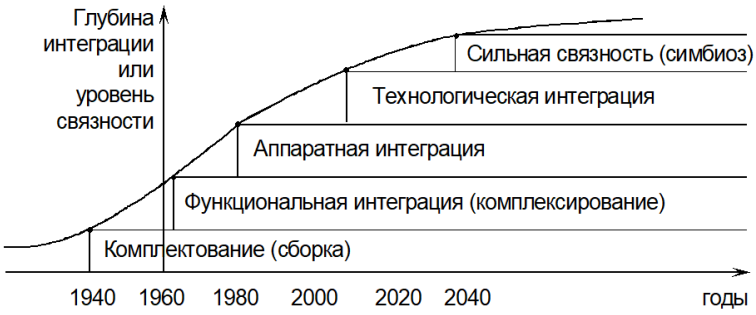


Рис. 1.3. Эволюция способов интеграции систем

Обсуждаемые нами способы интеграции объектов (систем) и соответствующие создаваемые интегрированные объекты (системы, комплексы) размещены на рис. 1.2 по возрастанию уровня связности (глубины интеграции) их элементов с учетом последовательной реализации этих способов и эволюции во времени. Качественный характер эволюции способов интеграции систем может быть отражен в форме логистической S-кривой, характерной для эволюции вообще, представленной на рис. 1.3.

Наиболее простым способом объединения (интеграции) элементов в систему (комплекс) является *комплектование*. В этом случае система есть прямая сумма подсистем, то есть

$$C_1 \oplus C_2 = C, \quad R_1 \oplus R_2 = R, \quad C_1 \bigcap C_2 = \varnothing, \quad R_1 \bigcap R_2 = \varnothing. \tag{1.1}$$

Как видно из (1.1), при комплектовании общие ресурсы в системе не появляются, цели (функции) C и ресурсы R объединяемых подсистем-элементов не пересекаются, но, тем не менее, интегрированный объект, как система, обладает новыми качествами, отсутствовавшими у всех элементов до их объединения в систему. Например, у «комплекта инструментов», как системы, появляется новое качество - «удобство пользования» при выполнении тех или иных работ (электромонтажником, слесарем-сборщиком). Автомобиль, собранный, то есть, по сути, «скомплектованный» по методу отверточной сборки, способен «ехать и доставлять пассажиров и грузы», чего не может обеспечить никакая из его отдельных деталей-подсистем. Таким образом, даже при таком тривиальном способе интеграции элементов в объединенной системе возникает «системный эффект», эмерджентность, то есть новое свойство, отсутствовавшее у каждого из элементов поотдельности и у всех элементов вместе, до их объединения в систему.

Функциональная интеграция («*комплексирование*») является более сложной формой интеграции, при которой, например, в комплекс бортового оборудования (КБО) летательного аппарата (ЛА) объединяются функционально полные, автономно работоспособные системы-элементы, выполняющие некоторые одинако-

вые функции. При этом в качестве нового свойства в интегрированном комплексе реализуется, как минимум, функциональное резервирование, а часто повышается, например, и точность решения навигационных задач. При комплексировании

$$C_1 \bigcap C_2 \neq \emptyset,\ R_1 \bigcap R_2 = \emptyset,\quad R = R_1 \oplus R_2,\ C_1 \setminus (C_1 \bigcap C_2) \neq \emptyset,\ C_2 \setminus (C_1 \bigcap C_2) \neq \emptyset. \qquad (1.2)$$

Эта форма интеграции обеспечивает, например, многорежимность применения ЛА за счет многократного функционального резервирования информационного обеспечения решаемых авиационным комплексом задач. Хотя, как видно из рис. 1.2. и (1.2), ресурсы R (аппаратные, программные и др.) у объединяемых систем не пересекаются, в интегрированной системе появляется, как правило, общий ресурс в форме, например, вычислителя и/или программы, выполняющих комплексную обработку функцинально-одинаковой информации.

Аппаратная интеграция подразумевает возможность достижения различных целей на основе одних и тех же «аппаратных» ресурсов. Здесь

$$C_1 \oplus C_2 = C,\ C_1 \bigcap C_2 = \emptyset,\ R_1 \bigcap R_2 \neq \emptyset,\ R_1 \setminus (R_1 \bigcap R_2) \neq \emptyset,\ R_2 \setminus (R_1 \bigcap R_2) \neq \emptyset. \qquad (1.3)$$

Этот способ интеграции, например, в случае КБО обеспечивает рациональное, экономное использование ограниченных бортовых ресурсов для решения широкого круга поставленных задач. Общие ресурсы здесь условно названы «аппаратными». Важно, что в данном случае, в отличие от функциональной интеграции, рассматриваются материальные ресурсы. Таковыми могут быть и энергетические ресурсы, например, в форме общих источников электро- и/или гидропитания. В качестве примера аппаратной интеграции приведем современную многорежимную, многофункциональную комплексную систему управления полетом (КСУ), которая решает на разных этапах полета большой перечень присущих ей различных функциональных задач на основе единых аппаратных (датчики, вычислители, приводы) и энергетических (источники электро и гидропитания) ресурсов.

Технологическая интеграция - сложная форма интеграции, предполагающая объединение на стадии разработки и изготовления (на технологической стадии) в «систему систем» (комплекс) различных систем-элементов, имеющих некоторое общее подмножество целей (функций) и общее подмножество ресурсов. Здесь, как видно из рис. 1.2,

$$C_1 \bigcap C_2 \neq \emptyset,\ R_1 \bigcap R_2 \neq \emptyset. \qquad (1.4)$$

Это наиболее общий случай интеграции технических (робототехнических) систем. В технологически интегрированном комплексе функционально- и аппаратно-полные, автономно работоспособные подсистемы отсутствуют. Комплекс после изготовления становится «неразъемным». В качестве примера технологически интегрированных систем (комплексов) можно привести современные «системы на кристалле», смарфоны, в КБО - интеграцию бесплатформенной инерциальной (БИНС) и спутниковой радионавигационной (СРНС) систем на единой

электронной плате на уровне микроэлектромеханических сенсоров (МЭМС) и приемников для реализации дополнительных функций коррекции БИНС от СРНС и повышения помехозащищенности СРНС.

Применительно к СЧМ в настоящее время реализуется аналогичная технологической *сильносвязная* (*симбиотическая*) *интеграция*. При симбиотической интеграции обобщаются предыдущие способы интеграции на объединение ресурсов машины и человека в интересах наиболее эффективной реализации целей (функций) системы на каждом этапе (режиме) ее функционирования. При этом реализуется возможность органичного объединения ресурсов техники с ресурсами человека-оператора или группы операторов (экипажа). В данном случае объединяются возможности $C_И$ искусственного интеллекта машины (в смысле реализации некоторых функций, отражающих назначение создаваемой системы «человек-машина» - СЧМ) и интеллектуально-психологические возможности $C_П$ человека, а также аппаратные ресурсы $R_А$ машины и физиологические ресурсы $R_Ф$ человека. Относительно независимыми остаются технологические ресурсы $R_Т$ машины и биологические ресурсы $R_Б$ человека. Хотя уже сейчас идет речь о «вживлении» микрочипов в тело человека для реализации биомедицинских и других целей.

Анализ основных способов объединения (интеграции) систем при создании новой системы показывает, что интеграция систем как явление отражает в наиболее концентрированном виде (на фоне располагаемых ресурсов) такое фундаментальное свойство систем, как *связность*. При этом речь идет о связности элементов и подсистем во всех системных аспектах их существования и проявления. Можно сказать, что интеграция систем, как способ создания новой объединенной, комплексной системы, сводится к целенаправленному использованию неединственности решения задачи объединения систем для реализации всей совокупности технических требований (ТТ), предъявляемых к будущей комплексной системе.

Неединственность решения задачи интеграции (системного проектирования тесно связных систем) обусловлена возможностью применения *как различных изоморфизмов-целей* (взаимно-однозначных соответствий), связывающих все множество технических требований (облик!) и его воплощение в некоем варианте структуры реальной технической системы (комплекса), так и *различной реализации каждого из возможных изоморфизмов-целей* посредством композиций отображений: отображения множества ТТ (облика) на множество декомпозированных частных требований и отображения этого множества частных требований на вариант структуры технической системы (комплекса).

В этой связи *процесс интеграции (объединения) систем в комплекс содержит, как правило, последовательность двух крупных фаз*:

- генерацию множества альтернативных вариантов создаваемого комплекса;

- выбор из этого множества предпочтительного варианта (вариантов).

Если вторая фаза (выбор варианта) опирается, так или иначе, на вполне формализуемые и хорошо отработанные алгоритмы оптимизации, то фаза генерации альтернатив в основном осуществляется на уровне интуиции, не имеет строгого формального описания и методической основы. Это приводит к необходимости использования эвристических подходов к проектированию интегрированных систем, что может привести к упущению из рассмотрения некоторых практически важных аспектов.

В связи с этим в России и за рубежом в последние 25-30 лет вопросам методологического обеспечения системного проектирования сложных интегрированных систем и комплексов уделяется существенное внимание. Особенно это касается систем авионики и КБО ЛА. Важное значение придается также научному обоснованию используемых эвристических подходов к системному проектированию КБО и вообще сложных комплексов, управляющих функционированием критичных в плане безопасности объектов, производств, транспорта.

В настоящее время сложившейся и апробированной на практике научно-методической, фундаментальной основы для прикладной теории интеграции не существует. Имеются различные эвристические подходы к решению задач интеграции систем в комплексы в процессе системного проектирования. Рассмотрим некоторые из используемых, относительно хорошо формализованных на содержательном уровне, эвристических подходов, не претендуя на полный охват их множества.

Глава 2

Эвристические подходы к интеграции систем. Содержательная формулировка телеоцентрического подхода

Интеграция, как способ порождения и процесс создания принципиально нового поколения больших интегрированных (сильносвязных) самоорганизующихся технических и человеко-машинных комплексов, предполагает взаимосвязанное использование широкого круга методов расчета, проектирования и исследования систем. Вообще *способы интеграции систем могут быть реализованы на основе различных процедур системного проектирования или подходов к* (*технологий*) *интеграции систем.* Так на рис. 2.1 проиллюстрированы некоторые развиваемые эвристические и формализованные подходы к интеграции.

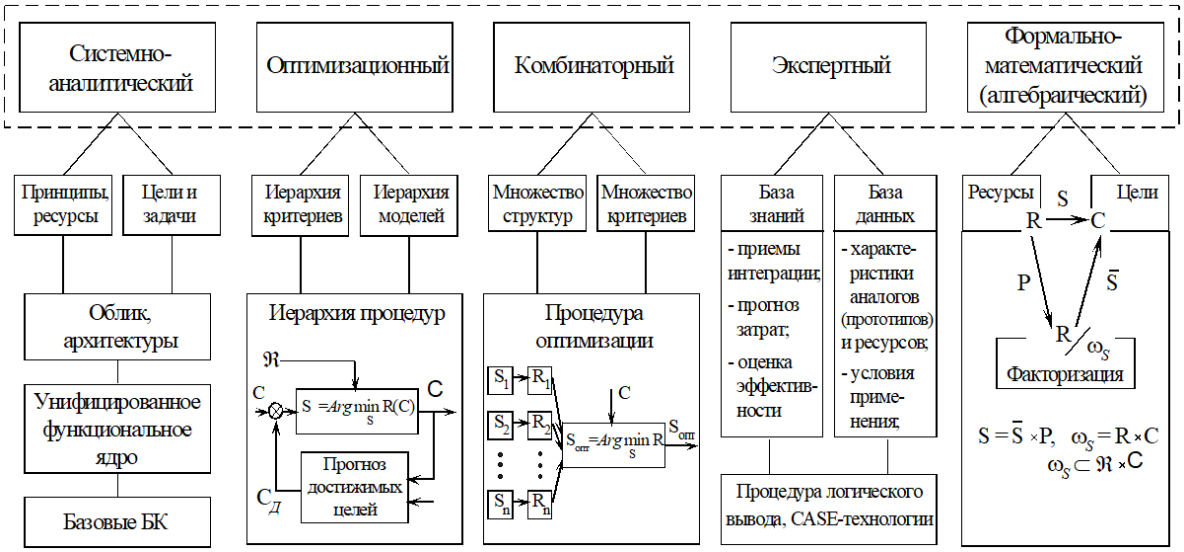


Рис. 2.1. Современные подходы к интеграции систем

На различных стадиях проектирования сложных систем и комплексов могут применяться все или сочетания некоторых, показанных на рис. 2.1 подходов к интеграции. Кратко охарактеризуем их, имея в виду, что выделение и автономная характеристика этих подходов к интеграции преследуют как методические, так и практические цели.

Ранее мы отмечали, что любой способ интеграции сложной системы предполагает две основных стадии синтеза: стадию порождения (генерации) множества возможных вариантов структуры системы и стадию выбора некоторого рационального или даже оптимального варианта структуры на множестве ее возможных вариантов. В связи с этим принципы реализации указанных стадий в

рамках различных подходов также являются одной из главных целей рассмотрения современных подходов к интеграции систем.

В рамках самого простого *комбинаторного подхода* реализуется, как правило, и наиболее простой способ интеграции сложной системы из готовых компонентов – способ комплектования (см. рис. 1.2). Основное внимание при этом сосредоточено на второй стадии процесса синтеза интегрированной системы, а именно, на стадии выбора оптимальной структуры на множестве возможных структур. Сами структуры порождаются на основе некоторого структурного базиса, представляющего собой некоторое упорядоченное множество заранее созданных, готовых физических узлов и подсистем (которые могут быть «взяты с полки»), способных реализовать подмножества частных функций, которые формируются в результате декомпозиции некоторой общей заданной функции создаваемой интегрированной системы. Примером может являться функциональная оптимизация структуры сверхбольшой интегральной схемы (СБИС) на основе БМК (базовых матричных кристаллов) или оптимизация ПЛИС (программируемой логической интегральной схемы), содержащих миллионы логических элементов на кристалле, структурированных с помощью библиотек базовых элементов. Часто множество возможных вариантов структур постулируется. Выбор оптимальной структуры осуществляется комбинаторными методами, либо методами теории графов.

В целом комбинаторный подход предполагает генерацию множества критериев (на основе технических требований), множества структур и реализацию процедуры комбинаторной оптимизации. Процедура генерации структур при этом опирается на прототипы и формально не упорядочена, является эвристической.

Экспертный подход к интеграции сложных, в том числе и человеко-машинных систем, предусматривает формирование базы данных с характеристиками аналогов (прототипов) и ресурсов и условиями применения объекта, а также формирование базы знаний, содержащей правила и приемы интеграции систем, правила прогноза затрат ресурсов и правила оценки эффективности. На основе информации базы данных и базы знаний специальная процедура логического вывода, использующая так называемые CASE-технологии инструментальной и интеллектуальной поддержки проектирования, осуществляет формирование окончательного варианта структуры системы, как правило, единственного. При данном подходе обе стадии синтеза интегрированного комплекса опираются на эвристические приемы.

В основе *оптимизационного подхода* лежит *концепция интегрированного бортового комплекса* (ИБК) ЛА, сформулированная в конце 80-х годов XX века академиком А.А. Красовским [13] применительно к новому поколению КБО ЛА. В рамках концепции под интегрированным БК (ИБК) пилотируемого ЛА понималась часть человеко-машинной системы (эргатического бортового комплекса), состоящая из первичных измерительных преобразователей (датчиков, сенсоров), распределенной многопроцессорной (мультимикропроцессорной) вычислительной среды, системы отображения информации (СОИ), управляющего поля кабины, исполнительных устройств, которая за счет глубокого комплексирования (на уровне первичных измерительных преобразователей, исполнительных устройств и микропроцессоров) и соответствующего математического обеспечения решает задачи применения ЛА оптимальным образом с достижением максимальной эффективности на каждом этапе и режиме полета. Аналогичные представления об ИБК сложились в то время и за рубежом. Считалось [14], что в ИБК вычислительные ресурсы многопроцессорной вычислительной системы должны быть общими для «борта» и в составе бортовой вычислительной системы (БВС) должен присутствовать некоторый «распределитель ресурсов», который распределяет их в соответствии с приоритетами задач на каждом этапе полета. Отличие зарубежной концепции от отечественной заключалось в интеграции процессоров, точнее процессорных модулей, в едином моноблоке-крейте (шкафу), а также оптимизация состава этих конструктивно-функциональных модулей (КФМ) и их унификация в части форм аппаратного исполнения (форм-факторов), интерфейсов и других атрибутов. В дальнейшем в 90-х годах прошлого века эта зарубежная концепция логически эволюционировала в концепцию ИМА - интегрированной модульной авионики, - стандарты которой в настоящее время являются фактически обязательными при проектировании коммерческих ЛА, хотя носят рекомендательный характер.

При оптимизационном подходе практически единственная структура ИБК как сложной интегрированной системы вытекает непосредственно из концепции. Подход к ее формированию, хотя и является отчасти эвристическим, во многом научно обоснован, так как опирается на стройную и строгую иерархию критериев оптимизации, иерархию ограничений и иерархию моделей. Процедура оптимизации ИБК разворачивается от общего к частному: от глобальных целей и критериев оптимизации к частным целям этапов полета и применения ЛА. Рассматриваемый оптимизационный подход доведен до уровня алгоритмов оптимизации управления и информационного обеспечения по этапам полета ЛА. Отметим лишь, что уточнение и расширение концепции ИБК до уровня эргатического ИБК симбиотического типа требует уточнения и структуры комплекса в целом.

В целом, рассмотренные подходы не содержат цельной, единой для всех стадий синтеза бортового комплекса научно обоснованной методологической основы проектирования облика, структуры и архитектур КБО, ИБК и комплексной системы управления полетом - КСУ. Вместе с тем на основе этих и других подходов проектирование КБО как интегрированного БК в определенной степени может быть формализовано и автоматизировано с использованием, в частности, развитой системы CASE– средств инструментальной поддержки системного проектирования КБО.

Уже в настоящее время разработаны и широко применяются как достаточно универсальные, так и специализированные инструментальные средства и стендовое обеспечение поддержки проектирования. Процесс разработки ИБК сопровождается или даже предвосхищается созданием развитой стендово-имитационной среды (СИС), которая после реализации базового КБО на конкретном типе ЛА может использоваться на всех стадиях интегрированного жизненного цикла для его сопровождения и сама может являться основой интеграции, то есть объединения в единое целое этого жизненного цикла.

Наиболее научно обоснованным, общим и мощным из эвристических подходов, представленных на рис. 2.1, обеспечивающих более высокий уровень формализации и регламентации процедур системного проектирования, является *системно-аналитический телеоцентрический* (*целецентрический*) *подход* (от греческого *te1os* - конец, цель). Он в той или иной мере поглощает или использует все другие подходы на разных стадиях проектирования КБО и эргатического ИБК и предполагает всесторонний, именно системный анализ проблем разработки структуры и собственно синтез структуры на основе этого анализа. Проектирование с использованием этого подхода в дальнейшем и будем называть *системным проектированием*.

Мощность подхода, если можно так сказать, позволяет провести самый глубокий анализ целей и задач, стоящих перед перспективным комплексом. Делается это на основе тщательного анализа назначения ЛА и прогнозирования места создаваемого на основе этого ЛА авиационного комплекса в системе воздушных перевозок и в целом на рынке, а также на основе прогноза развития ресурсов и производственных технологий.

Далее *сама технология телеоцентрического системного проектирования позволяет сформировать облик КБО и КСУ, их структуры и внутренние архитектуры.* И, наконец, сформировать *унифицированное функциональное ядро* КБО и КСУ для всех классов ЛА, а внутри каждого класса – базовое *функциональное ядро* КБО и КСУ.

На основе системно-аналитического телеоцентрического подхода разработана методология системного проектирования эргатических ИБК и КСУ [15-26]. В основу положена телеоцентрическая система взглядов на проблему проектирования человеко-машинных комплексов ЛА и их вычислительных систем. Это означает, что человеко-машинный комплекс должен быть ориентирован на выполнение как глобальной цели полета, так и локальных целей и задач каждого этапа полета, за достижение которых одинаково ответственны человек и машина, то есть собственно КБО. В связи с этим понятна образная словесная формулировка «*КБО, эргатический ИБК должен быть продолжением рук летчика, глаз летчика и мозга летчика*». *Но этого мало. Необходимо, чтобы мозг, интуиция и память летчика были продолжением интеллекта и памяти машины. В обеспечении этой взаимообусловленной и взаимодополняющей связи и заключается главный принцип разработанной методологии.*

Одним из основных свойств, которое должны иметь разрабатываемый КБО, эргатический ИБК, КСУ и их бортовая распределенная вычислительная система-сеть (БРВС) является *свойство организмичности*. Именно оно обеспечивает точное выполнение задач эргатическим ИБК по его предназначению с наименьшими затратами ресурсов и, кроме того, *это свойство придает эргатическому ИБК и КСУ функции внутренней саморегуляции и самоорганизации, обеспечивающие максимальную устойчивость (в том числе, отказоустойчивость), безопасность, живучесть, что делает их похожими на живой организм*. Свойство организмичности обеспечивается за счет использования 2-х новых технологий:

– технологии создания и применения функционально-ориентированной архитектуры распределённой микропроцессорной бортовой распределенной вычислительной среды (сети), *обеспечивающей оптимальное или, по крайней мере, рациональное вложение архитектуры программного обеспечения в многопроцессорную аппаратную архитектуру* для параллельной обработки информации в реальном времени;

— технологии системного телеоцентрического проектирования: *проектирование организмических архитектур БРВС для эргатического ИБК и КСУ на функциональном, информационно-топологическом, аппаратном и энергетическом уровнях.*

Технология системного телеоцентрического проектирования БРВС КСУ рассматривается как часть общей методологии телеоцентрического проектирования КБО (эргатического ИБК) в целом.

Можно констатировать, что проблема методологического обеспечения системного проектирования эргатических ИБК ЛА качественно нового поколения

имеет важное мировоззренческое и практическое значение, а также высокую актуальность. При этом нужно учитывать, что в общей структуре проблемы методологического обеспечения системного проектирования эргатического ИБК ЛА *проблема формализации системного проектирования* бортовых комплексов как сложных целеустремленных систем, в которых непрерывно взаимодействуют человек и машинные компоненты, является центральной.

Именно формализация процедур проектирования систем (в широком смысле) позволяет выявить «твердый осадок» или «скелет», который собственно и представляет собой научную основу методологии проектирования, единую для всех как в смысле описания алгоритма деятельности проектировщика, так и в смысле «языка» общения соисполнителей проекта. При этом *под формализацией понимается* не только строгое формально-математическое (например, на языке современной алгебры) описание процедур проектирования, но и принятый по соглашению или «гостированный» свод правил проектирования, построенный на основе методов системного анализа и синтеза, то есть обобщения (зачастую эвристического, эмпирического) опыта разработок систем, оказавшегося удачным.

Вместе с тем *наибольшую ценность имеют именно формальные в математическом смысле методы и теории проектирования, так как они, как правило, позволяют выявить предельные возможности соответствующих систем и возможные потери в их качестве и эффективности при отступлении от формально-математических канонов*. Очевидно, что *сама проблема проектирования сложных систем является многоуровневой и неоднозначной как в смысле глубины проработки вопросов проектирования, так и в смысле применяемых методов*. Решение указанной проблемы и составляет основную задачу разработки БРВС КБО (эргатического ИБК) и комплексной системы управления полетом.

Известные подходы к интеграции рассматривают связность целей функционирования, располагаемых ресурсов, а также учитывают взаимодействие человека с БК. Эти связи просматриваются при анализе типовой структуры КБО. В процессе объединения часть ресурсов подсистем (например, фильтры и эталонные модели движения) можно объединить, на что обращалось внимание в главе 5 этой второй части книги. После объединения в интегрированной системе возникает эффект эмерджентности, то есть системный эффект, характеризующийся приращением свойств и качеств, отсутствовавших у подсистем до их объединения в единую информационно-управляющую систему (ИУС) в составе КБО. Механизм возникновения и использования этих эффектов нельзя описать, основываясь только на эвристических знаниях. Необходимо использовать математический аппарат, позволяющий вскрыть механизм возникновения, взаимовлияния и

использования глубокой связности процессов в ИУС. Поэтому можно выделить направление в интеграции, называемое *математически формализованной интеграцией*. Такая интеграция предполагает учет взаимовлияния подсистем друг на друга с помощью формульных соотношений. При этом решение задачи может не существовать, быть единичным или единственным в смысле существования множества-класса неразличимых с точки зрения условий задачи решений. Такая интеграция предполагает также генерацию возможных вариантов решений строго формализованными методами. Можно утверждать, что во многих случаях указанная генерация на интуитивном уровне, исходя из эвристических соображений, невозможна в принципе. Например, с интуитивно непредсказуемыми вариантами регуляторов и наблюдателей в задачах их синтеза и интеграции мы сталкивались в главах 1-5 второй части книги. Особенно это касается MIMO-систем.

Необходимо заметить, что *при математически формализованной интеграции основное внимание уделяется первой из упомянутых фаз системного проектирования, так как вопросы выбора одного варианта из множества альтернатив достаточно хорошо изучены*.

На различных стадиях проектирования сложных систем и комплексов применяются все, показанные на рис. 2.1 подходы к интеграции. Вместе с тем следует отметить, что стадия порождения возможных вариантов построения проектируемых систем и комплексов в настоящее время наименее формализована как на содержательном уровне, так и на уровне математического описания. Поэтому формально-математическое, а именно, алгебраическое описание процедур интеграции, развивающееся в настоящее время, имеет не только важное мировоззренческое значение для теории систем и системного анализа, но и важное значение для практики, так как позволит вскрыть потенциальные возможности и ограничения интеграции сложных систем. *Формально-математический* (*алгебраический*) *подход*, представленный на рис. 2.1 в ряду других подходов к интеграции, предполагает формальное, а именно, алгебраическое описание множеств ресурсов, целей и отношений между ними, а также доказательства теорем, отражающих качественные, фундаментальные свойства интегрированных систем. Разработку конкретной структуры интегрированной системы такой подход может не предусматривать. Он используется как методологический для всесторонней оценки и анализа качества структуры системы. Подход может использоваться также для сравнительной оценки структур, сформированных на основе других подходов, с целью определения их отличий и отступлений от некоторой потенциально идеальной структуры, основные критерии качеств которой могут быть сформированы формально-математически. На формально-математическом (ал-

гебраическом) подходе к интеграции систем более подробно остановимся позднее. А пока дадим более развернутую содержательную характеристику телеоцентрического подхода.

Одним из важнейших преимуществ и достоинств телеоцентрического подхода является то, что он позволяет формализовать решение сложнейшей фундаментальной проблемы синтеза многопроцессорных (мультимикропроцессорных, многоядерных) вычислительных сред самого разного назначения, а именно *проблемы оптимального вложения архитектуры алгоритмического и соответственно архитектуры программного обеспечения* (ПО) в топологию информационно-вычислительной сети и в аппаратную архитектуру многопроцессорной вычислительной среды (ВС) [27].

Дадим определения основных понятий, которыми оперируют в рамках телеоцентрического подхода [19].

Под *системой, подлежащей разработке,* понимают совокупность элементов, объединенных общей целью функционирования и функциональной средой. *Элементом* считается условно неделимая с точки зрения системы относительно самостоятельная часть, имеющая чёткие границы, а *функциональной средой* – характерная для системы совокупность законов, алгоритмов и правил по которым взаимодействуют элементы в системе посредством *связей (отношений)*.

Объектом исследований при проектировании являются *искусственные системы*, то есть такие *системы*, которые *создаются человеком* для удовлетворения каких-либо потребностей и нужд – *для реализации определённых целей*.

Цель определяется назначением системы, как заранее мыслимый процесс и результат *функционирования* системы, прогноз возможного будущего состояния системы, или того, к чему система должна стремиться (и для чего она создана).

Функции системы характеризуют внешние проявления её поведения («деятельности») при достижении целей и напрямую обеспечивают реализацию целей, определяемых её назначением, то есть являются тем главным, для чего система предназначена, *являются отражением целей.*

Свойства системы определяют удобство и безопасность пользования системой при реализации функций, а также, в целом, приспособленность системы для выполнения функций, например, с учётом ограничений на параметры внешней и внутренней среды. *Свойства системы* являются отражением *принципов проектирования,* как некоторых руководящих положений, которыми предписывается руководствоваться на стадии разработки. В созданной и готовой к применению системе *принципы* становятся её *свойствами.* Так *принцип модульности,* часто используемый при разработке систем становится *свойством модульности*,

обеспечивающим простоту настройки, испытаний, эксплуатации и модернизации систем, например, путём простой замены модулей.

В силу строгой определённости целевого назначения, все проектируемые системы относятся к классу *целеустремлённых* (целенаправленных) или *телеоцентрических систем*. Носителем знаний о цели системы, её внешнем назначении является разработчик. Он определяет общий замысел разработки системы – концепцию. Любые искусственные телеоцентрические системы создаются, как правило, на основе некоторых предварительно сформированных *концепции* и *облика*.

Под *концепцией* понимают *общий замысел разработки*, отражающий содержательную, вербальную характеристику системы, основные идеи и принципы ее построения и функционирования в соответствии с назначением (целью). Концепция содержит качественную характеристику создаваемой системы в форме некоторого идеального образа-цели, отвечающего последним достижениям науки и практики проектирования в рассматриваемой предметной области. Пример формулировки концепции интегрированного бортового комплекса ЛА, данной академиком А.А. Красовским, мы приводили выше.

Под *обликом* понимают более детальную характеристику системы, отражающую концепцию в форме совокупности технических требований (ТТ) к целям-функциям системы, к эффективности их реализации в различных условиях, к устройству (конструкции) системы и основным принципам её построения. Облик одновременно содержит качественные *показатели* и количественные *критерии* эффективности для сравнения вариантов *структур* системы. Достаточно полная характеристика облика в форме совокупности ТТ содержится в *техническом задании* (ТЗ) на разработку системы. По сути, облик представляет собой некоторую «*оболочку*» или «*гипершар*», внутри которого должны лежать все *допустимые варианты структур* проектируемой системы, некоторые из которых должны быть синтезированы *на стадии системного проектирования* и из этих синтезированных вариантов необходимо выбрать наилучший вариант структуры по указанной совокупности критериев и показателей. Очевидно, что с формально-математической точки зрения процедура такого выбора является *процедурой оптимизации структуры*.

Целеустремлённость, как главное *свойство* проектируемых систем, означает, что такие системы в процессе практического использования должны обеспечивать реализацию *с заданной эффективностью* и на *заданном качественном уровне* (определяемом совершенством конструкции, удобством эксплуатации и др.) строго определённого множества функций, предписываемых *техническим заданием-обликом.*

ТЗ выдаётся, как правило, на разработку и сопровождение системы в течение *интегрированного жизненного цикла* (ИЖЦ). ИЖЦ включает все стадии полного жизненного цикла (стадии разработки, испытаний, эксплуатации, модернизации и утилизации системы) с учётом того, что каждая из стадий ЖЦ системы и цикл в целом замыкаются обратной связью на разработчика: разработчик имеет средства и возможности непрерывного контроля состояния и управления состоянием разработанной системы в течение всего времени её «жизни» и обеспечивает *сопровождение системы* вплоть до утилизации. При этом средствами сопровождения системы в течение ИЖЦ являются специально создаваемые программно-аппаратная *стендово-имитационная среда* (СИС) и *система интегрированной логистической поддержки* (СИЛП), согласованно функционирующие на основе развитой совокупности взаимосвязанных информационных технологий – CALS-технологий.

Целью создания системы, как правило, является стремление реализовать требуемый уровень её эффективности при заданном уровне безопасности как за счёт использования *совершенного ресурсного обеспечения*, так и за счёт *рациональной организации* ресурсов в системе, определяющей их состав и взаимосвязи, включая и взаимосвязи (взаимодействия) ресурсов экипажа с ресурсами машинной автоматики в эргатической системе.

Структура характеризует способ организации частей в целое, то есть такую «организацию» ресурсов, образующих систему, посредством которой достигается реализация *системных целей* - таких целей, которые присущи лишь системе в целом и отсутствуют у составляющего её множества элементов до их объединения в систему. Структура, как форма организации частей в целое, *является наиболее консервативной характеристикой системы*, остающейся неизменной в широких диапазонах изменения ожидаемых условий эксплуатации (ОУЭ). Именно с устойчивостью, стабильностью и пластичностью структуры системы при изменении условий эксплуатации связаны такие понятия, как *робастность системы* и *способность её к адаптации* путём реконфигурации при изменении внутренних и внешних условий функционирования. Структура системы всесторонне отражает определяемую целью *организованность* системы и устойчивую упорядоченность в пространстве и времени всей совокупности (состава) входящих в неё элементов и связей между ними. При проектировании системы *структура является важнейшим объектом разработки* и рассматривается как концентрированное отражение ее устройства и принципов функционирования при всестороннем рассмотрении создаваемой системы с различных точек зрения. Структура *определяет состав привлекаемых ресурсов* и некоторым образом (посредством «связей» и «отношений») *организует ресурсы в систему* в интересах

наиболее эффективной реализации всей совокупности целей, предписанных её назначением.

Ресурсы это материальный, энергетический, информационный или другой вид обеспечения создания, существования и функционирования системы в соответствии с целевым назначением. Существование и функционирование любой системы связано с неизбежным потреблением ресурсов. Сама система ресурсы не возмещает и они могут пополняться только извне. В этом смысле система является открытой. В понятие «ресурсы» вкладывается принцип неизбежности и необратимости их потребления.

В общем случае *под ресурсами понимаются* все материальные и нематериальные средства (функции, реализуемые в форме программ для вычислительных машин; информация, содержащаяся в хранилищах памяти и передаваемая по физическим и виртуальным линиям связи; реальные физически существующие, аппаратные компоненты и подсистемы; источники энергии и линии её передачи и др.), используемые для создания и функционирования системы на всех стадиях ИЖЦ. Собственно, элементы-подсистемы (и то, на основе чего, они построены) и связи между ними могут рассматриваться в качестве ресурсов, привлекаемых для создания системы.

Современное ресурсы, на основе которых создаются системы, достигли такого состояния и уровня развития, при которых стало возможным использование телеоцентрического подхода (подхода «сверху-вниз») к системному проектированию [18, 19], при котором можно исходить из целей системы, а не из ограниченных возможностей ресурсов. Раньше такой подход был просто невозможен и нереализуем. Подход гарантирует полную и точную реализацию целей системы, позволяет логически обосновать и формализовать правила оптимизации структуры и в совокупности с алгебраическим формально-математическим подходом позволяет описать средствами современной математики (высшей алгебры) методики декомпозиции и синтеза структуры. То есть телеоцентрический подход допускает формально-математическую формализацию и интерпретацию на языке современной математики.

Ресурсы, как характеристика потенциала системы, всегда ограничены и, если система является *замкнутой*, то могут лишь расходоваться и убывать, приводя к полной *деградации системы,* при которой выполнение системой заданных функций становится невозможным. *Если же система является открытой и находится во взаимодействии с другими* системами, то на отдельных стадиях ИЖЦ её ресурсы могут пополняться и даже наращиваться (например, при модернизации системы), что существенно увеличивает эффективность, безопасность системы и длительность её жизненного цикла. Вместе с тем, даже в открытой

системе возможности пополнения ресурсов, как правило, ограничены. Учитывая ограниченность используемых в системе ресурсов и *ожидаемые условия эксплуатации*, разработчики в процессе проектирования системы стараются заложить в её конструкцию, *в её организацию-структуру* возможность *управления деградацией* ресурсов в процессе рабочего функционирования. *Управляемая деградация* системы и её ресурсов обычно обеспечивается за счёт использования специально предусматриваемых процедур и *алгоритмов автоматической реконфигурации структуры* системы и образующих её ресурсов в зависимости от наблюдаемой в данный момент *внутренней и внешней ситуации*.

Под ситуацией понимается совокупность факторов, характеризующих внешнюю и внутреннюю среду. *Внутренняя среда* как раз и отражает состояние ресурсов системы в конкретный момент времени – *внутреннюю ситуацию*. *Внешняя ситуация* характеризуется всей совокупностью факторов (условий) *внешней среды*, воздействующих на систему в рассматриваемый момент времени функционирования.

Структура при таком подходе полностью характеризуется достаточным и в то же время не избыточным числом *архитектур* [18, 19], описывающих ее с различных *независимых, ортогональных* точек зрения. *Архитектура* является некоторым ортогональным «срезом», «слоем» или «стратой» структуры. Возможность порождения таких слоёв-страт в структуре обусловлена практически наблюдаемым разделением всего многообразия привлекаемых для создания системы ресурсов на независимые, непересекающиеся *классы.* Наличие конечного множества независимых классов ресурсов детерминирует соответствующее количество независимых, ортогональных точек зрения на создаваемую систему и её структуру. Каждому классу ресурсов строго соответствует своя, производная от него *архитектура, как ортогональная проекция структуры системы на соответствующий класс ресурсов*. Приведённые термины и определения, фигурирующие в рамках телеоцентрического подхода, находятся в определённых отношениях и соподчинённости, что иллюстрируется рис. 2.2.

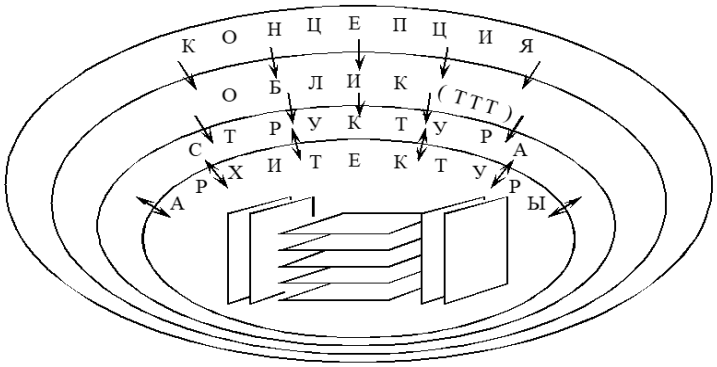


Рис.2.2. Основные элементы (понятия) телеоцентрического подхода

В качестве примера на рис.2.3 показаны классы ресурсов и соответствующие им архитектуры, составляющие структуру интегрированного бортового комплекса ЛА [18, 19].

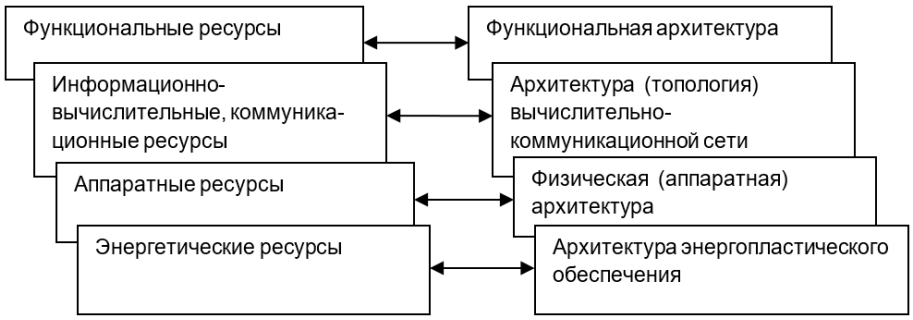


Рис. 2.3. Соотношение архитектур и классов ресурсов

Таким образом, архитектуры в структуре проектируемой системы независимы в плане используемых для их реализации классов ресурсов, но связаны необходимостью решения на их основе предписанного системе множества функций-целей и, соответственно, должны быть согласованы определённым порядком проектирования, влекущим их последовательное формирование по принципу «сверху-вниз»: от целей, функций и задач, предписанных, например, ИБК, к упорядоченным в форме архитектур ресурсам, привлекаемым для их реализации.

Указанное количество *основных архитектур* является необходимым и достаточным для формирования структуры ИБК: оно отражает количество независимых точек зрения (уровней описания, слоёв, страт) на структуру комплекса и соответствующих им классов ресурсов. Следует иметь в виду, что помимо основных архитектур, показанных на рис. 2.3, существуют производные от них и детализирующие их архитектуры одного с ними слоя (страты), но более низкого уровня иерархии. Например, производными от функциональной архитектуры являются архитектуры алгоритмического и программного обеспечения. Производной от архитектуры (топологии) вычислительно-коммуникационной сети является более детализированная архитектура (топология) функциональных (виртуальных) цифровых вычислителей, вычислительных модулей и виртуальных каналов информационного обмена между ними с учетом необходимых степеней резервирования, рассчитываемых исходя из требований к надежности и отказобезопасности системы в целом.

При телеоцентрическом подходе основные архитектуры проектируются по принципу «сверху-вниз»: от функциональной архитектуры, отражающей цели и назначение ИБК, к архитектуре энергопластического обеспечения. Процедура синтеза и оптимизации структуры в целом показана на рис. 2.4 [18, 19].

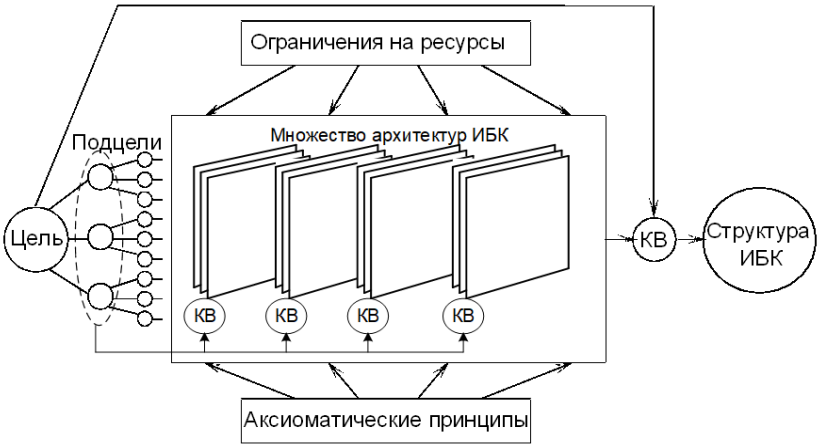


Рис. 2.4. Формализм телеоцентрического подхода

Подмножества вариантов архитектур, отражающих соответствующие классы ресурсов и «ветви» дерева целей, оцениваются по локальным критериям выбора (КВ). Генерация вариантов архитектур осуществляется с учетом назначаемых заранее аксиоматических принципов проектирования (например, модульность, открытость и др.) и ограничений на ресурсы. Совокупность наилучших вариантов архитектур, выбранных в каждом классе ресурсов, образует структуру системы. Пример используемых аксиоматических принципов проектирования применительно к информационно-управляющей системе (ИУС) из состава ИБК приведен в таблице 2.1.

Как видно из рис. 2.4, при телеоцентрическом системном проектировании должны учитываться ограничения на ресурсы, которые, несмотря на высокий уровень развития современных ресурсов, всегда остаются, а также ограничения в широком смысле, диктуемые необходимостью использования различных стандартов и других нормативных документов, а также особенностями синтезируемых систем и комплексов. Так в случае разработки человеко-машинных, эргатических систем должны учитываться элементы эргатического аспекта проектирования при различных подходах к системе «человек-машина» - СЧМ, - показанные на рис. 2.5 [18]. Одним из важнейших ограничений являются стоимость разработки системы и затраты на ее эксплуатацию и содержание в течение жизненного цикла, а также сроки разработки, испытаний и передачи в серийное производство.

Структура, сформированная из наилучших в каждом классе архитектур, проверяется на удовлетворение глобальным критериям выбора (например, масса, габариты, энергопотребление, надежность, отказобезопаность и др.). Если критерии удовлетворяются, процесс системного проектирования считается законченным. Если же не удовлетворяются, то либо смягчаются ограничения на

ресурсы, либо корректируется ТЗ (облик и соответствующие цели). Процесс итерационно повторяется до реализации согласованных целей [18, 19].

Таблица 2.1. Аксиоматические принципы проектирования ИУС

Принципы обработки информации	**Общие аксиоматические принципы управления и обработки информации в системах**	**Принципы управления**
Использование при обработке стохастической модели процесса	**Принцип разделения**	Использование при синтезе детерминированной модели процесса
Принцип обратной связи: -по априорной информации; -по текущей информации; -по прогнозируемой информации	**Принцип обратной связи:** -по априорной информации; -по текущей информации; -по прогнозируемой информации	Принцип программного управления Принцип обратной связи по текущей информации Принцип ретроспективно- -прогнозирующего управления
Принцип оптимальной обработки информации: –Р.Калмана –метод наименьших квадратов –наблюдатель Люенбергера	**Принцип оптимальности:**	Принцип максимума Понтрягина. Принцип оптимальности Беллмана Принцип минимума обобщенной работы А.А.Красовского. Принцип локально-оптимального управления
Принципы устойчивости Принципы инваривнтности. Принцип программной настройки Принцип текущей параметрической идентификации Принцип структурной идентификации Принцип адаптации функционалов. Принцип контроля и реконфигурации.	**Принцип адаптации (в большом)** -принцип робастности (грубости); -принцип адаптации (в малом) -принцип самоорганизации	Принципы (критерии) устойчивости. Принцип нечувствительности (инвариантности). Принцип программной настройки. Принцип текущей параметрической идентификации. Принцип структурной идентификации. Принцип адаптации функционалов. Принцип контроля и реконфигурации
Принципы обобщения (агрегирования) информации	**Принцип многоуровневого подхода**	Принципы локализации управлений: -усечения (разрезания) модели; -координации (вложенных) моделей
Принцип унификации. Принцип сертификации. Принцип открытости .	**Принцип модульности архитектур**	Принцип унификации. Принцип сертификации. Принцип открытости.
Принцип интегрированности		

Рис. 2.5. Элементы эргатического аспекта проектирования при различных подходах к СЧМ

Таким образом, *процесс формирования структуры* и соответствующих архитектур является самостоятельной и важнейшей частью решения общей задачи проектирования системы – *системного проектирования.* В целом, *задачей системного проектирования* является формирование *оптимальной* или, как минимум, *рациональной структуры* системы на основе концепции и облика.

Дело в том, что *идеальная, оптимальная структура* системы в практических задачах часто нереализуема и в связи с этим встаёт задача выбора наилучшего варианта из множества потенциально возможных и реализуемых. Результатом компромисса, учитывающего практические аспекты и условия реализации системы, является *рациональная структура* системы.

Таким образом, *телеоцентрический подход*, как форма системного подхода к проектированию целеустремлённых систем как раз и формализует на содержательном уровне организацию и *последовательность действий проектировщика при разработке системы*, обеспечивающие создание оптимальных (рациональных) систем с точки зрения эффективности реализации их целей-задач и ограничений.

В качестве примера рассмотрим технологию применения телеоцентрического подхода при проектировании структуры перспективного КБО в рамках концепции федеративно-интегрированной распределенной модульной авионики («ФИРМА») [19].

Глава 3

Пример системного проектирования на основе телеоцентрического подхода. Концепция «ФИРМА»

Проблемы синтеза и обоснования эффективных многопроцессорных архитектурных решений являются актуальными для разных сфер применения вычислительной техники, относящихся как к уровню многоядерных «систем на кристалле» [27], так и к уровню «больших систем» управления сложными динамическими объектами [28]. Эти проблемы остаются на острие научно-технического прогресса и в области системотехнического проектирования КБО и комплексных систем управления полётом ЛА.

Актуальной задачей современного этапа развития КБО и КСУ является оптимизация их структур и взаимосвязей с учётом современных достижений в области интегрированной модульной авионики (ИМА) [29], бортовой вычислительной техники, датчиков пилотажной и навигационной информации и исполнительных устройств (приводов). Одной из важнейших архитектур в структуре КБО является архитектура (топология) его вычислительной среды.

В работах [15, 18, 19, 24-26] на основе телеоцентрического подхода предложены научно обоснованная концепция федеративно-интегрированной распределённой (сетевой) модульной авионики («ФИРМА») и регулярная, формализованная процедура анализа (декомпозиции) и синтеза (оптимизации) топологий бортовых распределённых вычислительных систем (БРВС) КБО и КСУ, как весьма важных компонентов их общих структур.

В ходе эволюции бортовые комплексы (БК) и в целом авиационная электроника («авионика») ЛА прошли следующие этапы развития: централизованные БК – ЦБК, федеративные БК – ФБК, интегрированные БК – ИБК и соответствующая отечественной концепции интегрированных БК [13] зарубежная концепция интегрированной модульной авионики (Integrated Modular Avionics - IMA) – ИМА [14, 29], а также её дальнейшее развитие – распределённая ИМА (Distributed IMA - DIMA) [29]. Особенности структур, а также достоинства и недостатки этих БК были обусловлены конкретно-историческим уровнем развития бортовой вычислительной техники и технологий обработки и передачи информации. Эволюция БК схематично представлена на рис. 3.1.

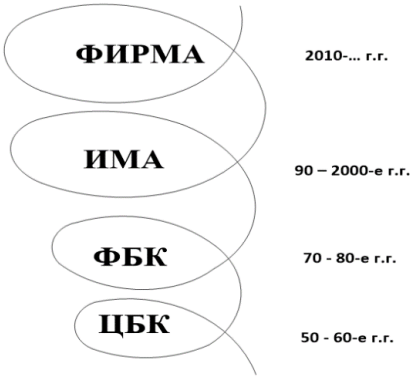


Рис. 3.1. Эволюция бортовых комплексов

При всей привлекательности концепции ИМА (существенное снижение массы и габаритов бортового оборудования, сокращение типов и унификация вычислительных модулей (ВМ), открытость архитектуры и др.), в основу которой были положены общепринятые аксиоматические принципы унификации и модульности аппаратуры и программного обеспечения (ПО) и далеко не очевидное требование интеграции ВМ и ПО КБО в минимальном (как правило, в одном-двух) числе шкафов-крейтов центрального вычислительно-управляющего ядра, на практике обозначились трудности её внедрения, обусловленные, например, нежеланием разработчиков «традиционных» систем становиться поставщиками лишь функционального программного обеспечения (ФПО), а также существенными особенностями ряда систем, обусловленными значительными отличиями в требованиях к уровням надёжности, отказобезопасности, вычислительной производительности, помехозащищённости каналов информационного обмена (КИО) и живучести систем в целом.

По сути, концепция ИМА, сформированная к началу 90-х годов прошлого века, по современным представлениям была определённым откатом к централизованным БК на новом этапе развития бортовой вычислительной техники. Концепция ИМА имеет и другие существенные недостатки, отмеченные в [19]. Главным же недостатком ИМА, обусловившим и все другие, является эвристичность и интуитивность подходов к анализу (декомпозиции) и синтезу аппаратной и программной архитектур ИМА, отсутствие их строгого научного обоснования. Стандарты ИМА содержат лишь достаточно общие и независимые требования к этим архитектурам, предполагая их абсолютно не взаимосвязанными.

Недостатки ИМА и трудности ее внедрения привели к необходимости совершенствования этой концепции с учётом реалий и потребностей практики. От-

ветом на возникшие проблемы стало появление концепции сетевой, распределённой ИМА (Distributed IMA - DIMA) [29-32]. Вместе с тем, концепция распределённой ИМА, сохранив (унификация модулей и вычислительных платформ, например) и преумножив (согласие на применение сетевой архитектуры и допущение распределённости вычислений в нескольких крейтах разных уровней) достоинства «обычной» ИМА, не устранила ряд присущих ей принципиальных ограничений и недостатков. Так, к недостаткам, органически присущим сверхинтегрированным БВС, в том числе БВС типа ИМА и неустранённым в ИМА 2-го поколения, можно отнести следующие [27, 33]:

- ограниченные возможности коммуникационной сети в обеспечении быстрых передач информации между узлами сети, так как любая вычислительная система со многими процессорами эффективна только на определённом классе алгоритмов; часто информация, относящаяся к разным функциональным уровням и, соответственно, обновляемая с разной частотой, циркулирует в одних и тех же физических КИО, находящихся под управлением единого логического протокола информационного обмена;

- высокая производительность ВС достигается лишь в том случае, когда большая часть процессоров загружена выполнением *полезной работы*. На практике же ОС таких сверхцентрализованных БВС львиную долю процессорного времени расходует на себя (выполнение различных проверок, управление маршрутизацией и разделением вычислительных процессов и задач, управление локальными вычислениями на процессорах, динамическая реконфигурация ВС и т.д.). Оказалось, что такая ОС расходует на «самообслуживание» до 60…80% вычислительного ресурса ЦБВ.

Главным же недостатком ИМА, неустраненным и в распределённой ИМА 2-го поколения, является эвристичность и интуитивность процедур формирования сетевой распределённой архитектуры и ее компонентов.

В связи с этим главными в настоящее время стали проблемы рациональной декомпозиции вычислительного процесса в многопроцессорных БВС и оптимальной децентрализации процедур разработки систем КБО и их ФПО, а также связанные с ними проблемы оптимизации архитектуры (топологии) вычислительно-коммуникационной сети БВС, обеспечения отказобезопасности и живучести БВС и интеграции жизненного цикла КБО и его подсистем.

По сути, возникла необходимость отказа от сверхцентрализованных БВС и, может быть, от ОС, соответствующих таким БВС, и *поиска оптимальной взаи-*

мосвязи функций (алгоритмов), программ и аппаратуры, составляющих основные ресурсы БВС. Для решения этих проблем необходима новая система взглядов (парадигма) на структуризацию перспективных БВС, основными признаками которых являются распределённость и многопроцессорность (мультимикропроцессорность [13]).

В целом, создание многопроцессорных БВС заставляет обращать внимание на совершенно новые проблемы, а именно – стремление к эффективному решению задач в многопроцессорных ВС должно обязательно сопровождаться соответствующим согласованием структуры алгоритмов, численных методов и архитектуры ВС [15, 18, 19, 27, 33], так как, в противном случае, необходимая эффективность вычислений не может быть достигнута [27]: «возникает *проблема эффективного вложения структуры программы в структуру ВС*, решением которой является такое размещение операторов программы по элементарным процессорам (ЭП), при котором минимизируется время исполнения программы или суммарное время простоя ЭП, занятых исполнением программы, минимизируется время межпроцессорных обменов и обеспечивается их бесконфликтное протекание».

Как показал зарубежный и отечественный опыт [19, 30-33], проблема эффективного вложения структуры программы в структуру ВС принципиально не решаема на основе универсальной платформы ИМА и ИМА 2-го поколения. Наиболее эффективно и оптимально рассматриваемая проблема может быть решена при рациональном сочетании общей координирующей роли системного интегратора авионики ЛА, определяющего общую структуру БРВС, например, в форме распределённой ИУС [34], и использовании вложенных в неё относительно обособленных специализированных вычислительных сред-структур, разрабатываемых в рамках конструкторско-технологических школ, обладающих компетенциями в области бортовых функциональных систем, имеющих достаточно чёткие и «узкие» границы.

Указанные недостатки ИМА и распределённой ИМА, а также современные достижения в области технологий интеграции компонентов технических, человеко-машинных (эргатических) и организационно-технических систем на основе цифровых локальных и глобальных вычислительных сетей привели к возникновению альтернативных подходов (парадигм) и технологий в области *системной интеграции бортового оборудования* [12, 15-20, 23-25, 33]. Одним из таких подходов и является системно-аналитический телеоцентрический подход.

Естественным результатом применения телеоцентирического подхода к системному проектированию вычислительной среды авионики, КБО и КСУ, явилось создание новой концепции-парадигмы федеративно-интегрированной распределённой (сетевой) модульной авионики – «ФИРМА» [19, 33], развивающей соответствующую технологию системной интеграции КБО на основе бортовой локальной вычислительной сети (БЛВС), изложенную в работе [15]. По сути, *речь идёт не об интегрированной в ЦБВ, а о децентрализованной, федеративно-интегрированной модульной БРВС авионики, интеграция ВМ и специализированных вычислительных устройств в которой осуществляется посредством БЛВС, топология которой как в процессе проектирования, так и в динамике функционирования, детерминируется функциональной архитектурой решаемых задач управления ЛА и его целевого применения*. Концепция системной интеграции такой функционально-ориентированной распределённой БЛВС применительно к различным аспектам её проектирования изложена в работах [15, 18, 19, 33], а затем актуализирована и обобщена в работе [19] с учётом новых достижений в области вычислительной техники и авионики.

В соответствии с телеоцентрическим подходом [18, 19] и с учётом введённых выше терминов и определений, *структура* авионики в целом, КБО и КСУ в частности, представляет собой *совокупность согласованных архитектур*. Каждая *архитектура характеризует некоторую независимую точку зрения на структуру*, определённый «срез» структуры, характеризующий тот или иной независимый класс ресурсов, привлекаемых для создания КБО и обеспечения его функционирования, то есть *архитектура любой системы есть отображение её структуры на некоторый класс ресурсов*. Количество таких ортогональных отображений-архитектур общей структуры и соответствующих им классов ресурсов, из которых строится система, и, соответственно, количество архитектур, образующих структуру, определено и ограничено. Соотношение архитектур КБО и соответствующих им классов ресурсов показано на рис. 2.3.

Так как в ТЗ для КБО предписана некоторая обязательная совокупность задач (целей, функций), которую он должен реализовывать в процессе функционирования, то подход к проектированию структуры КБО должен быть телеоцентрическим: от функциональной архитектуры (обеспечивающей реализацию всего множества предписанных обязательных функций), которая в дальнейшем «проецируется» на архитектуру управления информационным обменом (топологию вычислительной среды), к физической (аппаратной) архитектуре и далее к архитектуре энергопластического обеспечения.

Таким образом, архитектуры независимы в плане используемых для их реализации классов ресурсов, но связаны необходимостью решения на их основе предписанного системе множества функций-целей и, соответственно, должны быть согласованы определённым порядком проектирования, влекущим их последовательное формирование по принципу «сверху-вниз»: от целей, функций и задач, предписанных КБО, к упорядоченным в форме архитектур ресурсам, привлекаемым для их реализации.

Указанное *количество основных архитектур является необходимым и достаточным для формирования структуры КБО: оно отражает количество независимых точек зрения (уровней описания, слоёв, страт) на структуру комплекса и соответствующих им классов ресурсов.* Под уровнями описания, слоями и стратами понимаются понятия теории иерархических многоуровневых систем [36]. Уменьшение числа архитектур делает структуру неполной, неоднозначной и практически нереализуемой. Увеличение же – к коррелированности архитектур, не несущей новой информации о структуре комплекса.

Основное значение выявленных на основе стратификации структуры архитектур БК состоит в том, что они позволяют вести его «послойную», последовательную разработку применительно к проблемам различной глубины детализации. При этом сами архитектуры являются первыми объектами разработок на каждом из уровней-слоев, отвечающих этапу концептуального системного проектирования.

Основные архитектуры могут детализироваться в глубину на своём уровне описания (на своём классе ресурсов) путём построения *производных архитектур*. Например, *архитектура алгоритмического обеспечения является детализацией функциональной архитектуры*, а их «материальным» воплощением (дальнейшей детализацией) в кодах программ является *архитектура программного обеспечения*. *Функциональная архитектура, архитектура алгоритмического обеспечения и архитектура программного обеспечения относятся к одному слою-уровню описания структуры.* Количество таких крупных слоёв структуры совпадает с количеством основных архитектур. Независимость основных и производных архитектур, относящихся к разным уровням описания (стратам) структуры, проявляется, например, в том, что каждая из архитектур характеризуется своим языком описания. Вполне очевидно, что языки описания (уровни описания - страты) функций, алгоритмов и программ различны. Абсолютно независимы и языки описания функций, топологии вычислительной среды (коммуникационной сети), аппаратного обеспечения и энергетического обеспечения

рассматриваемой системы. Формализм телеоцентрического подхода и стратифицированного описания применительно к процедуре синтеза структуры КБО поясняется рис. 2.4.

Как видно из рис. 2.4, проектирование архитектур осуществляется с учётом аксиоматических принципов и ограничений, рассмотренных в работах [12, 15, 18, 19, 35] и применительно к эргатическому аспекту проектирования показанных на рис. 2.5. Укажем лишь, что среди принципов фигурируют и применяемые в ИМА общепринятые принципы модульности, открытости архитектур и другие, но уже применительно ко всем архитектурам общей структуры КБО и уровням рассмотрения элементов этих архитектур. В качестве ограничений рассматриваются утверждённые стандарты и принятые по умолчанию правила проектирования, а также ограничения на достигнутый или прогнозируемый (на момент реализации системы «в железе») уровень развития ресурсов. Из множества возможных вариантов архитектуры одной страты выбор оптимальной архитектуры осуществляется на основе локальных критериев выбора – КВ. После выбора оптимальных по локальным критериям архитектур, структура системы, как совокупность этих согласованных архитектур, проверяется на удовлетворение глобальным критериям (например, критериям общей массы, энергопотребления и др.). В случае несоответствия глобальным требованиям процесс проектирования может многократно итерационно повторяться. В целом, учет ограничений на уровень развития энергетических, аппаратных и других ресурсов осуществляется в обратном направлении: по принципу «снизу-вверх».

Иначе говоря, *архитектура* (*топология*) *ВС должна детерминированно определяться архитектурой алгоритмического и программного обеспечения, которая, применительно к ЛА, полностью определяется структурой ММ ЛА и иерархией целевых задач и соответствующих функций управления ЛА как «в большом»* (*планирование и реализация траектории полёта и целевого применения ЛА*), *так и в малом* (*управление ориентацией ЛА в пространстве и обеспечение его устойчивости и управляемости*) - см. рис. 3.2.

В целом, как видно из рис. 3.3, проектирование архитектур осуществляется «сверху-вниз», а учёт ограничений на ресурсы, наоборот, - по принципу «снизу-вверх». Таким образом, в рамках концепции «ФИРМА» топология БРВС детерминируется многоуровневой функциональной архитектурой авионики и КБО (построенной на основе декомпозиции ММ ЛА и формирования дерева целей-функций), а не «навязывается» объекту произвольно, исходя из эвристических соображений о необходимости повышения вычислительной производительно-

сти, интеграции вычислительных ресурсов и унификации модулей, как это предполагается в ИМА. В этом смысле *в концепции «ФИРМА» обеспечивается наилучшее «вложение» алгоритмов и программ в структуру БРВС* [15, 18, 19, 27, 33, 35].

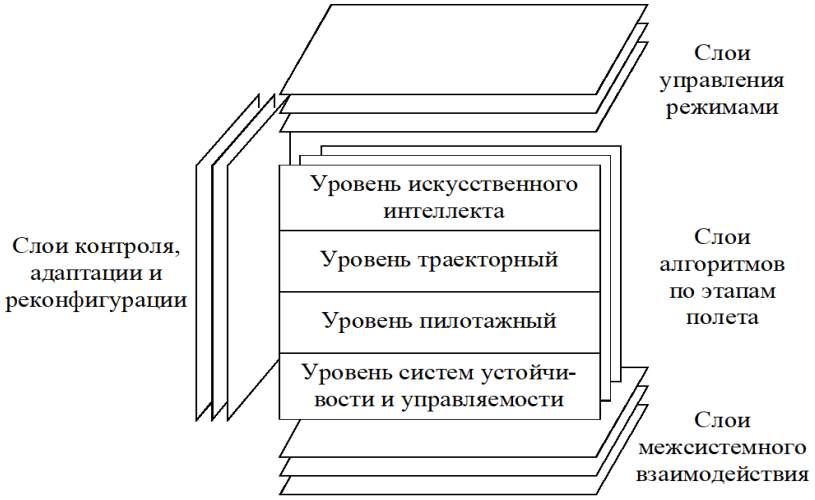


Рис. 3.2. Декомпозиция модели ЛА для построения функциональной архитектуры и иерархии алгоритмов управления полётом

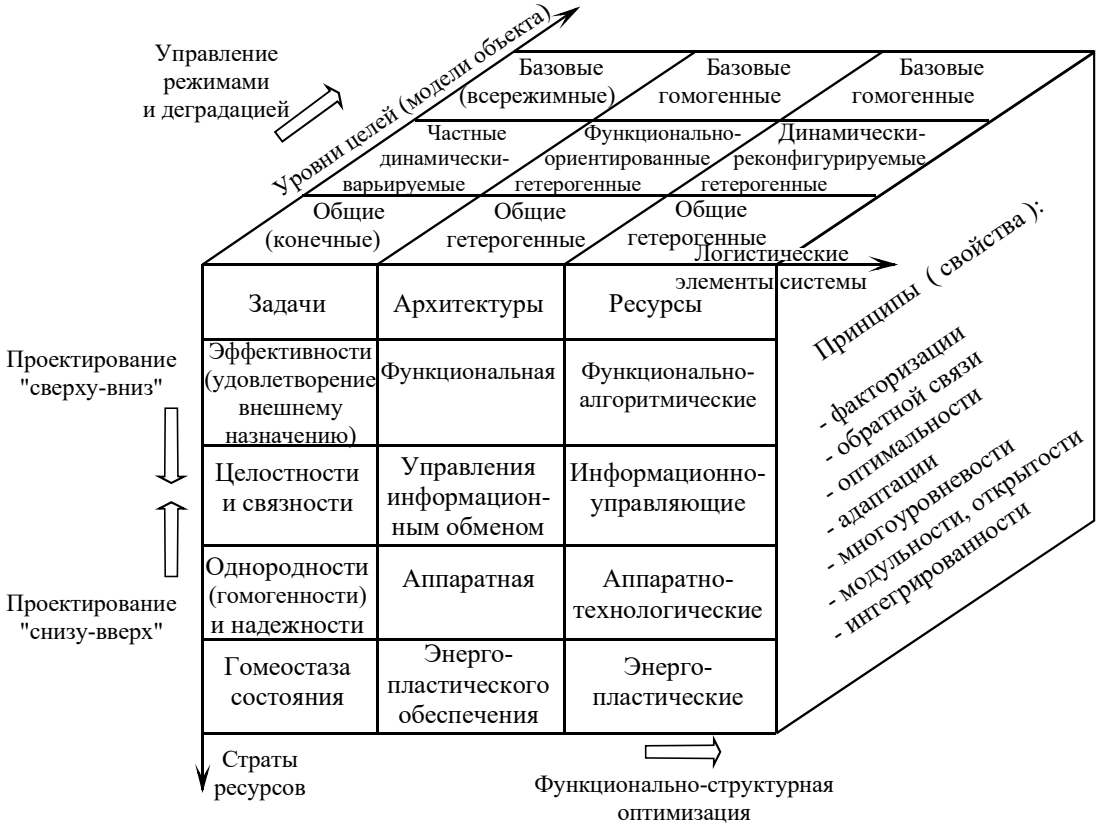


Рис. 3.3. «Гиперкуб» ортогональных отображений, обеспечивающих соответствие архитектур и структуры в целом задачам (целям) синтеза системы и располагаемым ресурсам

Функциональная архитектура является достаточно стабильной и остаётся в основном неизменной в силу неизменности природы объекта управления (например, ЛА) в процессе его эволюции. Изменяются лишь средства её реализации (вычислительно-коммуникационные, аппаратные и энергетические ресурсы). Так, на рис. 3.4 в качестве примера показана укрупнённая функциональная архитектура КБО, полученная на основе описанных выше процедур декомпозиции в середине 90-х годов прошлого века и приведённая в статье [15].

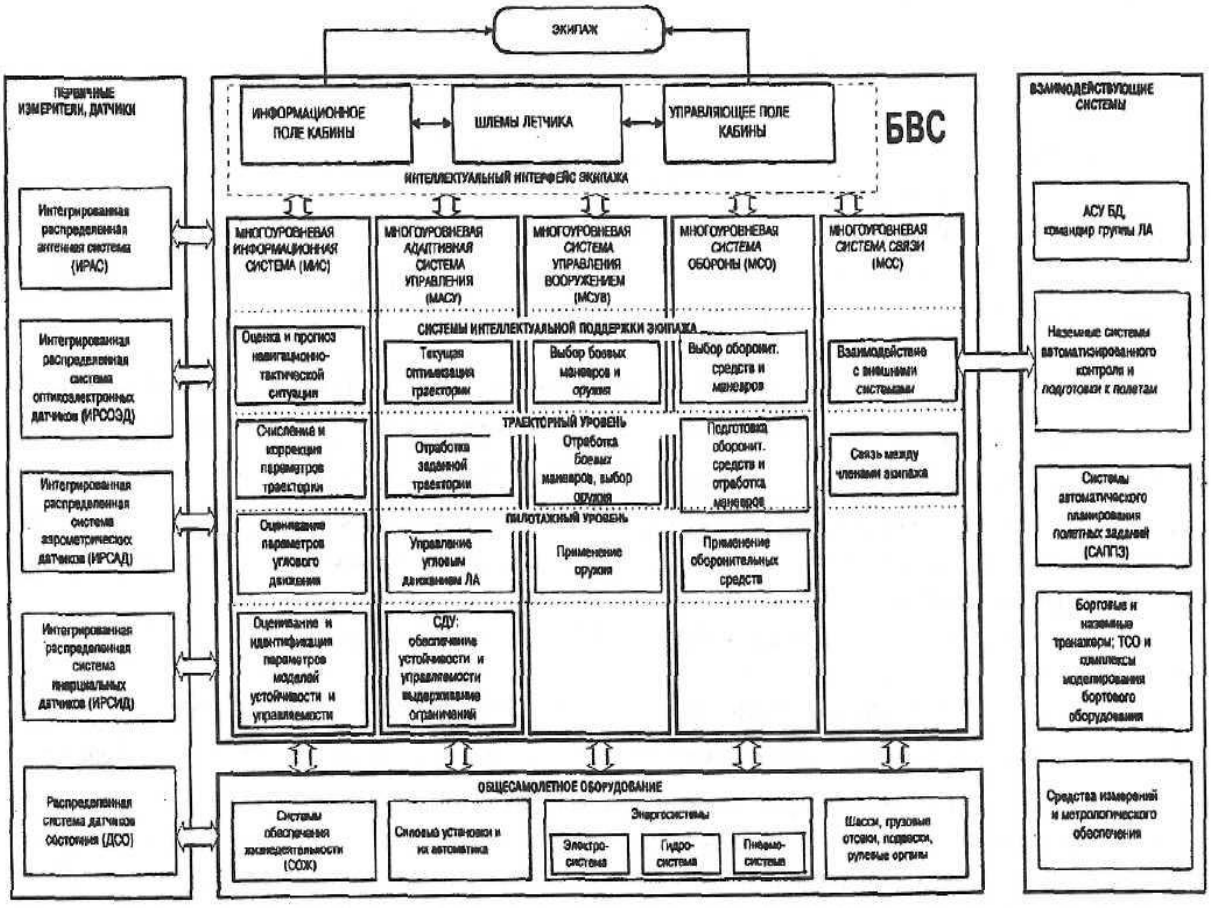


Рис. 3.4. Функциональная архитектура КБО

Она осталась практически неизменной до настоящего времени в силу неизменности основных функций ЛА, как объекта управления и целевого применения. На рис. 3.5 из той же статьи [15] показана синтезированная на основе указанной функциональной архитектуры топология БРВС КБО с учётом естественных (определяемых контурами главных функций) границ подсистем, также вполне соответствующая современным представлениям. Расшифровки аббревиатур понятны из рисунков и приведены в [15]. Как видно из рис. 3.5, топология включает систему вложенных друг в друга виртуальных кольцевых шин (или «решёток», образуемых линейными шинами, полученными при «разрезании»

каждого кольца в одном месте), проходящих как по границам подсистем, так и между подсистемами одного уровня (по горизонтали). Наличие указанных виртуальных шин-колец или шин-решеток является обязательным, так как обеспечивает естественный обмен информацией между соответствующими функциональными модулями модели объекта и процессов управления, декомпозиция которых проиллюстрирована на рис. 3.2. При синтезе аппаратной архитектуры некоторые виртуальные шины могут объединяться в одну физически реализуемую шину.

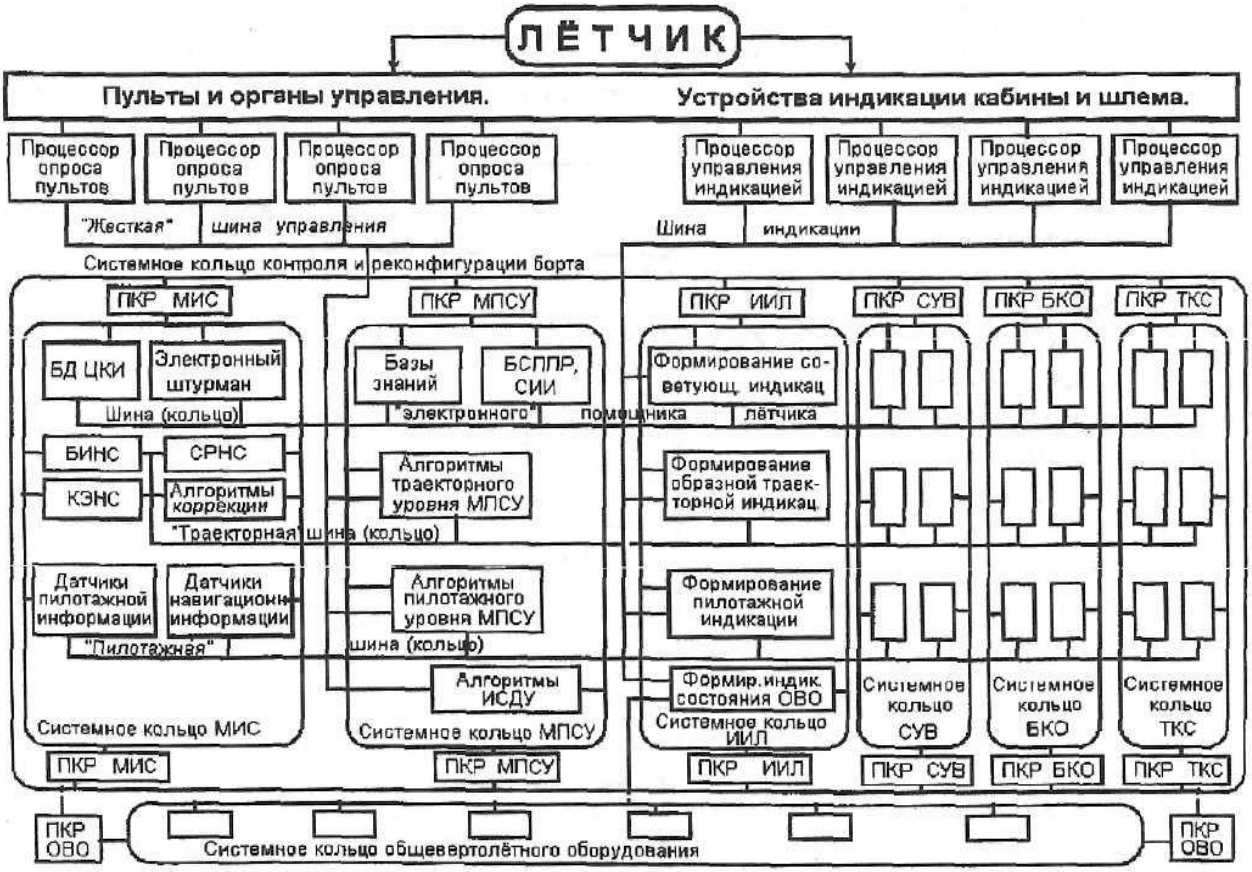


Рис. 3.5. Архитектура (топология) распределённой вычислительно-коммуникационной среды КБО

Аппаратная и энергетическая архитектуры, синтезированные на основе рассмотренных функциональной архитектуры и архитектуры информационного обмена, здесь не приводятся, так как являются предметом конкретных разработок. В частности, в работе [15] предложен вариант аппаратной архитектуры БРВС КБО, в котором конструктивно-функциональные модули, относящиеся к шинам (кольцам) одного уровня иерархии информационного обмена (шина «электронного» помощника летчика, «траекторная шина», «пилотажная шина»), размещаются в общем корпусе соответствующего вычислительного шкафа-крейта. Для

обеспечения заданной в ТЗ надежности и отказобезопасности БРВС таких шкафов-крейтов («резервов») на каждом уровне обработки информации может быть несколько. Причем наибольшее их клоличество должно быть на нижних уровнях управления, реализующих соответствующие функциональные «системы с полной ответственностью» за безопасность полетов ЛА. Например, на уровне интегрированной системы дистанционного управления (ИСДУ), заменяющей механическую проводку управления рулевыми поверхностями ЛА и улучшающей его устойчивость и управляемость, число таких резервов-крейтов может составлять от трех до четырех.

Смысл (и достоинство) телеоцентрического подхода [18, 19] состоит в том, что такой подход образует единую методологическую основу для всех стадий ИЖЦ КБО. На стадии концептуального системного проектирования он выступает в форме системного подхода к проектированию и одновременно как фундаментальный принцип интеграции ресурсов КБО. На стадии же эксплуатации, в динамике функционирования КБО и КСУ в контуре управления – в форме способа согласования в реальном времени взаимодействий разнородных ресурсов (функционально-программных, информационно-коммуникационных, аппаратных, энергетических), образующих эти сложные системы. При этом *системообразующей основой интеграции и согласования взаимодействий ресурсов КБО является цель его функционирования на данном этапе полёта ЛА*.

Приемлемость такого функционального или телеоцентрического подхода (от функциональной архитектуры к топологии БЛВС и далее к аппаратной и энергопластической архитектурам) обеспечивается тем, что разработчики при синтезе структуры системы могут исходить не из ограниченных возможностей ресурсов (что характерно для традиционного структурного подхода и обусловливалось уровнем развития бортовых ЦВМ и соответствующих алгоритмов), а из множества задач, целей и функций, предписанных КБО. Целесообразность подхода объясняется более простой, ясной и рациональной процедурой выбора функциональной архитектуры комплекса, которая часто является единственно возможной и гарантирует реализацию всего множества целей КБО в противовес выбору структуры БРВС КБО эвристическими, комбинаторными методами при структурном подходе.

Обобщая сказанное, можно отметить, что концепция «ФИРМА» развивает концепции ИБК и эргатического ИБК, изложенные в [13, 15, 18, 19, 33], а также взгляды на облик КБО и КСУ беспилотных ЛА, изложенные в [35]. В целом, концепция «ФИРМА» предусматривает [19]:

- синтез структуры авионики, КБО и КСУ на основе регулярной формализованной процедуры формирования составляющих структуру независимых по ресурсам, но взаимообусловленных необходимостью реализации определённых целей, архитектур: функциональной архитектуры и детерминируемых этой архитектурой топологии БЛВС, аппаратной архитектуры и архитектуры энергопластического обеспечения, разрабатываемых последовательно по принципу «сверху-вниз» и учитывающих ограничения на ресурсы по принципу «снизу-вверх»;

- интеграцию бортовой авионики на основе децентрализованной, пространственно распределённой по борту ЛА, многоуровневой, иерархической, гетерогенной по составу универсальных и специализированных вычислительных модулей (ВМ) и КИО, регулярной мультимикропроцессорной БЛВС, топология информационного обмена в которой, строго определяется структурой ММ ЛА и иерархией задач и функций управления полётом и целевого применения. В такой БЛВС отсутствует «центральное», «главное» информационно-управляющее «вычислительное ядро», например, в форме *информационно-управляющей системы - ИУС*. Здесь *под ИУС понимается собственно распределённая сетевая информационно-управляющая среда*, роль которой выполняет указанная БЛВС. По характеру и организации информационного обмена такая БЛВС является асинхронной и в тоже время строго детерминированной. Степень резервирования вычислительных узлов и КИО в такой БЛВС определяется требованиями к их надёжности и отказобезопасности;

- динамическую реконфигурацию (по этапам полёта в соответствии с полётным заданием и с учётом внешних и внутренних ситуаций) разнородных функционально-программных, коммуникационно-сетевых, аппаратных и энергетических ресурсов;

- *разный уровень (глубину) интеграции систем применительно к разным архитектурам*. Например, ИМА и ИМА 2-го поколения можно рассматривать как варианты реализации концепции «ФИРМА» при «полной», всеобъемлющей интеграции аппаратной архитектуры и архитектуры информационного обмена КБО в одном-двух или большем числе «центральных» вычислительных крейтов при условии, что их конструкция определяется базовой функциональной архитектурой. Сама функциональная архитектура в любом случае является федеративно-децентрализованной, так как базовые и оперативно-целевые функционально-ориентированные системы и составляющие их функциональные модули всегда декомпозированы и имеют чёткие границы. Вместе с тем, наиболее полно пре-

имущества концепции «ФИРМА» (в плане децентрализации процедур разработки, отладки, испытаний и организации распределённого вычислительного процесса) могут быть реализованы при использовании рационально децентрализованной, федеративно-интегрированной аппаратной архитектуры и распределённой сетевой архитектуры информационного обмена.

При синтезе архитектур следует учитывать, что на основе анализа типовых задач для всего множества ЛА или, по крайней мере, для класса ЛА, может быть выделено устойчиво повторяющееся подмножество задач, с которым можно связать *унифицированное функциональное ядро* (*УФЯ*) КБО. Разработку алгоритмического и информационного обеспечения для такого ядра можно проводить независимо от разработки конкретного ЛА. С учетом специфики ЛА различных классов, связанной с различием массо-энергетических характеристик и решаемых задач, разрабатываются базовые КБО, адаптированные для классов (семейств) ЛА. При этом режимам (этапам) управления полетом в КБО и в КСУ (являющейся многоуровневой адаптивной прогнозирующей системой управления полётом – МАСУ, МПСУ) соответствуют определенные достаточно *стабильные структуры-стратегии в модели деятельности летчика* [18], а сами режимы работы КБО и КСУ структурно организуются в форме *интегрированных функционально-ориентированных систем* (*ИФОС*), соответствующих, например, этапам взлета, полета по маршруту, маневрирования, посадки и другим. Переход между режимами (структурами-стратегиями) и реконфигурация ИФОС осуществляются по правилам, описанным в [18].

Ресурсную основу базовых *функционально полных*, аппаратно-программных систем, а также формируемых на их основе на время реализации целей конкретного этапа полёта, оперативно-целевых ИФОС, образуют как общие для КБО множества датчиков, сенсоров, исполнительных механизмов (приводов), так и множества специализированных датчиков, входящих в состав федеративных подсистем и доступных по общим для КБО КИО, а также множества универсальных и специализированных ВМ (мультимикропроцессорных «систем на кристалле»), децентрализовано, асинхронно и детерминированно функционирующих под управлением *универсальных бортовых ОС* (как правило, на высших уровнях иерархии управления полётом и применением ЛА), либо *локальных программ управления вычислительными процессами* в специализированных микропроцессорах и *программ управления локализованным информационным обменом* между ними.

Предпосылками перехода к концепции «ФИРМА» являются наблюдаемый повсюду массовый переход на *миниатюрные цифровые* интеллектуальные датчики, и сенсоры, встраиваемые непосредственно в обшивку ЛА («чувствительная обшивка»), вычислительно-преобразующие и управляющие «системы на кристалле», встраиваемые в приводы и в другие компоненты авионики, а также наличие на рынке большого количества хорошо отработанных сетевых КИО и протоколов для сетевых распределённых архитектур, успешно апробированных в коммерческой среде (так называемый COTS-подход: commercial off-the-shelf or commercially available off-the-shelf) и адаптированных для применения в авиации.

Если определять место и роль (уровни) ИМА и ИМА 2-го поколения в рамках концепции «ФИРМА», то «традиционную» ИМА [29, 37-43] применительно к уровню ВМ целесообразно рассматривать как вариант концепции «ФИРМА». При этом целесообразно говорить о «микро-ИМА» в рамках концепции «ФИРМА», имея в виду типоразмер унифицируемых модулей. Центральные вычислительные шкафы-крейты, характерные для ИМА и ИМА 2-го поколения, и реализуемые, например, в форме централизованного аппаратного ядра, в «ФИРМА» потенциально могут вообще отсутствовать.

Основными проблемами разработок авионики в рамках концепции «ФИРМА» должны стать не создание унифицированных централизованных шкафов-крейтов и бортовых суперЭВМ с множеством универсальных сверхвысокопроизводительных ВМ общего назначения, а стандартизация процедур обмена информацией в БРВС «ФИРМА» на основе сетевых высокоскоростных помехоустойчивых детерминированных КИО, создание специализированных «линеек» (рядов) функционально-ориентированных цифровых многопроцессорных ВМ и вычислительно-преобразующих «систем на кристалле», создание цифровых (по характеру выходного сигнала) интеллектуальных датчиков, создание цифровых (по характеру входного управляющего сигнала) исполнительных устройств (приводов) со стандартными интерфейсами информационного обмена. Для критичных (с точки зрения безопасности полёта) мультимикропроцессорных систем особое внимание должно уделяться комплексному (с учётом свойств всех, образующих эти системы разнородных ресурсов – функционально-программных, сетевых информационно-коммуникационных, аппаратных, энергетических) обеспечению свойства их живучести и отказобезопасности в ожидаемых условиях эксплуатации и применения ЛА по назначению с учётом прогнозируемого влияния внешних воздействующих факторов.

Глава 4

Алгебраический формализм стратификации систем и телеоцентрического подхода

Как мы убедились в предыдущих главах, телеоцентрический подход к системному проектированию сложных интегрированных систем и комплексов даже на содержательном уровне является в высокой степени научно обоснованным, логически стройным и хорошо формализованным, так как содержит строго предписанную последовательность действий проектировщика и реализуемых им процедур (правил) системного проектирования, при выполнении которых гарантируется создание системы (комплекса), которая в полной мере и точно отвечает целям разработки, сформулированной концепции и техническим требованиям, отраженным в техническом задании (облике).

Вместе с тем возможность математической формализации того или иного подхода к системному проектированию и телеоцентрического подхода, в частности, может послужить дополнительным аргументом при анализе его научной обоснованности, а также объективности и качества результатов проектирования, полученных при его использовании. Кроме того, в процессе математической формализации могут быть выявлены дополнительные нюансы, которые могут оказаться полезными в практике проектирования и их целесообразно будет учесть в соответствующей прикладной технологии. Результаты математической формализации могут оказаться полезными и для сравнительного анализа различных подходов к проектированию по четким критериям, а также для возможной интеграции подходов и технологий.

Таким образом, математическая формализация подходов к системному проектированию весьма актуальна. В связи с этим уже предпринимались усилия по формализации процедур системного проектирования на основе телеоцентрического подхода, результаты которых отражены в работах [44, 45]. Ниже приведен анализ этих и других результатов.

Для формально-математического описания процедур декомпозиции (анализа) и синтеза структуры системы удобно использовать аппарат современной высшей алгебры [46] и опираться на формально-математические утверждения,

сформулированные на основе общего принципа изоморфизма в первой части книги и в предыдущих главах второй части книги.

В самом общем виде любая система Σ может быть представлена тройкой

$\Sigma = (X, s, Y),$

где s – структура системы, отображающая множество входов X на множество выходов Y, то есть

$s : X \to Y$.

На стадии проектирования система формализуется в виде тройки

$\Sigma = (R, s, C),$

в которой в качестве множества входов R рассматривается множество ресурсов, на основе которых систему предполагается реализовать, а в качестве множества выходов C рассматривается множество целей и соответствующих функций, которыми система должна обладать в соответствии с требованиями технического задания на её разработку. Тогда структура s есть отображение s: $R \to C$.

Наряду с представлением системы в форме структуры-отображения множества ресурсов R на множество целей C, систему Σ можно определить и как *целенаправленное множество* ω_s, являющееся в общем случае бинарным отношением между множествами ресурсов R и целей C (см. рис. 4.1), то есть $\omega_s \subset \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{C}$ и $\omega_s = R \times C = \{(r,c) \in \omega_s: r \mapsto s(r)=c\}$, причем $R \subset \boldsymbol{R}$, $C \subset \boldsymbol{C}$.

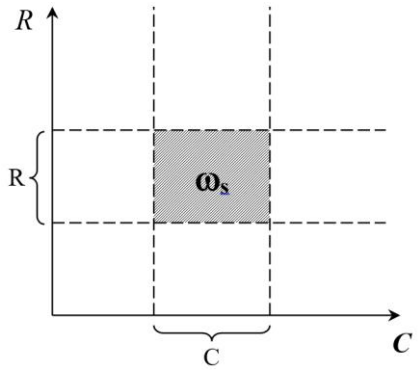


Рис. 4.1. Система, как бинарное отношение

Пусть $\exists$ разбиение $R/\sim = R/\omega_s$ множества R ресурсов на классы эквивалентности по отношению ω_s. Тогда (см. [46]), как показано с помощью коммутативной диаграммы на рис. 4.2, структура s:$R \to C$ допускает *факторизацию* $s = \bar{s} \cdot p$, где p – сюръективно, $\bar{s}$ – инъективно.

Физически *факторизация структуры* s означает *стратификацию* (*расслоение*) системы $\Sigma=(R,s,C)$ на независимые (непересекающиеся) *уровни описания - страты*, соответствующие выявленным при факторизации *независимым классам ресурсов* и соответствующим им классам целей.

$$\begin{tikzcd} R \arrow[rr, "s"] \arrow[dr, "p"'] & & C \\ & R/\omega_s \arrow[ur, "\bar{s}"'] & \end{tikzcd}$$

Рис. 4.2. Факторизация структуры системы

<u>Определение.</u> *Стратификацией системы* $\Sigma=(R,s,C)$ *называется множество* R/ω_s *классов эквивалентности ее ресурсов по отношению* ω_s.

<u>Утверждение.</u> *Стратификация* R/ω_s *индуцирует в структуре* s *системы* $\sum$ *функционально-ориентированные «непересекающиеся» архитектуры* $a \in \bar{s}$.

Действительно, инъективность $\bar{s}$ означает, что каждая страта ресурсов $R_a \subset R/\omega_s$ посредством архитектуры $a \in \bar{s}$ отображается на определенное подмножество целей $C_a \subset C$ такое, что

$$\bigcup_a C_a = C, \ \bigcap_a C_a = \varnothing,$$

то есть *архитектура* a: $R_a \to C_a$ является отображением некоторого класса ресурсов на соответствующий класс целей.

<u>Теорема (о факторизации структуры системы)</u>. *Факторизация* (*разложение*) *структуры* $s = \bar{s}p$ *в композицию сюръективного* p *и инъективного* $\bar{s}$ *отображений позволяет* <u>*гарантированно*</u> *реализовать всю совокупность целей* C *системы* $\sum$ *при независимой разработке архитектур* $a \in \bar{s}$.

<u>Доказательство</u>. Действительно:

а) при выявленной стратификации ресурсов R/ω_s отображение $\bar{s}$ является единственным;

б) если s сюръективно (а это изначально обусловлено требованиями технического задания, так как структура должна «накрывать» всё множество целей, предусмотренных заданием на разработку системы), то и $\bar{s}$ сюръективно, что доказывает утверждение теоремы.

Из теоремы вытекает следующее следствие.

<u>Следствие</u>. *Отображение* (*структура*) $s = \bar{s}p$ *является биективным.*

Действительно:

а) из ограниченности множества R привлекаемых ресурсов и сюръективности его отображения p в себя следует биективность p;

б) из инъективности и сюръективности $\overline{s}$ следует биективность $\overline{s}$;

в) композиция $s = \overline{s}p$ биективных отображений $p{:}R \to R/\omega_s$ и $\overline{s}\ {:}R/\omega_s \to C$ является биективной, причем $s^{-1} = (\overline{s}p)^{-1} = p^{-1}\overline{s}^{-1}$. Существование обратного отображения s^{-1} следует из биективности s.

Таким образом, систему можно разрабатывать как по принципу «снизу-вверх» от ресурсов к целям, так и, наоборот, по принципу «сверху-вниз» - от целей к ресурсам. То есть *с формально-математической точки зрения оба подхода абсолютно эквивалентны и правомерны*. Вместе с тем, в современных условиях, по ряду дополнительных критериев телеоцентрический подход – от целей к ресурсам – оказывается более предпочтительным, так как позволяет существенно упростить и в значительной степени формализовать творческую стадию порождения вариантов структур проектируемой системы. При этом такой подход одновременно гарантирует реализацию всего множества целей, предписанных создаваемой системе её назначением, а множества (классы) привлекаемых для реализации целей системы ресурсов рассматриваются в качестве ограничений, которые в современных условиях являются существенно более мягкими, чем ранее, а для некоторых классов ресурсов иногда снимаются полностью.

Рассмотренное следствие позволяет формально-математически обосновать возможность телеоцентрического подхода к системному проектированию:

- его *приемлемость* обусловлена биективностью структуры s и существованием s^{-1};
- его *целесообразность* обусловлена более простой по сравнению с процедурой построения структуры s (как правило, использование комбинаторных методов) процедурой выбора «*функционально-ориентированной» структуры* s^{-1}, обратной к структуре s;
- биективность структуры s не означает её единственность, но при фиксации конкретной структуры обратная ей структура s^{-1} будет единственной.

Причём, в пользу телеоцентрического подхода говорит и то, что если изначально идти от целей к ресурсам, то *множество допустимых «рациональных» структур* s^{-1} *существенно уже*, чем множество «рациональных» структур s при подходе к проектированию «снизу-вверх» - от ресурсов к целям.

Таким образом, при телеоцентрическом подходе разработчик может исходить не из ограниченных возможностей ресурсов, а из множества задач, целей, функций, предписанных системе.

При телеоцентрическом подходе главным из множества $C = \bigcup_a C_a$ подмножеств целей C_a является подмножество C_{af} и соответствующая ему *функциональная архитектура* a_f, отвечающие за реализацию целей (функций) системы по ее назначению. Синтез (выделение) функциональной архитектуры a_f поясняется коммутативными диаграммами, приведенными на рис. 4.3а, б.

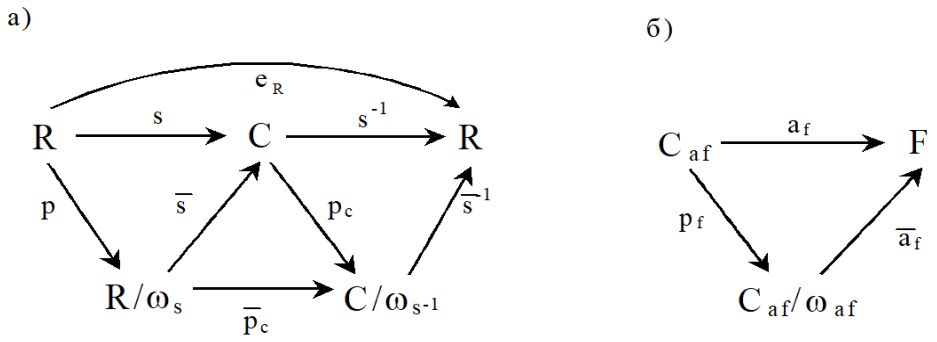


Рис. 4.3. Выделение функциональной архитектуры в структуре системы

Выделение в общей структуре и автономное рассмотрение любой архитектуры, как уже было показано, возможны вследствие факторизации структуры, обусловленной наличием независимых страт-слоёв (классов) ресурсов и индуцированием в структуре системы соответствующих им независимых архитектур. Действительно, из доказанных утверждений следует биективность $\overline{p_c}$, то есть между разбиениями ресурсов R/ω_s и целей C/ω_{s-1} существует взаимно однозначное соответствие, что *позволяет решать задачу синтеза системы раздельно для каждого класса ресурсов и соответствующего класса целей*.

Дальнейшая декомпозиция процедуры синтеза структуры системы связана с факторизацией отображения $\overline{p_c}$ или обратного отображения $\overline{p_c}^{-1}$, сужение которого a_f для подмножества $C_{af} \subset C/\omega_{s-1}$ показано на рис. 4.3б.

Факторизация функциональной архитектуры $a_f = \overline{a_f} p_f$ означает группирование подцелей и соответствующих функциональных ресурсов в классы эквивалентности на более низком уровне детализации, обеспечивающем оконтуривание *базовых* функциональных подсистем проектируемой системы. Так разбиение C_{af}/ω_{af} содержит подмножества целей, обеспечивающие решение групп *однородных задач* системы (например таких, как обработка информации, синтез управлений и т.д.) и требующих для своей реализации определенного *рода* ресурсов из *класса* (множества) функциональных ресурсов $F \subset R$ (принадлежащих всему множеству ресурсов R), привлекаемых для создания системы. Такая последовательная всё более глубокая факторизация множеств целей на вложенные

в них непересекающиеся подмножества позволяет построить *дерево целей* и соответствующее *дерево ресурсов.* На стадии *системного* или, как его называли ранее, *внешнего проектирования* [7], глубина детализации целей, как правило, ограничивается построением совокупности независимых архитектур, образующих структуру системы. Подсистемы, объединённые в эти архитектуры, рассматриваются как неделимые элементы с соответствующими связями. Дальнейшая детализация архитектур и образующих их элементов-подсистем осуществляется на стадии *схемотехнического* (*внутреннего*) *проектирования* [7].

Наряду с удовлетворением внешнему назначению на первый план в настоящее время выступает *качество* или *рациональность* самой структуры $\overline{s}$ системы $\sum = (R/\omega_s, \overline{s}, C)$ и составляющих структуру архитектур (см. рис. 4.3), характеризуемые качественными *показателями* (свойствами) и числовыми *критериями*. Указанные свойства и критерии *анализируются независимо* применительно к любой из архитектур $a \in s$ (по локальным свойствам и критериям сравнения) и к структуре s в целом (по глобальным свойствам и критериям сравнения). Следует также иметь в виду, что в структуре системы глубина интеграции элементов в составляющих ее архитектурах может быть различной: в силу независимости и некоррелированности архитектур какие-то из них могут быть более интегрированными (сильно связными), чем другие.

Таким образом, показано, что телеоцентрический подход, имеющий ясный содержательный смысл и четкое логическое обоснование, допускает и удобное математическое описание и обоснование с использованием языка современной алгебры. Вполне очевиден формально-математический смысл и многих принципов проектирования («руководящих положений»), ставших уже привычными и традиционно используемыми, в том числе и в процедуре телеоцентрического системного подхода. В частности, мы уже останавливались в первой части книги при рассмотрении различных аспектов алгебраической теории систем на формализации принципа модульности, принципа (теоремы) разделения, общего принципа суперпозиции, принципа детерминизма, принципа причинности и других. Ранее многие из этих «принципов» обосновывались, исходя лишь из опыта, эвристических соображений и «здравого смысла», или принимались в качестве не подлежащих сомнению «постулатов». В рамках рассматриваемой алгебраической теории, основанной на едином для нее и единственном общем принципе изоморфизма, эти давно используемые в практике проектирования принципы приобрели строгий математичекий смысл.

Как следует из изложенной выше процедуры математической формализации телеоцентрического подхода и рассмотренной ранее процедуры формализации этого подхода на содержательном уровне, между этими формализациями имеется четкая ассоциативная, по сути, взаимно однозначная связь, своего рода изоморфизм моделей-описаний процедур телеоцентрического системного проектирования, доказывающий соответствие телеоцентрического подхода принципу единственности, а значит и общему принципу изоморфизма. Это следует из аксиоматических оснований и утверждений алгебраической теории систем, рассмотренной в первой части книги.

В качестве еще одного вывода из результатов формализации процедур системного проектирования следует, что критиковавшаяся нами концепция интегрированной модульной авионики (ИМА) фактически декларирует необходимость применения подхода к проектированию «снизу-вверх», так как, по сути, предписывает необходимость начинать проектирование сразу с топологии и аппаратной архитектуры бортовой вычислительной среды, что фактически приводит к необходимости анализа (а практически перебора) необозримого множества вариантов указанных топологий и аппаратных архитектур. При таком подходе не может быть и речи об оптимальном вложении архитектуры алгоритмов и программ, реализующих предписанные системе функции, в архитектуру многопроцессорной распределенной вычислительной среды.

Это является дополнительным убедительным аргументом в пользу телеоцентрического подхода к проектированию, в рамках которого сразу оптимизируются функционально-алгоритмическая и программная архитектуры в соответствии с характером взаимосвязей функциональных модулей в математической модели ЛА, для управления которым синтезируется соответствующая интегрированная сисстема. Количество вариантов таких архитектур минимально и фактически сводится к единственному варианту, опирающемуся на результаты декомпозиции математической модели ЛА [47]. И уже после формирования указанных архитектур под них, фактически взаимно однозначно, формируется топология вычислительно-коммуникационной сети и аппаратная архитектура проектируемой системы, что, во-первых, резко сужает множество возможных вариантов топологий и аппаратных архитектур и, во-вторых, решает проблему оптимального или, по крайней мере, рационального вложения функционально-программной архитектуры в аппаратную архитектуру многопроцессорной вычислительной среды.

В целом, телеоцентрический подход к системному анализу и синтезу (проектированию) сложных систем имеет всестороннее научное обоснование как на

содержательном уровне, так и на уровне строгого формально-математического описания в рамках рассматриваемой алгебраической теории систем. Успешное применение соответствующей технологии в практике системного проектирования сложных систем и комплексов авионики подтверждает достовенрность положенных в его основу научных положений и принципов.

Глава 5

Алгебраический формализм проектирования сложных систем на основе ARP4754A

Рассматривается современный эвристический подход к проектированию сложных технических систем в гражданской авиации на основе *V*-процесса, рекомендуемого руководством ARP4754A. Дается интерпретация и формально-математическое обоснование этого подхода на языке современной алгебры в рамках новой парадигмы в теории систем, развиваемой на основе общего принципа изоморфизма. Обсуждается возможность сопряжения этого подхода с перспективным телеоцентрическим подходом. Доказывается, что эти и любые другие эвристические подходы к проектированию систем должны отвечать условиям теоремы о реализации. Тем самым обеспечивается научное обоснование широко используемого подхода к системному проектированию и предлагается вариант его развития. Изложение ведется на основе результатов соответствующих исследований, опубликованных в работах [48, 49], с некоторыми добавлениями и корректировками.

5.1. Содержательный анализ подхода к системному проектированию на основе руководства ARP4754A

Проблемы проектирования современных технических систем и систем «человек-машина» часто связаны с тем, что многие из таких систем являются *сложными* в смысле соответствующего определения, данного в первой части книги и ранее в [50]. Для сложных систем невозможно построить детерминированную модель, характеризующую взаимно однозначную связь между входами и выходами. Имеющиеся модели не позволяют точно предсказывать поведение системы во всех возможных ситуациях. Вместе с тем многие их проектируемых систем по своему назначению являются критически важными для обеспечения безопасности функционирования соответствующих объектов в рабочих режимах. Такие системы называют *системами с полной ответственностью*. При проектировании систем с полной ответственностью должны быть минимизированы риски возникновения аварийных и катастрофических событий – подобные события должны стать практически невероятными. Особенно это касается систем, относящихся к авиации и к бортовой авионике воздушных судов.

При отсутствии *детерминированных моделей* для обеспечения заданного уровня надежности сложные авиационные системы после разработки должны быть испытаны на безопасность во всех возможных ситуациях полета в ожидаемых условиях эксплуатации. Однако сложность систем не позволяет, во-первых, даже предвидеть все возможные ситуации полета и, во-вторых, выполнить очень большой объем испытательных работ даже для очевидных ситуаций. Помимо стоимости испытательных работ важное значение имеют и сроки завершения испытаний, которые не должны быть слишком большими. В целом, существенно усложняется процесс сертификации сложной системы и получения одобрения для допуска ее к рабочей эксплуатации. Возникает вопрос: как разрешить противоречие между необозримостью объемов, стоимостью и сроками испытаний и сертификации с одной стороны и обеспечением заданного уровня надежности техники и безопасности полетов, с другой стороны.

Разрешение этого противоречия при проектировании сложных систем было найдено не в том, чтобы сертифицировать уже разработанную, готовую и испытанную систему, а в том, чтобы распространить процедуру сертификации и контроля качества на весь процесс разработки с самого его начала – с момента формирования требований к системе и технического задания на ее разработку. При этом проверке подлежат не только процедуры проектирования, но и квалификация персонала, привлекаемого для их выполнения, а также структура и уровень оснащения проектирующей организации необходимым оборудованием и программным обеспечением. По сути, предполагается, что качественно выполненные квалифицированным персоналом в проверенных условиях процедуры проектирования гарантируют высокое качество и надежность разработанной системы.

Для сложных систем такой подход считают рациональным. Он был апробирован на практике, оказался востребованным и был закреплен в нормативных документах, регламентирующих процедуры проектирования и сертификации сложных систем. Одним из главных и системообразующих документов в этой сфере является руководство по разработке гражданских самолетов и их систем ARP4754A [51]. Документ относится к полному циклу проектирования и изготовления самолета и других сложных авиационных систем и *рекомендует* при разработке использовать *V*-модель процесса проектирования и его проверки, показанную на рис. 5.1 [51].

В руководстве ARP4754A рассматриваются процессы обеспечения функциональной надежности и безопасности самолета при его проектировании в общем контексте сертификации. Подход, рекомендуемый в руководстве, по сути, явля-

ется эвристическим, основанным на опыте. Вместе с тем после обсуждения экспертным сообществом, широкой апробации на практике и принятия к практическому руководству большинством разработчиков и сертифицирующих органов подход приобрел весьма высокий уровень объективности.

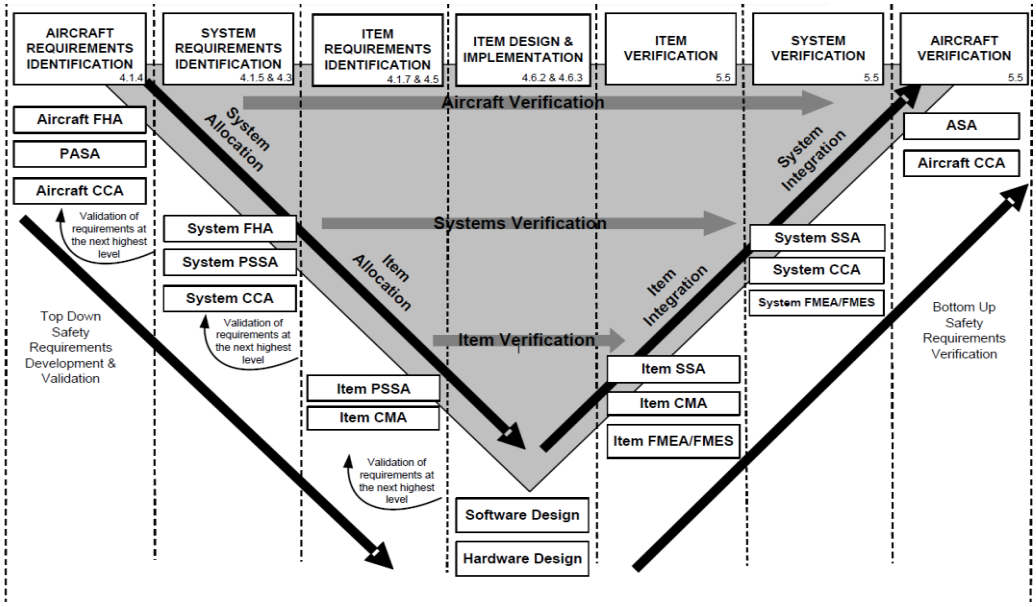


Рис. 5.1. *V*-модель процесса разработки авиационной техники

К настоящему времени документ ARP4754A получил широкое признание и фактически используется в качестве стандарта для разработки и сертификации сложных авиационных систем. Руководство ARP4754A является центральным элементом в системе документов, регламентирующих полный цикл разработки самолета и его сложных систем, имеющих критически важное значение для обеспечения безопасности полетов.

Подход к проектированию, рекомендуемый в ARP4754A, широко используется в практике проектирования, развивается и обсуждается в литературе [52-61]. Вместе с тем остаются вопросы к его научной обоснованности. В данной главе рассматривается и предлагается один из возможных вариантов такого обоснования и интерпретации указанного подхода на языке алгебраической теории систем, основанной на общем принципе изоморфизма.

В предыдущих главах этого раздела второй части книги и ранее в работах [19, 44, 45] рассмотрен и обоснован в качестве перспективного *телеоцентрический* (*целецентрический*) *или целенаправленный подход* к проектированию систем. Этот подход во многом аналогичен подходу к проектированию, рекомендуемому документом ARP4754A: оба подхода предлагают использовать процедуру проектирования «сверху-вниз» - от общих требований к частным и далее к разработке аппаратуры и программного обеспечения, к их интеграции в локальных устройствах. В дальнейшем осуществляется интеграция локальных

устройств в систему в целом. Отличие состоит в том, что целенаправленный подход с самого начала предусматривает декомпозицию (факторизацию) структуры проектируемой системы на строго определенную совокупность независимых, но взаимосвязанных архитектур [19, 44, 45]. Взаимосвязь архитектур определяется целью проектирования создаваемой единой системы, соответствующей строго определенному назначению, то есть предусматривающей реализацию заданных функций. Формализована и предписана последовательность разработки архитектур и их последующей интеграции в структуру системы в целом. Подход, рекомендуемый документом ARP4754A, не акцентирует внимание на структуре и архитектурах системы – их выбирает разработчик на свое усмотрение, но так, чтобы были тщательно проанализированы и детализированы все требования и функции, предписанные системе, и затем эти функции и требования были реализованы как в локальной аппаратуре, так и в системе в целом. В отличие от процедуры проектирования, рекомендуемой документом ARP4754A, целенаправленный подход имеет достаточно строгое математическое обоснование, представленное в главе 4 этого раздела и ранее в работах [19, 44, 45] на основе общего принципа изоморфизма [50, 62], успешно применяемого к решению различных задач в алгебраической теории систем [19, 44, 45, 62-64]. Исследуем возможность применения общего принципа изоморфизма для формализации подхода к проектированию сложных систем, рассмотренного в документе ARP4754A.

5.2. Математическая формализация процедуры проектирования

Даже беглый сравнительный анализ целенаправленного подхода, проанализированного выше и в работах [19, 44, 45], и подхода к проектированию с использованием *V*-процесса [51], рекомендованного документом ARP4754A, показывает, что *V*-процесс также может быть интерпретирован и достаточно убедительно обоснован в терминах общего принципа изоморфизма в теории систем.

В главе 4 этого раздела и ранее в работах [45] показано, что с точки зрения математики подходы к проектированию «сверху-вниз» от целей к ресурсам и «снизу-вверх» от ресурсов к целям эквивалентны, так как, в конечном счете, между целями (требованиями) и ресурсами, на основе которых система реализуется, должно быть обеспечено взаимно однозначное соответствие, то есть, с точки зрения математики, - изоморфизм. Формой проявления такого изоморфного отображения целей системы (и требований к ней) в ресурсы и, наоборот, ресурсов в цели является *структура системы*. Вместе с тем, по ряду критериев и показателей качества, например, таких как уровень интеграции ресурсов, эффективность и стоимость их использования в структуре системы, оптимальность вложения функционально-программной архитектуры в аппаратную архитектуру более предпочтительным является проектирование «сверху-вниз» - от целей

(требований) к ресурсам. Как показано в предыдущей главе и в работах [19, 44, 45], при таком проектировании упрощается формирование самой структуры и составляющих ее архитектур. Формализация целенаправленного подхода к системному проектированию на языке алгебры продемонстрирована выше и представлена в работах [44, 45]. Однако формализация на языке алгебры подхода к проектированию с использованием *V*-модели, рекомендованной документом ARP4754A, будет несколько другой. Поясним это.

Основным результатом новой парадигмы в алгебраической теории систем, основанной на общем принципе изоморфизма, является *теорема о реализации* изоморфизма композицией отображений, формулировка и доказательство которой приведены в первой части книги и в работах [50, 62]. Для компактности изложения приведем здесь формулировку теоремы без доказательства, опираясь на рис. 5.2.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & Y \\ & Z \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

Рис. 5.2. Коммутативная диаграмма отображений к теореме о реализации

<u>Теорема о реализации</u>: Если найдется модель $f{:}X\to Y$ изоморфно отображающая данные X в данные Y и существуют отображения $g{:}X\to Z$ и $h{:}Z\to Y$ такие, что выполняется композиция $f=hg$, то

а) с точностью до модели-изоморфизма f данные X и Y являются точными и полными;

б) модель f минимальна и единственна в том смысле что, если найдется другая модель-изоморфизм f^*: $X\to Y$, объясняющая те же данные, то существует и единственно изоморфное отображение φ: $f^*\to f$ такое, что выполняются соотношения $f=\varphi f^*$ и $f^*=\varphi^{-1}f$, то есть отображения f и f^* изоморфны между собой: $f\cong f^*$;

в) отображения h и g в композиции $f=hg$ являются отображениями-изоморфизмами с точностью до изоморфизма f.

Правила и примеры определения обратных для отображений, фигурирующих в коммутативной диаграмме на рис. 5.2, проиллюстрированы в первой части книги и в работе [62]. Теорема о реализации, по сути, повторяет формулировку общего принципа изоморфизма, приведенную в первой части книги и в работе [50]. Главный математический результат, заключенный в теореме о реализации,

состоит в том, что неизоморфные по отдельности, вне коммутативной диаграммы отображения h и g обладают всеми свойствами изоморфных отображений внутри коммутативной диаграммы, то есть имеют в этой коммутативной диаграмме единственные обратные h^{-1} и g^{-1} и являются, таким образом, изоморфизмами с точностью до безусловного изоморфизма f. Отображение f является изначально изоморфным даже вне коммутативной диаграммы и поэтому оно названо безусловным изоморфизмом. Композиция $f=hg$ может оказаться неединственной: может найтись и другая композиция $f=h'g'$ других отображений h' и g', реализующая тот же самый изоморфизм f. Отображения h' и g' также будут удовлетворять всем условиям теоремы о реализации и у этих отображений внутри соответствующей коммутативной диаграммы будут существовать свои единственные обратные отображения $(h')^{-1}$ и $(g')^{-1}$.

С точки зрения нашего исследования неважно, какие *алгебраические структуры* подразумеваются, когда мы говорим о «данных» X и Y на рис. 5.2. Важно, что отображение f взаимно однозначно «пересчитывает» элементы и правила работы с ними из алгебраической структуры X в элементы и правила работы с ними в алгебраической структуре Y. В терминах этой работы под «данными» X будем понимать множество целей системы (требований к ней) и отношений между ними, - например, отношения координации и субординации (соподчиненности) требований и целей. Под «данными» Y понимается множество ресурсов (программных, аппаратных и других) и отношений между ними, используемых для реализации указанных целей. В качестве примеров отношений на множестве ресурсов можно указать отношения вложенности ресурсов и взаимосвязей между однородными ресурсами (например, функционально-аппаратные модули вкладываются в некоторые шкафы-крейты, крейты объединяются линиями связей в резервированную интегрированную систему). Под «данными» Z будем понимать некоторую алгебраическую структуру, характеризующую вложение множества целей-требований X в множество локальных ресурсов Z и правила работы с «локальными вложениями» в этой общей алгебраической структуре. Тогда отображение g характеризует процедуру декомпозиции глобальных целей X (целей-требований самого верхнего уровня) на локальные цели, то есть построение дерева целей, а также правила их вложения в локальные ресурсы. Отображение h интерпретирует процедуру интеграции (объединения) локальных ресурсов Z, с вложенными в них локальными целями, в общее множество глобальных ресурсов (ресурсов верхнего уровня) Y, реализующих системные цели в целом (цели верхнего уровня).

С учетом изложенного математического формализма теоремы о реализации и его содержательной интерпретации в терминах нашей работы *V*-процесс проектирования и сертификации сложных систем, рекомендованный руководством ARP4754A, можно отобразить в виде вложенных коммутативных диаграмм, показанных на рис. 5.3.

На рис. 5.3, как и на рис. 5.1, показано, как на нисходящей ветви *V*-процесса из исходного множества X целей-требований верхнего уровня формируются подмножества локальных целей $X_1 \ldots X_N$ все более низкого уровня с учетом обеспечения сквозной прослеживаемости целей по принципу «сверху-вниз». Это исключает потерю целей и с помощью локальных отображений $g_1 \ldots g_N$ обеспечивает реализацию каждой цели в каком-либо «своем» локальном ресурсе $Z_1 \ldots Z_N$. На восходящей ветви *V*-процесса локальные подмножества ресурсов $Z_1 \ldots Z_N$ с реализованными в них частными целями интегрируются в ресурсы все более верхних уровней $Y_1 \ldots Y_N$ посредством объединяющих отображений $h_1 \ldots h_N$. При этом *на каждом уровне* рассмотрения отображения «цели - ресурсы» *должен обеспечиваться свой локальный изоморфизм* $f_1 \ldots f_N$ между целями $X_1 \ldots X_N$ и ресурсами $Y_1 \ldots Y_N$ соответствующего уровня, вплоть до целей-требований X и ресурсов Y самого верхнего, системного уровня.

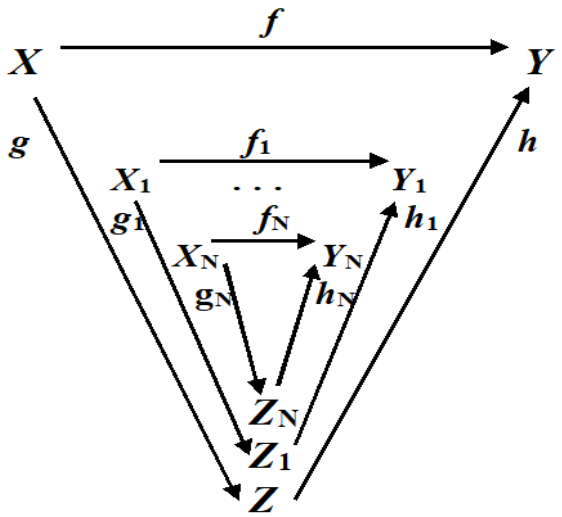


Рис. 5.3. Коммутативная диаграмма для *V*-процесса

Руководство ARP4754A не описывает саму процедуру декомпозиции целей-требований, то есть не содержит процедуры формирования локальных отображений $g_1 \ldots g_N$, но накладывает ограничения на качество выполнения этих процедур, обеспечивает прослеживаемость целей-требований при переходе на локальные уровни и содержит критерии оценки качества декомпозиции. Это же относится и к процедурам $h_1 \ldots h_N$ интеграции локальных ресурсов в общую процедуру h формирования системных ресурсов Y, отвечающих целям X создания си-

стемы в целом. Руководство ARP4754A требует, чтобы на каждом уровне рассмотрения системы композиция локальных отображений h_i и g_i давала локальный изоморфизм $f_i=h_i g_i$, $i=\overline{1...N}$, то есть обеспечивала взаимно однозначное соответствие между целями-требованиями и ресурсами соответствующего уровня.

Кроме того, одной из главных задач, решаемых документом ARP4754A применительно к процессу системного проектирования, является выполнение *принципа суперпозиции,* являющегося следствием из теоремы о реализации и общего принципа изоморфизма (см. первую часть книги и [50]). Суть принципа суперпозиции в контексте этой статьи состоит в том, чтобы суперпозиция или, другими словами, некоторая «сумма» (суммирование будем обозначать знаком $\oplus$) отображений $g_1 \ldots g_N$ давала общее отображение $g=g_1 \oplus g_2 \oplus \cdots \oplus g_N$ и обеспечивала его аддитивность, «сумма» отображений $h_1 \ldots h_N$ давала общее отображение $h=h_1 \oplus h_2 \oplus \cdots \oplus h_N$, «сумма» отображений-изоморфизмов $f_1 \ldots f_N$ давала общий изоморфизм $f= f_1 \oplus f_2 \oplus \cdots \oplus f_N$ между целями-требованиями X и ресурсами Y системы в целом.

Важная особенность и методологическая, мировоззренческая идея системного проектирования состоит в том, что реализация изоморфизма f, то есть создание сложной системы (самолета или авиационной системы в целом) *не может быть осуществлена напрямую, непосредственно и мгновенно*, так как этот изоморфизм в явной форме не задается и должен обеспечиваться по результатам системного проектирования. Это означает, что *изоморфизм f может быть реализован только опосредованно - путем осуществления процесса проектирования*, то есть *через реализацию* в форме такой композиции процессов-отображений h и g, что $f=hg$. В этом и состоит смысл как теоремы о реализации и общего принципа изоморфизма [50, 62], так и рекомендуемого документом ARP4754A V-процесса проектирования сложных систем. По теореме о реализации отображения h и g имеют в коммутативной диаграмме на рис. 5.3 единственные обратные h^{-1} и g^{-1}. Это означает, что проверку качества проектирования сложной системы можно провести и в обратном порядке: от организованных в систему ресурсов Y к локальным ресурсам Z (с реализованными в них локальными целями) и далее к системным целям-требованиям X. Если другая проектная организация реализует изоморфизм f между целями и ресурсами системы с помощью композиции $f=h'g'$ других отображений h' и g', то эти отображения также должны соответствовать требованиям теоремы о реализации и V-модели проектирования, рекомендованной документом ARP4754A.

По своей сути отображения g и h представляют собой, соответственно, *обязательные процедуры анализа и синтеза сложной системы,* которая в результате такого системного проектирования становится *простой системой* с точностью

до изоморфного отображения f между целями и ресурсами в смысле определения, данного в первой части книги и в работе [50]. Как следует из этого определения, простая система является детерминированной и *ее поведение полностью предсказуемо*. То есть, руководствуясь в процессе проектирования документом ARP4754A, разработчик создает простую, детерминированную систему, поведение которой на стадии эксплуатации предсказуемо. Целями реализация процедур проектирования, рекомендуемых руководством ARP4754A, как раз и является создание полностью предсказуемых систем. Как следует из рассмотренной математической формализации, указанные цели вполне реализуемы.

Таким образом, процедуры *анализа* g и *синтеза* h – это две необходимые процедуры *реализации* общей процедуры f проектирования или *решения проблемы создания любой системы.* Процедура f *не может «работать» непосредственно, напрямую*: по X *нельзя сразу создать* Y посредством f, так как f, характеризующее структуру системы, еще неизвестно и просто отсутствует (ввиду отсутствия или, точнее, *невозможности «мгновенного» назначения готового системного ресурса* (по сути, структуры системы) Y, *точно отвечающего требуемой системной цели* X). Поэтому реализуется сначала промежуточная процедура g *системного анализа* проблемы проектирования и создается промежуточное состояние *для* Y *в форме* Z, которое затем с использованием *процедуры синтеза* h *преобразуется в окончательное «цельное» состояние* (*в структуру*) *системного ресурса* Y. Промежуточное, но необходимое состояние ресурсов Z *это определенным образом декомпозированное состояние общесистемных ресурсов* Y. Ясно, что *реализация* $f=hg$ является *необходимой и достаточной* для формирования по требуемым системным целям X соответствующих системных ресурсов Y ($Y= f X$, $Z= gX$, $Y=hZ=hgX$).

Однако указанная реализация является *не единственной*, так как даже при фиксированных f и g отображение h может быть эпиморфным [50] и уже поэтому не единственным. Более того, само f тоже может быть не единственным, а значит не единственным является и Y при одном и том же X (см. рис. 5.4): например, возможно существование отображения-реализации $f'=h'g'$ такого, что $Y'= f'X$, $Z'=g'X$, $Y'=h'Z'=h'g'X$. Таким образом, вариантов изоморфной «конструкции» f, реализующей посредством композиции $f=hg$ одни и те же требования X *может быть некоторое множество и это создает возможность и предпосылки для творчества при проектировании системы.*

Особо отметим, что, несмотря на указанную множественность вариантов «эвристического» выбора конструкции $f=hg$, все эти варианты строго формально отвечают теореме о реализации: в рамках любого *фиксированного варианта* должна выполняться композиция-реализация $f=hg$, в которой для h и g внутри

соответствующей зафиксированной коммутативной диаграммы существуют единственные обратные h^{-1} и g^{-1}, позволяющие по Y *единственно возможным способом и однозначно восстановить* X.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f'"] \arrow[dr, "g'"'] & & Y' \\ & Z' \arrow[ur, "h'"'] & \end{tikzcd}$$

Рис. 5.4. Иллюстрация не единственности отображения f

Все это, с одной стороны, накладывает требования на процедуры проектирования в части соответствия строго определенным «канонам», предписанным теоремой о реализации, и, с другой стороны, допускает в границах этих канонов «полную свободу» проектирования. Следование указанным канонам обеспечивает создание простой, детерминированной, полностью предсказуемой в эксплуатации системы.

Во введении к главе мы уже отмечали сходство и различие телеоцентрического (целенаправленного) подхода к системному проектированию (см. также [19, 44, 45]) и подхода, рекомендуемого документом ARP4754A. Как следует из главы 4 этого раздела и работ [44, 45] применительно к телеоцентрическому подходу и проведенной здесь математической интерпретации подхода, описанного в руководстве ARP4754A, соответствующие им процедуры системного проектирования описываются тем или иным V-процессом, характеризуемым некоторыми отображениями *анализа* g и *синтеза* h, образующими композицию $f = hg$, и *по-другому просто не могут быть реализованы*. Этот объективный факт следует из теоремы о реализации, которая *не только объясняет существование и достаточность, но и предписывает необходимость* реализации именно V-процессов при проектировании систем в рамках любого подхода. Таким образом, *рожденные на основе обобщения эмпирического опыта эвристические подходы, использующие V-процессы проектирования, не случайны и имеют единую глубинную математическую основу, опирающуюся на теорему о реализации, прямо предписывающую разработчикам поступать именно так и не иначе.* Более того, поступать иначе невозможно – теорема о реализации запрещает. Ее игнорирование может привести к созданию недетерминированных, а иногда и вообще нереализуемых систем (самолет «не полетит»), эксплуатация которых может привести к непредсказуемым последствиям.

Таким образом, математическая интерпретация (формализация) подхода к системному проектированию, предписанному документом ARP4754A и предусматривающего реализацию соответствующего V-процесса, завершена. В связи

с этим возникает вопрос о соотношении этого подхода и рассмотренного выше телеоцентрического подхода, а также об их взаимосвязи как на содержательном, так и на формально-математическом уровнях описания. Эта взаимосвязь рассматривается ниже.

5.3. Математическая формализации взаимосвязи подходов к проектированию

Формально-математический анализ, проведенный в [44, 45] и в настоящей главе, показывает, что телеоцентрический подход и подход, рекомендуемый документом ARP4754A, можно совместить в рамках некоторой объединенной, общей процедуры проектирования. На рис. 5.5 с учетом обозначений, принятых в [44, 45] и в предыдущей главе 4, проиллюстрирована такая объединенная процедура системного проектирования.

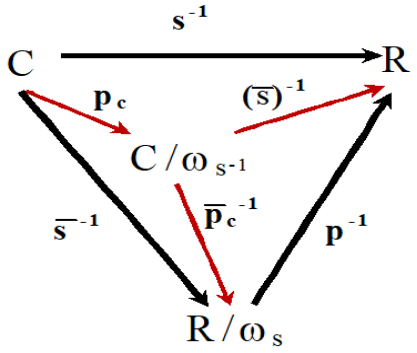


Рис. 5.5. Объединенная процедура системного проектирования

В начале в соответствии с телеоцентрическим подходом, описанным здесь в главах 2-4 и в работах [19, 44, 45], осуществляется факторизация (декомпозиция, разбиение, стратификация) системных целей C посредством отображения p_c и формирование некоторого множества $C/\omega_{s\text{-}1}$ непересекающихся *классов целей* в рамках бинарного отношения $\omega_{s\text{-}1}$ между множествами целей C и привлекаемых для их реализации ресурсов R. На рис. 5.3 это соответствует формированию множества локальных целей $X_1 \ldots X_N$. Отличие состоит в том, что процедура формирования локальных целей $X_1 \ldots X_N$ в рамках рекомендуемого документом ARP4754A V-процесса проектирования никак не регламентирована, за исключением того, что множество целей $X_1 \ldots X_N$ должно быть полным в том смысле, что ни одна из целей, входящих в X, не должна быть потеряна. При телеоцентрическом подходе процедура факторизации целей p_c строго формализована и гарантирует отсутствие потерь целей при декомпозиции их множества C. Кроме того, факторизация обеспечивает такое разбиение множества системных целей C на множество непересекающихся классов $C/\omega_{s\text{-}1}$ целей, что каждый класс целей по-

средством своей архитектуры из структуры $\overline{p}_c^{-1}$ отображается на свой класс ресурсов из множества классов R/ω_s. А уже непересекающиеся классы ресурсов из множества R/ω_s и соответствующие им архитектуры из отображения $\overline{p}_c^{-1}$ посредством «интегрирующего» отображения p^{-1} отображаются на множество R общесистемных ресурсов, которому отвечает общая изоморфная структура системы s^{-1} (см. главу 4 и работы [44, 45]). Таким образом, строго определенная последовательность эквивалентных преобразований позволяет практически полностью формализовать процедуру системного проектирования и обеспечить создание простой, детерминированной, полностью предсказуемой системы, в смысле определения, данного в первой части книги и в [50]. При этом вначале используется телеоцентрический подход для разбиения (факторизации, декомпозиции) по формализованным правилам, определяемым отображением p_c, множества системных целей C (см. предшествующие главы 2-4 и работы [19, 44, 45]), а затем применяется рекомендуемый документом ARP4754A V-процесс проектирования, характеризуемый на рис. 5.5 отображениями $\overline{p}_c^{-1}$ и p^{-1}.

В качестве заключения по главе отметим, что, в целом, нами показано: V-процесс проектирования сложных систем, рекомендуемый руководством ARP4754A, как и целенаправленный подход к проектированию, имеет не только ясный содержательный смысл и логическое обоснование, но и допускает удобное и строго формализованное описание на языке современной алгебры и обоснование с точки зрения общего принципа изоморфизма в математической теории систем. Доказано, что любой подход к системному проектированию должен отвечать условиям теоремы о реализации. Тем самым обеспечивается научное, формально математическое обоснование широко используемого подхода к проектированию, рекомендуемого документом ARP4754A, что обеспечивает правомочность его использования и в дальнейшем. Кроме того, имеется возможность развития используемого подхода к системному проектированию, регламентированного руководством ARP4754A, путем его дополнения некоторыми строго формальными правилами проектирования, разработанными в рамках телеоцентрического подхода.

Из рассмотренных здесь, в главе, результатов и, в целом, из результатов, полученных во втором разделе, посвященном формализации проблемы системного проектирования, то есть формализации слабо структурированной сложной проблемы, в качестве обобщения следует вывод: давно используемый на практике «системный подход» к решению сложных, слабо структурируемых проблем, со-

держащий в качестве обязательных процедуры «системного анализа» и «синтеза», имеет вполне объективную научную основу, опирающуюся на математический формализм реализации изоморфизма-цели «Проблема-Решение»

$$F{:}\Pi \rightarrow P \tag{5.1}$$

композицией отображений

$$F = A \cdot C\,, \tag{5.2}$$

где A - «анализ» и C - «синтез». Этот формализм прямо следует из общей формулировки теоремы о реализации, приведенной выше в параграфе 5.2 и в первой части книги. То есть в данном случае справедлива коммутативная диаграмма, представленная на рис. 5.6.

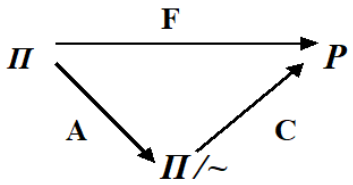


Рис. 5.6. Коммутативная диаграмма «системного подхода» к решению сложной проблемы

В диаграмме *П/~* - фактор-множество непересекающихся классов подпроблем, составляющих проблему П. Указанное фактор-множество формируется в результате действия отображения «анализа» *A* и формализует разбиение стоящей сложной проблемы на небольшие подпроблемы-части, решение каждой из которых дает свой частный результат. Частные результаты образуют фактор-множество классов решений *P/~* по аналогии с процедурой факторизации, рассмотренной в главе 4 на рис. 4.2, 4.3. Интеграция частных решений дает общее решение стоящей проблемы. Решение каждой частной проблемы может потребовать привлечения каких-либо ресурсов *R*. В этом случае процесс решения проблемы может быть проиллюстрирован коммутативной диаграммой, аналогичной диаграмме, показанной на рис. 5.5.

Таким образом, если сложная слабо структурируемая проблема не решается напрямую, «в лоб», посредством подбора «очевидного», тривиального изоморфизма (5.1), то ее необходимо решать «по частям» косвенно, «окольным» путем реализации «неочевидного», нетривиального изоморфизма вида (5.1) композицией отображений (5.2) «анализа» и «синтеза», образующих соответствующий *V*-процесс решения рассматриваемой сложной проблемы. Построенный на *изоморфизме-цели* «Проблема-Решение» *V*-процесс, образует «*систему* решения проблемы» в соответствии с определениями выделенных курсивом понятий, данными в первой части книги.

Вообще *теорема о реализации изоморфизма композицией отображений позволила открыть универсальный математический, точнее алгебраический, механизм, очень часто используемый природой при формировании и в процессах эволюции различных систем косной и живой природы, а также искусственных целенаправленных систем*, создаваемых человеком для удовлетворения своих потребностей и нужд. Этот открытый в рамках рассматриваемой «математичесой философии систем» алгебраический «механизм» имеет весьма важное практическое значение для развития «техносферы» и важнейшее мировоззренческое значение для понимания «движущих сил» процессов порождения и эволюции различных систем Природы. В настоящее время нет никаких сомнений, что предстоящее развитие алгебраической теории систем, основанной на общем принципе изоморфизма, в приложении к естественным системам будет таким же успешным, как в приложении к целенаправленным искусственным системам.

На этом завершим изложение прикладных технологий, иллюстрирующих применение алгебраической теории систем, основанной на общем принципе изоморфизма, к решению самых разных практических задач и слабо структурированных проблем в области системного анализа, обработки информации, синтеза управлений и системного проектирования авионики.

Литература к Разделу 2 Части 2:

1. *Буков В.Н.* Вложение систем. Аналитический подход к анализу и синтезу матричных систем. Калуга: Изд-во научн. литературы Н.Ф. Бочкаревой, 2006. 720с.
2. *Кулабухов В.С.* Принцип изоморфности в задаче реализации и его приложения к анализу свойств систем управления // В сборнике: XII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014. Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН. 2014. С. 438-448.
URL: http://vspu2014.ipu.ru/prcdngs (дата доступа - 15.03.2018 г.)
3. *Кулабухов В.С.* Изоморфные наблюдатели состояния и робастная фильтрация сигналов систем // Радиотехника. 2017. №8. С. 50-55.
4. *Кулабухов В.С.* Синтез регуляторов для следящих систем на основе принципа изоморфности // Мехатроника, автоматизация, управление. 2017. Том 18, №8. С. 507-515.
5. URL:https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%98%D0%BD%D0%B6%D0%B5%D0%BD%D0%B5%D1%80%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D0%B4%D0%B5%D0%BB%D0%BE (дата доступа - 23.03.2023 г.)
6. *Ожегов С. И., Шведова Н. Ю.* Толковый словарь русского языка / Российская академия наук. Институт русского языка им. В. В. Виноградова. 4-е изд., дополненное. М.: Азбуковник, 1999. 944 с.
7. *Николаев В.И., Брук В.М.* Системотехника: методы и приложения. Л.: «Машиностроение», 1985.
8. URL:http://www.sebokwiki.org/wiki/Guide_to_the_Systems_Engineering_Body_of_Knowledge_%28SEBoK%29 (дата доступа - 23.03.2023 г.)
9. URL: https://sebokwiki.org/wiki/Systems_Engineering_%28glossary%29 (дата доступа - 23.03.2023 г.)
10. URL:https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B5%D0%BA%D1%82%D0%B8%D1%80%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%B5#.D0.A1.D0.B8.D1.81.D1.82.D0.B5.D0.BC.D0.BD.D0.BE.D0.B5_.D0.BF.D1.80.D0.BE.D0.B5.D0.BA.D1.82.D0.B8.D1.80.D0.BE.D0.B2.D0.B0.D0.BD.D0.B8.D0.B5 (дата доступа - 23.03.2023 г.)
11. URL:https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%BD%D1%8B%D0%B9_%D0%B8%D0%BD%D1%82%D0%B5%D0%B3%D1%80%D0%B0%D1%82%D0%BE%D1%80 (дата доступа - 23.03.2023 г.)

12. *Буков В.Н., Кулабухов В.С., Косьянчук В.В., Рябченко В.Н., Горюнов С.В., Наумов А.И.* Основы интеграции систем авиационного оборудования. Учебное пособие. М.: Изд. ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского. 2007. 338с.
13. *Красовский А.А., Ермилов А.С.* Боевое применение и эффективность пилотажно-навигационных комплексов летательных аппаратов. М: Изд. ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского, 1989. 288 с.
14. *Brinkman D.* Modular Avionics – The key to the Future Defense Systems International, 1993, p.265-267.
15. *Кулабухов В.С.* Вариант облика и архитектур эргатического интегрированного бортового комплекса летательных аппаратов // Радиотехника. 1996. №6. С. 65-69.
16. *Буков В.Н., Кулабухов В.С.* Телеоцентрический подход к разработке аэрокосмических систем // Пилотируемые полеты в космос. Третья международная научно-практическая конференция. Тезисы докладов. Звёздный городок, Московской области, 11 -12 ноября 1997г., с. 40-42.
17. *Кулабухов В.С.* Некоторые результаты теории интеграции бортового оборудования аэрокосмических эргатических систем // Третий Международный аэрокосмический конгресс. IAC'-2000: Сборник тезисов, Москва, 23-27 августа 2000г. М: Международный фонд попечителей Московского государственного авиационного технологического университета им. К.Э. Циолковского; ООО «Научно-техническая компания «Аффинор»; Издательство СИП РИА, 2000. – 360 с.
18. *Кулабухов В.С.* Принципы оптимизации взаимодействий экипажа с системами интеллектуальной поддержки в телеоцентрических эргатических системах управления полетом // Авиакосмическое приборостроение. 2008. №5. С. 24-41.
19. *Кулабухов В.С.* Федеративно-интегрированная распределённая модульная авионика // Авиакосмическое приборостроение. 2015. №12. С. 11-31.
20. *Кулабухов В.С.* Инновационные технологии разработки комплексных систем дистанционного управления для перспективных вертолетов // Материалы Девятой Всероссийской научно-практической конференция «Перспективные системы и задачи управления». 2014. С.227-237.
21. *Александров В.В., Кулабухов В.С., Кулешов С.В., Федунов Б.Е., Чунтул А.В.* Эргономика в системе проектирования и испытаний вертолетов и тренажеров «Ми»: Том 3. Технологии интеллектуальной поддержки экипажей вертолётов / Под ред. Федунова Б.Е., Чунтула А.В. М.: Когито-Центр, 2015. 167 с.
22. *Кулабухов В.С.* Функциональный статус и функциональное состояние человека-оператора в телеоцентрической эргатической системе // Человеческий

фактор в авиации и космонавтике: Сборник научных трудов / Под ред. А.А. Меденкова. М: Полет. 2007.

23. *Воробьев А.В., Кулабухов В.С.* Принципы телеоцентрического системного проектирования интеллектуальных систем управления летательных аппаратов // Материалы III Всероссийской научно-практической конференции «Перспективные системы и задачи управления». Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ. 2008. С. 267.
24. *Кулабухов В.С.* Телеоцентрическое проектирование интеллектуальных систем управления летательных аппаратов // В книге: Навигация, наведение и управление летательными аппаратами. Тезисы докладов. 2019. С. 331-332.
25. *Кулабухов В.С.* Функционально-структурный подход к формированию облика и архитектур базовых эргатических интегрированных бортовых комплексов ЛА // Тез. докл. Научных чтений, посвященных творческому наследию Н.Е. Жуковского (к 150-летию со дня рождения). М., 1997.
26. *Кулабухов В.С.* Вариант формализации системного анализа и синтеза структур авионики и систем управления полетом // Тезисы докладов 9 Международного Аэрокосмического Конгресса IAC'18. Москва, 28–31 августа 2018 г. М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, 2018. С. 12860
27. *Андреев А.М., Можаров Г.П., Сюзев В.В.* Многопроцессорные вычислительные системы. Теоретический анализ, математические модели и применение. М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2011. 334 С.
28. *Артамонов С.Е., Затуливетер Ю.С., Козлов В.А., Фищенко Е.А.* К созданию однокристального многопроцессорного компьютера общего назначения с массовым параллелизмом (элементы стратегии опережения в создании отечественной элементной базы). // Датчики и системы. 2013. №6. С. 64-77.
29. *Федосов Е.А.* Перспективные комплексы бортового оборудования воздушных судов на базе интегрированной модульной авионики второго поколения // Всероссийская научно-техническая конференция «Навигация, наведение и управление летательными аппаратами». К 65-летию РПКБ. Тезисы докладов. Москва-Раменское, 20-21 сентября 2012 г. М.: Научтехлитиздат, 2012. С. 14…17.
30. *Wang Guoqing Ph. D.* Research on Avionics Integrated System Safety Technology - Civil Avionics International Forum, China, April, 2014.
31. *Mirko Jakovlievic.* Complexity & Design Considerations for Integrated Modular Avionics - Civil Avionics International Forum, China, April, 2014.
32. *Jiang Xin, Zhang Zhan, TuLinyan*. Study on Distributed Integrated Modular Avionics Architecture for Large Civil Aircraft - Civil Avionics International Forum, China, April, 2015, p. 239-241.

33. *Кулабухов В.С.* Распределенная модульная авионика // X Всероссийская научно-техническая конференция «Научные чтения по авиации, посвященные памяти Н.Е. Жуковского». Материалы. Москва, 11-12 апреля 2013 г. М.: РПА «АПР». 2013. С. 35-40.
34. *Поляков В.* Её величество авионика // Информационно-аналитический журнал АО «КРЭТ» «Радиоэлектронные технологии». 2015. №4. С. 13-15.
35. *Кулабухов В.С.* Основные направления и проблемные вопросы разработки бортовых интеллектуальных систем для комплексов бортового оборудования и комплексных систем управления полётом пилотируемых и беспилотных ЛА // «Передовые технологии в авиаприборостроении». Материалы V Всероссийской научно-технической конференции Национальной Ассоциации авиаприборостроителей (НААП). СПб.: Изд-во Политехн. ун-та. 2009. 111с.
36. *Месарович М.М., Мако Д.Д., Такахара И.* Теория иерархических многоуровневых систем. М.: Мир. 1973.
37. *Федосов Е., Косьянчук В., Сельвесюк Н.* Интегрированная модульная авионика // Информационно-аналитический журнал АО «КРЭТ» «Радиоэлектронные технологии». 2015. №1. С. 66-71.
38. *Steven Ouyang* Deterministic Networking for Aerospase: Mixed Criticality Systems - Civil Avionics International Forum, China, April, 2014.
39. *Alex Wilson.* Multicore, ARINC 653, and certification - Civil Avionics International Forum, China, April, 2014.
40. *Итенберг И.И., Куликов Д.А., Сивцов С.А., Тимченко А.П.* Интегрированная модульная авионика инновационная технология создания перспективных комплексов БРЭО // Мир авионики. 2011. №3. С. 31-32.
41. *Зеленюк Ю.И., Колодько Г.Н., Першин А.С., Андреев Н.А., Шадский А.Г.* Архитектуры бортовых специализированных цифровых вычислительных машин // Мир авионики. 2010. №6. С. 24-31.
42. *Гущеваров М.Ю., Баранов А.С.* интегрированная модульная авионика боевых комплексов // Всероссийская научно-техническая конференция «Навигация, наведение и управление летательными аппаратами». К 65-летию РПКБ. Тезисы докладов. Москва-Раменское, 20-21 сентября 2012 г. М.: Научтехлитиздат. 2012. С. 116…119.
43. *Spitzer C. R., Ferrel U., Ferrel T.* Digital Avionics Handbook. CRC Press, Taylor & Francis Group. Boca Raton, London, New York. 2015. 817 p.
44. *Кулабухов В.С.* Алгебраическая формализация телеоцентрического подхода к системному проектированию // Материалы XV Всероссийской научно-технической конференции «Научные чтения по авиации, посвящённые памяти Н. Е. Жуковского» / Сборник докладов. М.: Издательский дом Академии им. Н. Е. Жуковского. 2018. С. 279-287

45. *Kulabukhov V.* (2019) Algebraic Formalization of System Design Based on a Purposeful Approach. IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 476: 012017. doi:10.1088/1757-899X/476/1/012017
46. *Кострикин А.И.* Введение в алгебру. Основы алгебры. М.: Физматлит, 1994.
47. *Кулабухов В.С.* Декомпозиция нелинейной математической модели самолета методом структурных матриц // Интегрированные бортовые комплексы: Научно-методические материалы. М.: ВВИА им проф. Н.Е. Жуковского, 1986. С. 94-103.
48. *Кулабухов В.С.* Математическое обоснование современных эвристических подходов к проектированию сложных систем // Cloud of Science. 2020. Т. 7. № 4. С. 801-814.
49. *Kulabukhov V.* Mathematical foundation of system design regulatory controls based on ARP4754A // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 1027 (2021) 012015. Workshop on Materials and Engineering in Aeronautics (MEA 2020). p. 012015. doi:10.1088/1757-899X/1027/1/012015
50. *Кулабухов В.С.* Общий принцип изоморфизма в теории систем // Cloud of Science. 2018. Т.5. №3.С. 400-472.
51. Guidelines for Development of Civil Aircraft and Systems; ARP 4754A; US SAE International: Warrendale, PA, USA, 21 December 2010.
52. *Noviello M.C., Dimino I., Concilio A., Amoroso F., Pecora R.* (2019) Aeroelastic assessments and functional hazard analysis of a regional aircraft equipped with morphing winglets. Aerospace, 6(10), art. no. 104 (doi:10.3390/aerospace6100104)
53. *LI Xiaoxuna, ZHU Yuanzhenb, FAN Yichenb, SU Duoa* (2011) A Comparison of SAE ARP 4754A and ARP 4754. The 2nd International Symposium on Aircraft Airworthiness (ISAA 2011). Procedia Engineering 17 (2011), 400 – 406 (doi: 10.1016/j.proeng.2011.10.047)
54. *G. Esdras and S. Liscouët-Hanke* (2015) Development of Core Functions for Aircraft Conceptual Design: Methodology and Results. (https://www.researchgate.net/publication/277021129)
55. *Mathew P.G.* (2019) Model-Based System Engineering Methodology for Implementing Networked Aircraft Control System on Integrated Modular Avionics - Environmental Control System Case Study https://spectrum.library.concordia.ca/985095/7/GeorgeMathew_MASc_S2019.pdf)
56. A publication of the International Council on Systems Engineering. (December 2O19) Volume 22 / Issue 4 (http://www.panetto.fr/INSIGHT_vol-22-issue-4.pdf)

57. *Jonas Schulze, M.Sc.* (2018) Architectural Design of a Future Flight Management System Supporting 4D Trajectories. Dissertation D17. Darmstadt 2018. (https://tuprints.ulb.tu-darmstadt.de/8386/1/DissertationSchulze.pdf)
58. *Altfeld H.H.* (2010) Commercial Aircraft Projects: Managing the Development of Highly Complex Products. Farnham.
59. Embedded multi-core systems for mixed criticality applications in dynamic and changeable real-time environments. ARTEMIS Call 2013, project 621429. (https://www.artemis-emc2.eu/fileadmin/user_upload/Publications/Deliverables/EMC2_D6.1_SotA_for_System_Qualification_and_Certification_final.pdf)
60. https://afuzion.com/arp4754a-introduction-avionics-systems/
61. Certification Specifications and Acceptable Means of Compliance for Large Aeroplanes—CS-25, Amendment 11; European Aviation Safety Agency: Cologne, Germany, July 2011.
62. *Kulabukhov V.S.* (2019) A General Principle of Isomorphism: Determining Inverses. Symmetry, 2019, 11, 1301. doi:10.3390/sym11101301
63. *Kulabukhov V. S.* Isomorphic observers of the linear systems state. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. Volume 312. 2017. p. 012016. 2018. DOI 10.1088/1757-899X/312/1/012016 (https://doi.org/10.1088/1757-899X/312/1/012016)
64. *Kulabukhov V.* Linear Isomorphic Regulators. MATEC Web of Conf. Volume 99, 2017. p.03008. Workshop on Contemporary Materials and Technologies in the Aviation Industry (CMTAI2016). DOI: https://doi.org/10.1051/matecconf/20179903008

Кулабухов Владимир Сергеевич

Общий принцип изоморфизма: алгебраическая теория систем

Монография издана в авторской редакции

Сетевое издание

Ответственный за выпуск – Алимова Н.К.

Научное издание

Системные требования:
операционная система Windows XP или новее, macOS 10.12 или новее, Linux.
Программное обеспечение для чтения файлов PDF.

Объем данных 11Мб

Принято к публикации «15» июня 2023 года

Режим доступа: https://izd-mn.com/PDF/32MNNPM23.pdf свободный. – Загл. с экрана. – Яз. рус., англ.

ООО «Издательство «Мир науки»

«Publishing company «World of science», LLC

Адрес:

Юридический адрес – 127055, г. Москва, пер. Порядковый, д. 21, офис 401.

Почтовый адрес – 127055, г. Москва, пер. Порядковый, д. 21, офис 401.

https://izd-mn.com/

ДАННОЕ ИЗДАНИЕ ПРЕДНАЗНАЧЕНО ИСКЛЮЧИТЕЛЬНО ДЛЯ ПУБЛИКАЦИИ НА ЭЛЕКТРОННЫХ НОСИТЕЛЯХ