

2021

Д.П. Николаев, П.П. Николаев, С.А. Гладилин, В.П. Божкова

# **ОСНОВЫ ЦВЕТОВОЙ ТЕОРИИ В ТЕХНИЧЕСКОМ ЗРЕНИИ**

## **I. ВВЕДЕНИЕ В ЦВЕТОВУЮ ТЕОРИЮ**

Учебное пособие



УДК 535  
ББК 22.34  
Н 632

Рецензенты: Андрей Николаевич Соболевский – профессор РАН по Отделению нанотехнологий и информационных технологий, профессор, зав. кафедрой технологий моделирования сложных систем Факультета компьютерных наук НИУ ВШЭ, зав. межфакультетской кафедрой проблем передачи информации и анализа данных МФТИ, член Экспертного совета по информационным технологиям в сфере образования и науки при Комитете по образованию и науке Госдумы РФ. Директор ИППИ РАН им. А.А. Харкевича. Ассоциированный член Российско-французской математической лаборатории.

Наталья Александровна Обухова – доктор технических наук, профессор кафедры телевидения и видеотехники СПбГЭТУ «ЛЭТИ».

**Николаев, Дмитрий Петрович**  
**Николаев, Пётр Петрович**  
**Гладилин, Сергей Александрович**  
**Божкова, Валентина Петровна**

Н 632 Основы цветовой теории в техническом зрении. I. Введение в цветовую теорию. Учебное пособие – М.: Мир науки, 2021. – Режим доступа: <https://izd-mn.com/PDF/26MNNPU21.pdf> – Загл. с экрана.

ISBN 978-5-6046185-1-6

Данное пособие составлено авторами для помощи в самостоятельном освоении одной из важных тем курсов «Обработка и анализ изображений», «Техническое зрение» и им подобных. В пособии даются базовые сведения о физических, биологических и математических основах цветовой теории, вводятся базовые термины и математические модели, связанные с понятием цвета.

Для понимания материалов пособия требуется знание основ оптики, евклидовой и проективной геометрии, линейной алгебры и функционального анализа.

Предназначено для студентов магистратуры и старших курсов специалитета, обучающихся по направлениям подготовки 09.04.01 (информатика и вычислительная техника), 01.04.02 (прикладная математика и информатика) и 03.04.01 (прикладные математика и физика).

ISBN 978-5-6046185-1-6

© Николаев Дмитрий Петрович  
© Николаев Пётр Петрович  
© Гладилин Сергей Александрович  
© Божкова Валентина Петровна  
© ООО Издательство «Мир науки», 2021

---

## Оглавление

<b>Предисловие .....</b>	<b>4</b>
<b>1. Физические основы цветовой теории .....</b>	<b>5</b>
1.1. Элементы теоретической фотометрии .....	7
1.2. Колориметрия излучений .....	12
1.3. Цветовой сенсор .....	15
1.4. Цвет и технические системы .....	21
<b>2. Топология и геометрия цветового пространства .....</b>	<b>24</b>
2.1. Структура цветов излучений .....	25
2.2. Цветовой тон, насыщенность и яркость цветов .....	30
2.3. Структура цветов окрасок и понятие светлоты .....	35
<b>Предметный указатель .....</b>	<b>38</b>
<b>Список литературы .....</b>	<b>39</b>

---

## Предисловие

Данное учебное пособие призвано облегчить изучение важной и актуальной для Московского физико-технического института темы – принципов формирования, анализа и обработки цветных изображений – на фоне явного недостатка современной русскоязычной литературы в этой области. В пособии даются базовые сведения об основах цветовой теории, вводятся термины и базовые математические модели, связанные с понятием «цвет».

При исследовании систем цветового зрения используются понятия из нескольких научных дисциплин и необходимо свободно владеть множеством специфических терминов. В связи с этим для закрепления необходимых знаний в начале каждого раздела пособия дан перечень ключевых понятий, усвоение которых является необходимым для понимания материала. Они выделены полужирным шрифтом. Будущий специалист должен уметь объяснить, что означают эти термины.

Для облегчения работы в пособие добавлен предметный указатель. Он содержит перечень ключевых понятий с указанием номеров страниц, на которых они встречаются впервые. В тексте же первые вхождения этих терминов выделены полужирным шрифтом. Для понимания материалов пособия требуется знание основ оптики, евклидовой и проективной геометрии, линейной алгебры и функционального анализа. Термины из этих областей не выделены.

Пособие состоит из двух больших разделов, покрывающих семь относительно независимых тем. В конце пособия дана библиография материалов для более глубокого изучения темы. Источники, ознакомление с которыми представляется авторам обязательным, указаны в начале каждого раздела под заголовком «рекомендованная литература».

Предлагаемое пособие может быть рекомендовано для самостоятельной работы студентам старших курсов при подготовке к практическим занятиям и для итоговой аттестации по предметам «Обработка и анализ изображений», «Техническое зрение» и другим, включающим тематику формальной цветовой теории.

# 1. Физические основы цветовой теории

Цвет и окраска. Спектральная яркость. Простой источник света. Спектральная освещенность. СДФОС. Однородная окраска. Ламбертова окраска. Цветовой сенсор и оптическая камера. Светосила. Оптическое изображение. Цвет излучения. Метамерия излучений. Законы Грассмана. Колориметр. Линейная модель цветового сенсора. Спектральная чувствительность. Кривые сложения. Стандартный наблюдатель. Цветное изображение.

Рекомендуемая литература: гл. 35 «Цветовое зрение» [1, с. 154–172], статьи «Цвет», «Цветное зрение», «Цветовые измерения (колориметрия)» [2, с. 385–389], статья *Colors and things* [3].

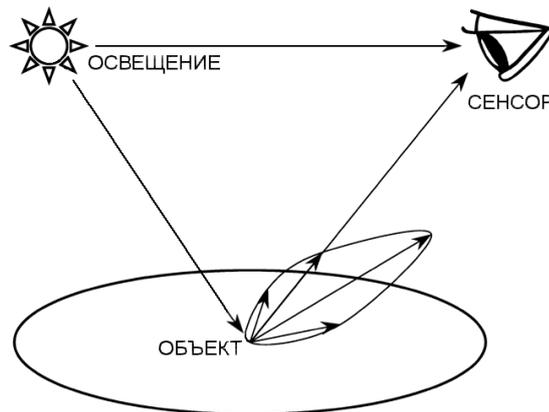
Говоря о цветовой теории, трудно обойти стороной вопросы, связанные со зрительным восприятием человека. Человек обладает естественным чувством цвета подобно тому, как обладает, например, музыкальным слухом. При этом понятию звука в современной физике соответствует устоявшаяся математическая модель (колебания давления). Поэтому физик может считать, что музыкант, говоря о нотах, с некоторыми погрешностями и в некоторых пределах на слух измеряет хорошо определенный параметр – отношение длин волн двух акустических сигналов. Использование понятия «тембр» указывает на то, что форма акустического сигнала не обязательно гармоническая, но понятие основного тона, определенного только для гармонического сигнала, остается более продуктивным. В любом случае в соответствующих физико-математических теориях речь всегда идет о колебаниях среды, с которой контактирует сенсор (ухо).

Несмотря на полную очевидность обсуждаемого предмета, ситуация с цветом существенно сложнее. По крайней мере с XIX века считается непреложным, что цвет непосредственно связан с параметрами колебаний (электромагнитных) определенного диапазона и в этом подобен звуку. Но человек атрибутирует цвета не только источникам света и их излучениям (зеленый свет светофора) или хотя бы эффектам освещения (голубоватая тень), но и непрозрачным объектам (красное яблоко) и полупрозрачным средам (желтая дымка). В двух последних случаях затруднительно говорить о параметрах электромагнитных колебаний, поскольку ни яблоко, ни дымка не испускают их сами по себе.

Таким образом, не вполне ясно, какой именно физической величине соответствует понятие «цвет» в человеческом восприятии, поскольку объекты, среды и излучения описываются разными физическими величинами, независимо принимающими в сцене произвольные значения. Однако физики и математики взяли на себя смелость утверждать, что если исследовать цветное восприятие строго и систематически, то все составные элементы данного феномена будут иметь четкое и согласованное описание. Этой позиции, в частности, придерживается один из классиков цветовой теории Марк Фэрчайлд [4].

Какие же составные элементы физико-математической модели цветового восприятия выделяет М. Фэрчайлд? Он указывает, что цветовые феномены проявляются при взаимодействии источников света, материальных объектов и сенсоров (рис. 1). Источник света – это источник электромагнитного излучения видимого диапазона. Материальные объекты поглощают и рассеивают это излучение. Наконец, цветовой сенсор (например, зрительная система человека) реагирует на прямое или рассеянное от объектов освещение в некоторой зависимости от спектра этого освещения. Существенно, что в этой модели не

упоминается среда, в которой распространяется свет. В частности, не полностью моделируются цветовые явления, характерные для подводной съемки.



**Рис. 1.** Три физические составляющие процесса формирования цвета: источник, обеспечивающий освещение, наблюдаемый объект и цветоразличающий сенсор

При непосредственном наблюдении источника света цветовые характеристики, аналогично звуковым, описывают свойства регистрируемых сенсором колебаний. В случае же наблюдения объектов, имеющих ту или иную окраску, человек приписывает цветовые характеристики самому объекту, описывая его отражательную способность. Но ведь объект выступает одновременно вторичным источником света! В данном случае цветовое восприятие в некотором смысле «двоится», что существенно осложняет аккуратное обсуждение. Вот что по этому поводу писал основатель советской колориметрической научной школы известный математик, физик и биофизик Николай Дмитриевич Ньюберг, труды которого определяют, начиная с 30-х годов XX столетия и по сей день, строго научный подход к описанию цвета [5, с. 65]:

*В разговорном языке мы одним и тем же словом «цвет» обозначаем и цветовое ощущение, и объективные отражательные свойства предметов. Об этом дают ясное представление такие фразы: «Снег при свете зари кажется розовым, хотя на самом деле цвет белый». В любом, даже научном описании явлений контраста можно встретить фразу вроде следующей: «Небольшой кусочек бумаги серого цвета на красном фоне кажется по цвету зеленоватым». Ясно, что в обоих случаях сопоставляются два различных понятия: одно из них, «кажущийся цвет», есть цветовое ощущение, а другое, «цвет на самом деле» или просто «цвет», есть некоторое объективное свойство предмета. Предмет «белый на самом деле» это – предмет, обладающий равномерным высоким коэффициентом отражения по всему спектру, «на самом деле красный», имеющий поглощение всюду, кроме длинноволновой части спектра, и т.д.*

*Для четкого различения этих понятий мы будем, как это принято в науке, под словом «цвет» понимать только цветовое ощущение. Для объективных отражательных свойств предметов будем употреблять слово «окраска». В этом же смысле для обозначения конкретных цветов и окрасок будем различать выражения «белый по окраске» и «белый по цвету». Например, будем*

*говорить: «Снег при свете зари розовый по цвету, но по окраске он белый».*

В данном пособии, соглашаясь с Н.Д. Ньюбергом по существу, все же наделим два упомянутых термина несколько иным смыслом. Под **окраской** мы договоримся понимать исключительно физические характеристики отражательных свойств объектов. Окраска тела, очевидно, не зависит от освещения (как и у Ньюберга). **Цветом** же будем называть все многообразие зрительных ощущений, связанных как со спектральным составом излучений, так и с окраской объектов. При таком понимании конструкция «цвет окраски» допустима, выражение «белый по цвету» является плеоназмом, а снег в примере Н.Д. Ньюберга характеризуется двумя разными цветовыми оценками – его окраска постулируется белой (а «белый» – это характеристика именно воспринимаемого образа), но при этом, благодаря освещению, также возникает ощущение розового.

## 1.1. Элементы теоретической фотометрии

В своем завершенном виде цветовая теория должна связывать понятия мира ощущений с измеримыми физическими величинами. Ясно, что субъективная сторона вопроса значительно сложнее, поэтому разберемся сначала с физикой: введем несколько моделей и определений из области оптики, называемой фотометрией.

При использовании фотометрии как основы для количественных оценок модель Фэрчайлда необходимо уточнить следующим образом: свет испускается первичными источниками света, распространяется в прозрачной непоглощающей среде, поглощается и рассеивается на поверхности непрозрачных объектов и, проходя через оптическую систему, регистрируется сенсором. Рассматриваемая модель не учитывает, в частности, нелинейно-оптические эффекты, в том числе явление фотолуминесценции.

Построим формальное описание свойств всех рассматриваемых элементов сцены. Начнем с источников света. В общем случае они могут быть описаны пространственно-угловым распределением спектральной плотности энергетической яркости (далее – **спектральной яркости**)  $B_\lambda(\lambda, \mathbf{r}, \mathbf{n}_{\text{out}})$ :

$$B_\lambda(\lambda, \mathbf{r}, \mathbf{n}_{\text{out}}) = \frac{\delta P}{\mathbf{n}_{\text{out}} \cdot \mathbf{n}_{\text{surf}} \delta\lambda \delta\omega \delta\sigma}, \quad (1)$$

$$\|\mathbf{n}_{\text{out}}\|_2 = \|\mathbf{n}_{\text{surf}}\|_2 = 1.$$

Здесь  $\delta P$  – мощность излучения с длинами волн от  $\lambda$  до  $\lambda + \delta\lambda$ , испускаемого в направлении  $\mathbf{n}_{\text{out}}$  в телесном угле  $\delta\omega$  элементом поверхности источника площадью  $\delta\sigma$  с координатами центра  $\mathbf{r}$ ;  $\mathbf{n}_{\text{surf}}$  – нормаль к поверхности источника в точке  $\mathbf{r}$ , а точкой здесь и далее обозначается операция скалярного произведения.

Во многих теоретических работах, связанных с цветом, используется модель точечных источников света, излучающих конечную мощность из одной точки пространства. Точечным источникам невозможно приписать конечную яркость. Они описываются спектральной плотностью силы излучения  $I_\lambda(\lambda, \mathbf{n}_{\text{out}})$ :

$$I_\lambda(\lambda, \mathbf{n}_{\text{out}}) = \frac{\delta P}{\delta\lambda \delta\omega}, \quad (2)$$

где  $\delta P$  – мощность излучения с длинами волн от  $\lambda$  до  $\lambda + \delta\lambda$ , испускаемого точечным источником в направлении  $\mathbf{n}_{\text{out}}$  в телесном угле  $\delta\omega$ . Мы будем по возможности избегать

использования этой модели как не слишком реалистичной, хотя и будем упоминать ее в некоторых местах для прояснения связи с другими работами.

Если не рассматривать редкий и сложный случай, когда относительный спектральный состав излучения источника зависит от угла наблюдения и/или от точки испускания, спектральная яркость источника может быть разложена следующим образом:

$$\begin{aligned} B_{\lambda}(\lambda, \mathbf{r}, \mathbf{n}_{\text{out}}) &= B(\mathbf{r}, \mathbf{n}_{\text{out}}) S(\lambda), \\ \|\mathbf{n}_{\text{out}}\|_2 &= 1, \int_0^{\infty} S(\lambda) d\lambda = 1. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $B(\mathbf{r}, \mathbf{n}_{\text{out}})$  – интегральная энергетическая яркость источника в точке  $\mathbf{r}$ , а  $S(\lambda)$  – относительный спектральный состав испускаемого света. Источники, удовлетворяющие модели (3), мы назовем простыми и в дальнейшем будем считать, что сцена освещена исключительно **простыми источниками света**. Кроме того, положим, что по умолчанию относительные спектральные составы всех источников в сцене линейно независимы (в противном случае их можно описать меньшим числом других простых источников, пусть и неодносвязных и/или пересекающихся).

Источники света создают на поверхности объектов освещенность, описываемую пространственным распределением **спектральной освещенности** (или развернуто – спектральной плотности энергетической освещенности)  $E_{\lambda}(\lambda, \mathbf{r})$ :

$$E_{\lambda}(\lambda, \mathbf{r}) = \frac{\delta P}{\delta \lambda \delta \sigma}, \quad (4)$$

где  $\delta P$  – мощность излучения с длинами волн от  $\lambda$  до  $\lambda + \delta \lambda$ , облучающего элемент поверхности площадью  $\delta \sigma$  с центром в точке  $\mathbf{r}$ . В отличие от яркости, освещенность в фотометрии вводится без углового аргумента, хотя, как станет ясно из последующего изложения, по смыслу эти две величины образуют пару. В связи с этим для корректного определения параметров окраски в дальнейшем нам понадобится угловое распределение спектральной освещенности  $E_{\lambda, \omega}(\lambda, \mathbf{r}, \mathbf{n}_{\text{in}})$ , которое мы определим следующим образом:

$$E_{\lambda, \omega}(\lambda, \mathbf{r}, \mathbf{n}_{\text{in}}) = \frac{\delta E_{\lambda}(\lambda, \mathbf{r})}{\delta \omega}, \quad (5)$$

где  $\delta E_{\lambda}(\lambda, \mathbf{r})$  – спектральная освещенность, создаваемая потоком света, идущим в направлении  $\mathbf{n}_{\text{in}}$  в телесном угле  $\delta \omega$ .

Спектральная освещенность, создаваемая точечным источником со спектральной плотностью силы излучения  $I_{\lambda}(\lambda, \mathbf{n}_{\text{out}})$ , расположенным в точке  $\mathbf{r}_I$ , выражается следующим образом:

$$\begin{aligned} E_{\lambda, \omega}(\lambda, \mathbf{r}) &= \frac{-I_{\lambda}(\lambda, \mathbf{n}_{\text{out}}) \mathbf{n}_{\text{out}} \cdot \mathbf{n}_{\text{surf}}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_I\|_2^2}, \\ \mathbf{n}_{\text{out}} &= \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_I}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_I\|_2}, \quad \|\mathbf{n}_{\text{surf}}\|_2 = 1, \end{aligned} \quad (6)$$

то есть освещенность точки  $\mathbf{r}$  поверхности прямо пропорциональна косинусу угла между нормалью к поверхности в этой точке и направлением из нее на источник.

Поскольку среда абсолютно прозрачна, то освещенность  $E_{\lambda}(\lambda, \mathbf{r})$ , создаваемая простым источником, будет иметь спектральный состав, совпадающий со спектральным составом  $S(\lambda)$  яркости источника:

$$E_{\lambda}(\lambda, \mathbf{r}) = g(\mathbf{r}) S(\lambda), \quad (7)$$

где  $g(\mathbf{r})$  – коэффициент, зависящий от пространственного распределения интегральной энергетической яркости источника  $V(\mathbf{r}, \mathbf{n}_{out})$ , а также расположения и геометрии освещаемой поверхности.

Рассмотренные выше фотометрические величины (сила излучения, спектральные яркость и освещенность) называются энергетическими. Помимо них, в фотометрии используются так называемые редуцированные величины. Они вводятся для того, чтобы охарактеризовать излучение не спектральной функцией, а скалярной величиной, задающей меру общего воздействия этого излучения в контексте того или иного явления (видимости для человека, канцерогенного влияния, бактерицидного эффекта и др.). Для введения редуцированных величин используется линейная спектрально-аддитивная модель. Пусть  $A_{\lambda}(\lambda)$  – та или иная энергетическая фотометрическая величина. Тогда соответствующая ей редуцированная величина  $A_r$  будет связана с ней следующим соотношением:

$$A_r = \int_0^{\infty} A_{\lambda}(\lambda) w(\lambda) d\lambda, \quad (8)$$

где  $w(\lambda)$  – спектральная весовая функция, зависящая от рассматриваемого явления.

В 1924 году Международная комиссия по освещению (МКО, фр. *CIE – Commission internationale de l'éclairage*) стандартизовала функцию спектральной световой эффективности монохроматического излучения для человека  $V(\lambda)$  (иногда называемую также кривой видности). Эта функция связывает спектральную яркость излучения с субъективным ощущением яркости, возникающим у человека. Соответствующие ей редуцированные фотометрические величины называются световыми. Для световых величин в системе СИ  $w(\lambda) = 683 V(\lambda)$ , при этом сила излучения имеет размерность Вт/ср, а соответствующая ей сила света – кд (кандела).

На сегодняшний день известно, что кривая видности, стандартизованная в 1924 году, имеет существенные погрешности в синей области (недооценивается яркостный эффект). Но изменение весовой функции неизбежно приведет к пересмотру значений всех световых величин. Это одна из причин, по которым уточненная в 1988 году кривая видности  $V_M(\lambda)$  до сих пор не принята в качестве стандарта. Из-за такой неопределенности в данном пособии мы будем по возможности избегать использования функции  $V(\lambda)$  и связанных с ней световых величин. К счастью, хотя исторически кривая видности была едва ли не первым колориметрическим стандартом, связывающим физику и человеческие зрительные ощущения, она не требуется для построения основ цветовой теории.

Перейдем теперь к описанию объектов сцены. Поскольку мы пренебрегаем нелинейно-оптическими эффектами и оптической проницаемостью объектов, то их окраска может быть полностью описана спектральной индикатрисой рассеяния или, точнее, спектральной двулучевой функцией отражательной способности (спектральной ДФОС, **СДФОС**)  $f_{\lambda}(\lambda, \mathbf{r}, \mathbf{n}_{in}, \mathbf{n}_{out})$  [6, с. 31]. СДФОС задает в диапазоне длин волн от  $\lambda$  до  $\lambda + \delta\lambda$  отношение спектральной яркости  $\delta B_{\lambda}(\lambda, \mathbf{r}, \mathbf{n}_{out})$  поверхности в точке  $\mathbf{r}$  в направлении  $\mathbf{n}_{out}$  к значению углового распределения спектральной освещенности  $E_{\lambda, \omega}(\lambda, \mathbf{r}, \mathbf{n}_{in})$  в направлении  $\mathbf{n}_{in}$ :

$$f_{\lambda}(\lambda, \mathbf{r}, \mathbf{n}_{in}, \mathbf{n}_{out}) = \frac{B_{\lambda}(\lambda, \mathbf{r}, \mathbf{n}_{out})}{E_{\lambda, \omega}(\lambda, \mathbf{r}, \mathbf{n}_{in})}, \quad \|\mathbf{n}_{in}\|_2 = \|\mathbf{n}_{out}\|_2 = 1. \quad (9)$$

На СДФОС, как правило, накладывают три физических ограничения:  $f_\lambda(\lambda, \mathbf{r}, \mathbf{n}_{in}, \mathbf{n}_{out}) \geq 0$  (яркость не бывает отрицательной);  $f_\lambda(\lambda, \mathbf{r}, \mathbf{n}_{in}, \mathbf{n}_{out}) = f_\lambda(\lambda, \mathbf{r}, \mathbf{n}_{out}, \mathbf{n}_{in})$  (принцип Гельмгольца обратимости в оптике) и условие сохранения энергии

$$\int_{\Omega(\mathbf{r})} f_\lambda(\lambda, \mathbf{r}, \mathbf{n}_{in}, \mathbf{n}_{out}) \mathbf{n}_{out} \cdot \mathbf{n}_{surf} d\mathbf{n}_{out} \leq 1, \quad (10)$$

где  $\Omega(\mathbf{r})$  – полусфера, ограниченная касательной плоскостью к поверхности в точке  $\mathbf{r}$ .

Если у объекта или его участка СДФОС постоянна для всех точек  $\mathbf{r}$  (при условии, что векторы  $\mathbf{n}_{in}$  и  $\mathbf{n}_{out}$  заданы в локальной системе координат, связанной с нормалью к поверхности в соответствующей точке), то будем говорить, что в соответствующих пределах **окраска однородна**.

Хорошо матированные (обработанные для придания равномерной мелкой шероховатости) поверхности однородной окраски с высокой точностью описываются моделью **ламбертовой окраски**:

$$f_\lambda^L(\lambda, \mathbf{r}, \mathbf{n}_{in}, \mathbf{n}_{out}) = \frac{R_L(\mathbf{r}, \lambda)}{\pi}, \quad 0 \leq R_L(\mathbf{r}, \lambda) \leq 1, \quad (11)$$

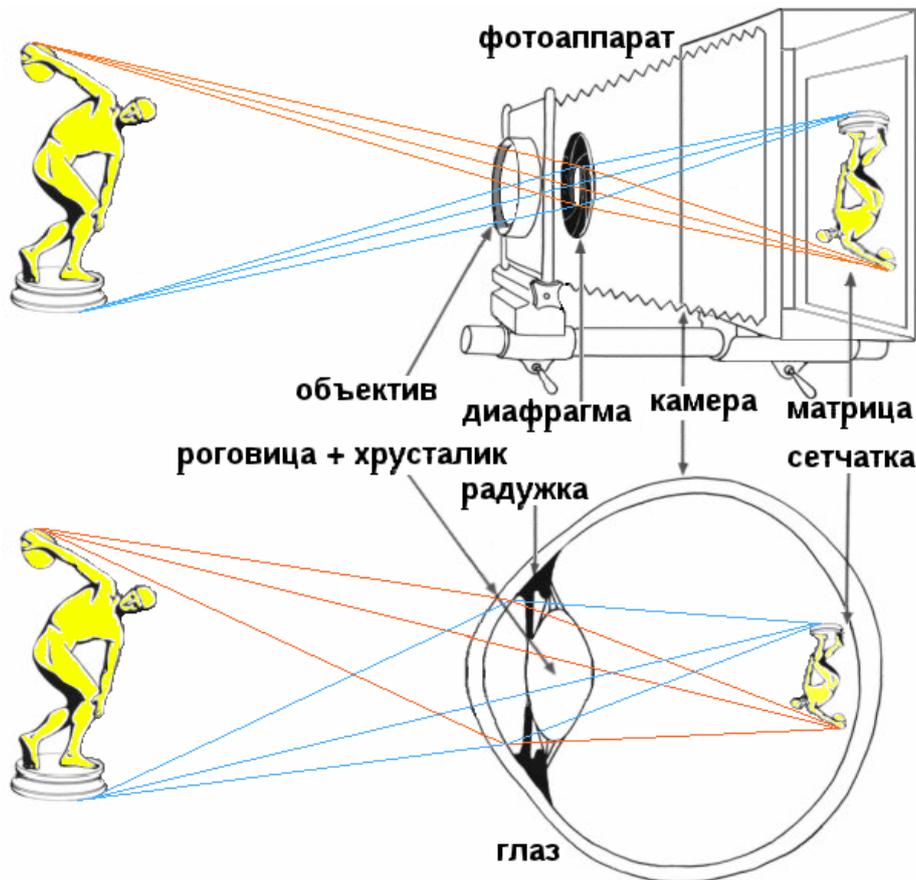
где  $R_L(\mathbf{r}, \lambda)$  – спектральное распределение коэффициента отражения, не зависящее ни от угла падения, ни от угла наблюдения. В случае однородной окраски исчезает и зависимость от  $\mathbf{r}$ .

Используемая в выражении (11) нормировка выводится из условия сохранения энергии (10):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{R_L(\lambda)}{\pi} \mathbf{n}_{out} \cdot \mathbf{n}_{surf} d\mathbf{n}_{out} &= \\ = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \frac{R_L(\lambda)}{\pi} \cos \theta d\varphi \sin \theta d\theta &= R_L(\lambda) \leq 1. \end{aligned} \quad (12)$$

Во многих работах, описывающих модель Ламберта, упоминается так называемый косинусный закон рассеяния. Следует заметить, что в ламбертову СДФОС никакие тригонометрические функции не входят, и значит для формулирования косинусного закона требуется воспользоваться моделью точечного источника. Используя выражение (6) для освещенности, создаваемой точечным источником, с учетом ламбертовой СДФОС (11) получим, что яркость ламбертовой поверхности при освещении точечным источником не зависит от угла наблюдения, но прямо пропорциональна косинусу угла между нормалью к поверхности и направлением на источник.

Нам осталось рассмотреть последний элемент нашей общей модели – зрительную систему. Часть зрительной системы, непосредственно регистрирующую цветовые свойства излучения, ее достигшего, будем называть **сенсором**. Сенсором человеческого глаза является сетчатка (рис. 2), сенсором аналогового фотоаппарата – фотопленка, а цифровой видеокамеры – светочувствительная матрица.



**Рис. 2.** Формирование оптического изображения в фотоаппарате и в глазу

Фокусировку на сенсоре светового потока, идущего от объектов сцены, обеспечивает оптическая система, которую мы будем называть **оптической камерой**. Для спектральной освещенности сенсора мы будем использовать иное, чем в общем случае, обозначение –  $F(\lambda, x, y)$ , что связано с наличием у изображения на сенсоре собственной естественной декартовой системы координат  $(x, y)$ .

Будем считать, что у камеры отсутствуют aberrации, тогда освещенность сенсора  $F(\lambda)$  пропорциональна спектральной яркости  $B_\lambda$  наблюдаемого им объекта:

$$F(\lambda, x, y) = k_Q B_\lambda \left( \lambda, \mathbf{r}_{xy}, \frac{\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_{xy}}{\|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_{xy}\|_2} \right), \quad (13)$$

$$\mathbf{r}_{xy} = Z_c(\mathbf{r}_0, x, y),$$

где  $\mathbf{r}_0$  – радиус-вектор оптического центра камеры в координатной системе сцены;  $Z_c$  – функция, задающая для каждой точки изображения координаты точки сцены, наблюдаемой камерой, а  $k_Q$  – **светосила** оптической системы. Функцию  $F(\lambda, x, y)$  будем также называть **оптическим изображением**.

Итак, освещенность сенсора в идеальной зрительной системе прямо пропорциональна яркости наблюдаемых объектов (вне зависимости от расстояния до них), причем спектральный состав света не искажается ни средой, ни камерой. Отношение интенсивности оптического изображения (освещенности сенсора) к яркости объекта задается светосилой оптической камеры. Именно этот закон делает зрительные системы (включая биологические) замечательным инструментом изучения оптических свойств объектов окружающего мира. При этом важно понимать, что наблюдаемая яркость объекта зависит как от его окраски, так

и от его освещенности.

Теперь, разобравшись с физическими основами фотометрии, мы готовы начать обсуждение и формализацию понятий собственно цветовой теории.

## 1.2. Колориметрия излучений

Научная дисциплина, занимающаяся количественными измерениями цветowych величин, называется колориметрией. Отставим на время вопросы цветового восприятия окрасок и разберемся сначала с колориметрией излучений. Классическое колориметрическое определение **цвета излучений** дано Э. Шредингером в 1920 году [7]. Оно состоит в том, что цвет есть свойство спектрального состава излучений, общее всем излучениям, визуально неразличимым для человека.

Из этого определения неявно следует, что одно и то же ощущение может быть вызвано излучениями разных спектральных составов (они называются в колориметрии **метамерными**). При этом определение Шредингера не содержит никаких намеков на то, насколько разными могут быть спектры метамерных излучений. Между тем (и далее это будет показано), зная только цвет излучения, в общем случае невозможно делать содержательные выводы о форме его спектра. Этот факт составляет одну из главных проблем цветовой теории.

Важнейший толчок к созданию колориметрии излучений дали работы Г. Грассмана – немецкого физика и математика, филолога, занимавшегося среди прочего развитием цветовой теории. В своей работе 1853 года [8] Грассман сформулировал ряд законов цветового смещения для излучений. До настоящего времени **законы Грассмана** в разных источниках даются в существенно несовпадающих трактовках. Это, по-видимому, связано с тем, что первоисточник написан на старонемецком, а его анонимный перевод в «Философском журнале» известен по изданию под редакцией Д. МакАдама [9], где значительно сокращен. Наше дальнейшее изложение основано на полном переводе первоисточника, выполненном специально для данного пособия.

В первом законе Г. Грассман утверждает возможность описать цвет любого излучения тремя параметрами – яркостью, цветовым тоном и насыщенностью. При этом он указывает конструктивный способ получить цвет с фиксированными параметрами. Способ основан на модулировании яркости и смещении излучений физическими методами. Во втором законе Грассман утверждает непрерывность цветовых ощущений от смеси излучений по отношению к параметрам компонент смеси и, как следствие, – непрерывность по введенным им параметрам. В третьем законе он постулирует, что цвет смеси излучений зависит только от цветов компонент, но не от способа получения этих компонент как тех или иных смесей. В четвертом законе (который сам называет менее обоснованным) Грассман утверждает аддитивность введенной им яркости цвета относительно сложения (смещения) двух цветов.

Фактически Г. Грассман постулировал, что пространство цветов имеет трехмерную топологию и существует непрерывное сюръективное отображение в него из пространства составов спектрального излучения. При этом он утверждал отсутствие «скрытых цветовых параметров» у излучений при их смешивании и модулировании яркости.

Дальнейшее существенное прояснение структуры цветового пространства стало возможным благодаря экспериментам с **колориметром**. Этот прибор позволяет подбирать такую смесь трех эталонных цветов (точнее, порождающих их излучений), которая визуально не будет отличаться от исследуемого цвета. Таким образом, человек становится неотъемлемой частью прибора, так как именно в его зрительной системе происходит порождение цветовых ощущений, после чего им принимается решение об их совпадении или различии.

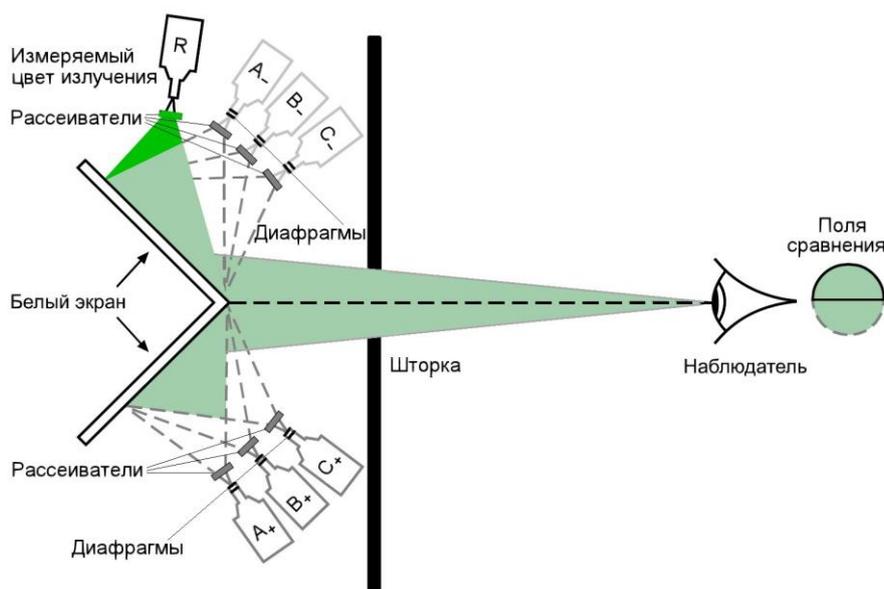


Рис. 3. Схема типового колориметра (согласно работе [10, с. 121])

На рис. 3 изображена упрощенная схема этого прибора. В ее левой части условно показана гипсовая призма, грани которой называются полями сравнения. Поверхность призмы можно считать имеющей равномерную ламбертову окраску с функцией спектрального распределения, близкой к единице во всем видимом диапазоне. Забегая вперед, укажем, что такая окраска имеет белоснежный цвет.

Одно из полей освещается каким-либо одним источником света (он обозначен буквой R – от англ. *reference* – «референтный»), а второе – одновременно тремя фиксированными источниками ( $A_+$ ,  $B_+$  и  $C_+$ ) с несовпадающими известными относительными спектральными составами испускаемого света. Эти источники будем называть базисными. Каждый из них снабжен диафрагмой (отверстием с управляемой площадью), которая позволяет непрерывно и точно регулировать освещенность, создаваемую соответствующим источником на поле сравнения. Рассеиватели обеспечивают равномерность освещенности полей. Оба излучения – референтное и синтезированное тремя базисными источниками – рассеиваются на призме, через отверстие в штормке попадают в глаз наблюдателя и формируют на сетчатке оптическое изображение полей сравнения (круг справа от изображения глаза на рис. 2). При наблюдении полей через небольшое отверстие в штормке зрительная система лишается визуального контекста. В такой ситуации вторичный источник света (гипсовая призма) физически неотличим от первичного (самосветящегося) источника света, и можно обоснованно предположить, что человек будет воспринимать цвет именно излучения.

Введем функцию  $\Upsilon$ , задающую спектр синтезированного излучения:

$$\begin{aligned} \Upsilon[\mathbf{k}](\lambda) &= k_A F_A(\lambda) + k_B F_B(\lambda) + k_C F_C(\lambda), \\ \mathbf{k} &= [k_A, k_B, k_C]^T, \end{aligned} \quad (14)$$

где  $F_A(\lambda)$ ,  $F_B(\lambda)$  и  $F_C(\lambda)$  – освещенности сенсора, создаваемые базисными источниками при максимальной площади диафрагмы, а  $k_A$ ,  $k_B$  и  $k_C$  – отношения площадей диафрагм к максимальной.

Для многих излучений  $R$  у базисных источников удастся подобрать такие размеры диафрагм, что поля сравнения оказываются неразличимыми для человека, причем решение этой задачи оказывается единственным. Запишем это следующим образом:

$$F_R(\lambda) \sim \Upsilon[\mathbf{k}](\lambda). \quad (15)$$

Здесь  $F_R(\lambda)$  – освещенность сенсора, создаваемая референтным излучением, а символ « $\sim$ » означает визуальную неразличимость. Введем функцию  $\Psi[F_R(\lambda)]$ , отображающую спектральное распределение  $F_R(\lambda)$  в вектор  $\mathbf{k}$  параметров неотличимого синтезированного излучения:

$$\Psi[F_R(\lambda)] = \mathbf{k} \Leftrightarrow F_R(\lambda) \sim \Upsilon[\mathbf{k}](\lambda). \quad (16)$$

С помощью экспериментов с колориметром в рассматриваемом режиме удастся подтвердить взаимозаменяемость неразличимых излучений в смеси, непрерывность  $\Psi$  (для компенсации малых изменений  $F_R(\lambda)$  достаточно малых изменений  $\mathbf{k}$ ), а также локальную трехмерность цвета (почти для всех  $F_R(\lambda)$  из области определения  $\Psi$  любые малые изменения компенсируются тремя управляющими параметрами), хотя для многих излучений не удастся подобрать размеры диафрагм, выравнивающие поля сравнения, то есть  $\Psi$  пока определена нами не всюду.

Из перечисленных экспериментальных фактов следует линейность отображения  $\Psi$  на области определения. Действительно,  $F_1 + F_2 \sim \Upsilon[\Psi[F_1]] + \Upsilon[\Psi[F_2]]$ , и поскольку  $\Upsilon$  линейна согласно законам оптики, то  $\Upsilon[\Psi[F_1]] + \Upsilon[\Psi[F_2]] = \Upsilon[\Psi[F_1] + \Psi[F_2]]$ . Значит,  $F_1 + F_2 \sim \Upsilon[\Psi[F_1] + \Psi[F_2]]$ , из чего, согласно выражению (16), следует равенство  $\Psi[F_1 + F_2] = \Psi[F_1] + \Psi[F_2]$ , то есть линейность  $\Psi$  относительно сложения. Подстановкой  $F_1 = F_2 = F$  получаем равенство  $\Psi[2F] = 2\Psi[F]$ , то есть линейность  $\Psi$  относительно шкалирования в два раза. С опорой на непрерывность  $\Psi$  свойство шкалируемости обобщается на любые неотрицательные действительные коэффициенты, откуда окончательно следует линейность  $\Psi$ .

Разберемся теперь, почему  $\Psi$  определена не для всех спектров. Невозможность уравнивания некоторых цветов может означать, что цветовое пространство имеет как трехмерные области, так и области более высокой размерности. Но есть более простое объяснение. Рассмотрим множество спектров  $F(\lambda)$ , разложимых по нашему базису  $\{F_A(\lambda), F_B(\lambda), F_C(\lambda)\}$ . Нет никаких оснований считать, что для всех таких спектров координаты в выбранном базисе неотрицательны. А для спектров с отрицательными координатами в этом базисе значение функции  $\Psi$  должно иметь отрицательные координаты (иначе мы легко опровергнем ее линейность и придем к противоречию). Но задать отрицательные координаты  $\mathbf{k}$  физически невозможно, поэтому такие спектры (и соответствующие им цвета) не могут быть уравнены.

Для моделирования отрицательных коэффициентов разложения в реально существующих полноценных колориметрах используется дополнительная тройка источников света, идентичная тройке  $A_+$ ,  $B_+$ ,  $C_+$ , но освещающая референтное поле. На рис. 3

источники этой тройки обозначены  $A_-, B_-,$  и  $C_-$ . В таком колориметре схема уравнивания (15) усложняется до следующей:

$$F_R(\lambda) + \Upsilon[\max(\mathbf{0}, -\mathbf{k})](\lambda) \sim \Upsilon[\max(\mathbf{0}, \mathbf{k})](\lambda). \quad (17)$$

Как и прежде, математическим операциям сложения и умножения на число из диапазона  $[0,1]$  сопоставляются физические процессы смешения освещений и аттенюации светового потока диафрагмой соответственно. По такой схеме для референтных источников света (ограниченной яркости) с любым спектральным составом удастся получить единственное решение задачи уравнивания и показать линейность (доопределенной)  $\Psi$  всюду. Это означает, что в цветовом пространстве введена трехмерная аффинная система координат, причем отображение из пространства спектральных яркостей в пространство цветовых векторов линейно.

### 1.3. Цветовой сенсор

Теперь у нас достаточно информации, чтобы формализовать **линейную модель цветового сенсора**. В рассматриваемой нами модели цветовой сенсор линейно отображает спектральные освещенности (фоточувствительной поверхности) в конечномерное пространство (в случае человека – трехмерное) координат цветов. Каждая координата этого отображения является непрерывным линейным функционалом.

Если считать спектральные освещенности элементами гильбертова пространства  $L^2$  действительных функций одного неотрицательного аргумента, то, согласно теореме представлений Риса, рассматриваемый функционал всегда представим скалярным произведением аргумента с каким-то фиксированным элементом того же пространства. Поскольку мы имеем дело с пространством  $L^2$ , скалярное произведение записывается как интеграл. Сведя координаты отображения в один вектор, можно получить следующую модель:

$$\mathbf{c} = \int_0^\infty F(\lambda) \mathbf{X}(\lambda) d\lambda, \quad (18)$$

где  $F(\lambda)$  – спектральная освещенность сенсора;  $\mathbf{c}$  – вектор координат регистрируемого цвета, а  $\mathbf{X}(\lambda)$  – вектор функций **спектральной чувствительности** сенсора к разным длинам волн.

Такой подход, впрочем, не слишком плодотворен. В физике принято (и, как будет видно из дальнейшего, это действительно удобно) считать спектры обобщенными функциями, в частности говорить о монохроматических излучениях, чей спектр задается дельта-функцией. Поэтому будем пользоваться следующим уточнением модели (18): функции спектральной чувствительности будем считать элементами пространства Шварца быстро убывающих функций, а спектры – обобщенными функциями, определенными для этого основного пространства.

Судя по колориметрическим экспериментам, человеческое восприятие цвета излучений довольно точно описывается линейной моделью сенсора. Но для плодотворного ее использования, разумеется, необходимо знать конкретный вид функций  $\mathbf{X}(\lambda)$ . И способ экспериментального определения этих функций был найден. В основу его легли эксперименты по уравниванию цвета монохроматических излучений видимого диапазона:

$$\delta(\lambda - \lambda_i) \sim \Upsilon(\mathbf{k}_i), \quad (19)$$

где  $\delta(x)$  – дельта-функция Дирака;  $\lambda_i$  – длина волны уравниваемого по цвету излучения,

а  $\mathbf{k}_i$  – вектор цветовых координат в координатной системе, задаваемой спектрами базисных излучений, используемых в выбранном колориметре. Условие совпадения цветов при уравнивании в линейной модели сенсора задается следующим уравнением:

$$\int_0^{\infty} \delta(\lambda - \lambda_i) \mathbf{X}(\lambda) d\lambda = \int_0^{\infty} (\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{B}(\lambda)) \mathbf{X}(\lambda) d\lambda, \quad (20)$$

где  $\mathbf{B}(\lambda) = [F_A(\lambda), F_B(\lambda), F_C(\lambda)]^T$ , то есть  $Y(\mathbf{k}_i) = \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{B}(\lambda)$ . Уравнение (20) можно упростить до следующего:

$$\mathbf{X}(\lambda_i) = M_B \mathbf{k}_i, \quad M_B = \int_0^{\infty} \mathbf{X}(\lambda) \mathbf{B}^T(\lambda) d\lambda. \quad (21)$$

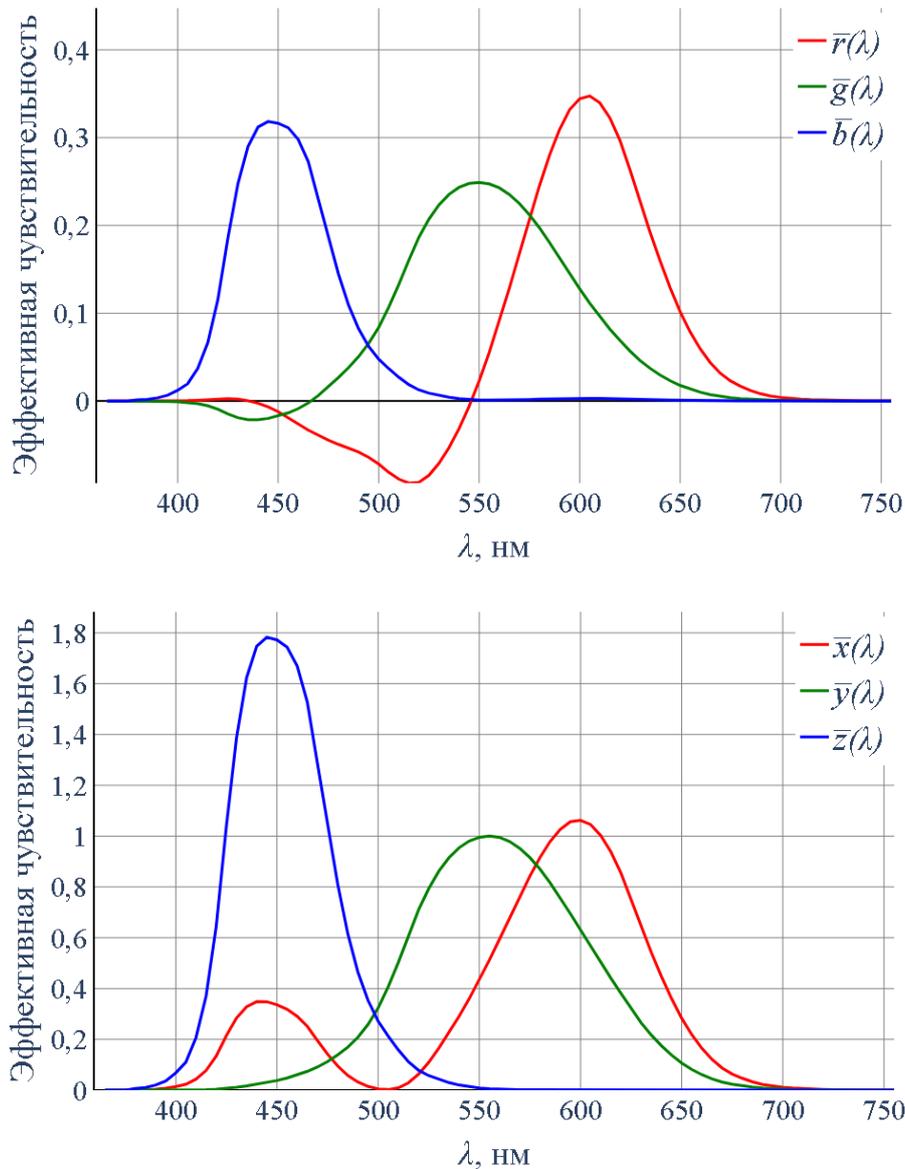
Итак, измеренные колориметром значения  $\mathbf{k}_i$  суть значения искомым функций  $\mathbf{X}$  в точке  $\lambda_i$ , линейно преобразованные фиксированной, но неизвестной матрицей  $M_B^{-1}$ . Преобразованные функции чувствительности принято называть кривыми (или функциями) сложения, а также функциями цветового соответствия (англ. *color matching functions*). В наших обозначениях **кривые сложения**  $\mathbf{X}^+(\lambda)$  выражаются следующим образом:

$$\mathbf{X}^+(\lambda) = M_B^{-1} \mathbf{X}(\lambda). \quad (22)$$

Метод уравнивания цвета монохроматических излучений был использован МКО для унификации характеристик цвета во время цветовых измерений и расчетов путем введения эталона для определения цветовых ощущений на основе усредненных характеристик человеческого глаза. Результатом работы комиссии в 1931 году стал стандарт, названный стандартным колориметрическим наблюдателем 1931 года.

В основу стандарта легли результаты экспериментов Дж. Гилда и Д. Райта по уравниванию цвета монохроматических излучений в базисе трех монохроматических же излучений с длинами волн 700; 546,1 и 435,8 нм (условно – красного, зеленого и синего цветов). Колориметрические измерения показали, что для воспроизведения белого цвета (равноэнергетического спектра) соотношение мощностей таких излучений должно составлять 52,3:1:0,724. Поэтому в качестве базиса были выбраны монохроматические спектры с амплитудами, удовлетворяющими этому соотношению, в результате чего цветовые векторы равноэнергетических источников света оказались лежащими на главной диагонали координатной системы. Кривые сложения в таком базисе принято обозначать  $\bar{r}(\lambda)$ ,  $\bar{g}(\lambda)$  и  $\bar{b}(\lambda)$ . Здесь следует заметить, что в большинстве литературных источников приводится иное численное соотношение амплитуд базисных излучений, но там оно дается для редуцированных фотометрических величин, поэтому противоречия здесь нет. Редуцированные фотометрические величины зависят от определения кривой видности, которая, как было упомянуто в разделе 1.1, требует существенного уточнения. Поэтому в данном пособии соотношение приводится в виде, не требующем ее использования.

Как было показано экспериментально, кривые сложения зрительной системы человека довольно заметно зависят от возбуждаемого участка сетчатки, поэтому стандарт должен был включать и этот параметр. В 1931 году МКО стандартизовала отклик глаза человека для угловой апертуры в  $2^\circ$  внутри центральной ямки (фовеа, от лат. *fovea*) – области максимальной чувствительности глаза. Кривые сложения были табулированы с интервалом 5 нм.



**Рис. 4.** Спектральные характеристики стандартного колориметрического наблюдателя 1931 года: *сверху* – исходные кривые сложения; *снизу* – соответствующий им базис XYZ (рисунок предоставлен О. А. Басовой, сотрудницей лаб. 11 ИПФИ РАН)

На рис. 4, *сверху* представлены графики кривых сложения стандартного наблюдателя. Видно, что функции принимают как положительные, так и отрицательные значения. Из определений физических величин следует, что ни спектральная яркость, ни спектральная освещенность не могут быть отрицательными. А может ли быть отрицательной спектральная чувствительность? И в фотохимических, и в фотоэлектрических эффектах спектральная чувствительность характеризует вероятность участия фотона данной длины волны в соответствующем процессе, то есть по смыслу не может быть меньше нуля. К сожалению, это еще не гарантирует неотрицательности введенных нами  $X(\lambda)$ . Действительно, если опираться исключительно на колориметрические опыты, то нет оснований отвергать возможность существования двух типов светочувствительных рецепторов (с несовпадающими неотрицательными функциями чувствительности), которые действуют исключительно в паре и вызывают отклонения некоторого сигнала от равновесного значения в противоположные стороны. Единая функция чувствительности такого составного элемента

может быть переменнзначной. Впрочем, в реальных биологических и технических системах такая конструкция не встречается, и истинные  $\mathbf{X}(\lambda)$  разумно считать неотрицательными. Тогда существует линейное преобразование, которое переводит кривые сложения  $\mathbf{X}^+(\lambda)$  в набор неотрицательных функций.

Довольно очевидно, что подобных преобразований бесконечно много: множество невырожденных матриц с неотрицательными элементами несчетно, а каждая такая матрица переведет вектор неотрицательных спектров  $\mathbf{X}(\lambda)$  в другой вектор также неотрицательных функций. Поэтому перед МКО в 1931 году встал вопрос о выборе в качестве стандарта того или иного конкретного набора неотрицательных функций, получивших впоследствии обозначения  $\bar{x}(\lambda)$ ,  $\bar{y}(\lambda)$  и  $\bar{z}(\lambda)$ .

Функция  $\bar{y}(\lambda)$  для удобства была приравнена к кривой видности  $V(\lambda)$  в варианте 1924 года. Это не противоречило неотрицательности  $\bar{x}(\lambda)$  и  $\bar{z}(\lambda)$ , а конкретный вид этих функций был выбран из условия минимальности объема тетраэдра, определяемого ортами нового базиса. Графики выбранных в результате функций представлены на рис. 4, *снизу*. Задаваемая ими система цветовых координат получила название CIE XYZ.

Мы не будем называть функции базиса CIE XYZ кривыми сложения, поскольку не существует трех спектров, при использовании которых в реальном колориметрическом эксперименте получились бы эти кривые (соответствующие функции имеют отрицательные значения). Будем обозначать их  $\mathbf{X}_x(\lambda)$  и называть функциями спектральной чувствительности стандартного наблюдателя (хотя они и не совпадают с реальными спектрами чувствительности сетчатки человека), поскольку сенсор с такими значениями чувствительности может существовать и в колориметрическом эксперименте он дал бы кривые сложения, совпадающие с таковыми для человека. Функции  $\mathbf{X}_x(\lambda)$  нормированы так, что цвет равноэнергетического источника (со спектральной яркостью, не зависящей от длины волны в видимом диапазоне) в CIE XYZ лежит на главной диагонали. Матрица, связывающая  $\mathbf{X}_x(\lambda)$  с кривыми сложения, имеет следующий вид:

$$\mathbf{X}_x(\lambda) = \begin{bmatrix} 2,768892 & 1,751748 & 1,130160 \\ 1 & 4,590700 & 0,060100 \\ 0 & 0,056508 & 5,594292 \end{bmatrix} \mathbf{X}^+(\lambda). \quad (23)$$

Итак, **стандартный наблюдатель** [1931 года] – это линейный цветовой сенсор с вектором функций чувствительности, равным  $\mathbf{X}_x(\lambda) = [\bar{x}(\lambda), \bar{y}(\lambda), \bar{z}(\lambda)]^T$  (рис. 4, *снизу*).

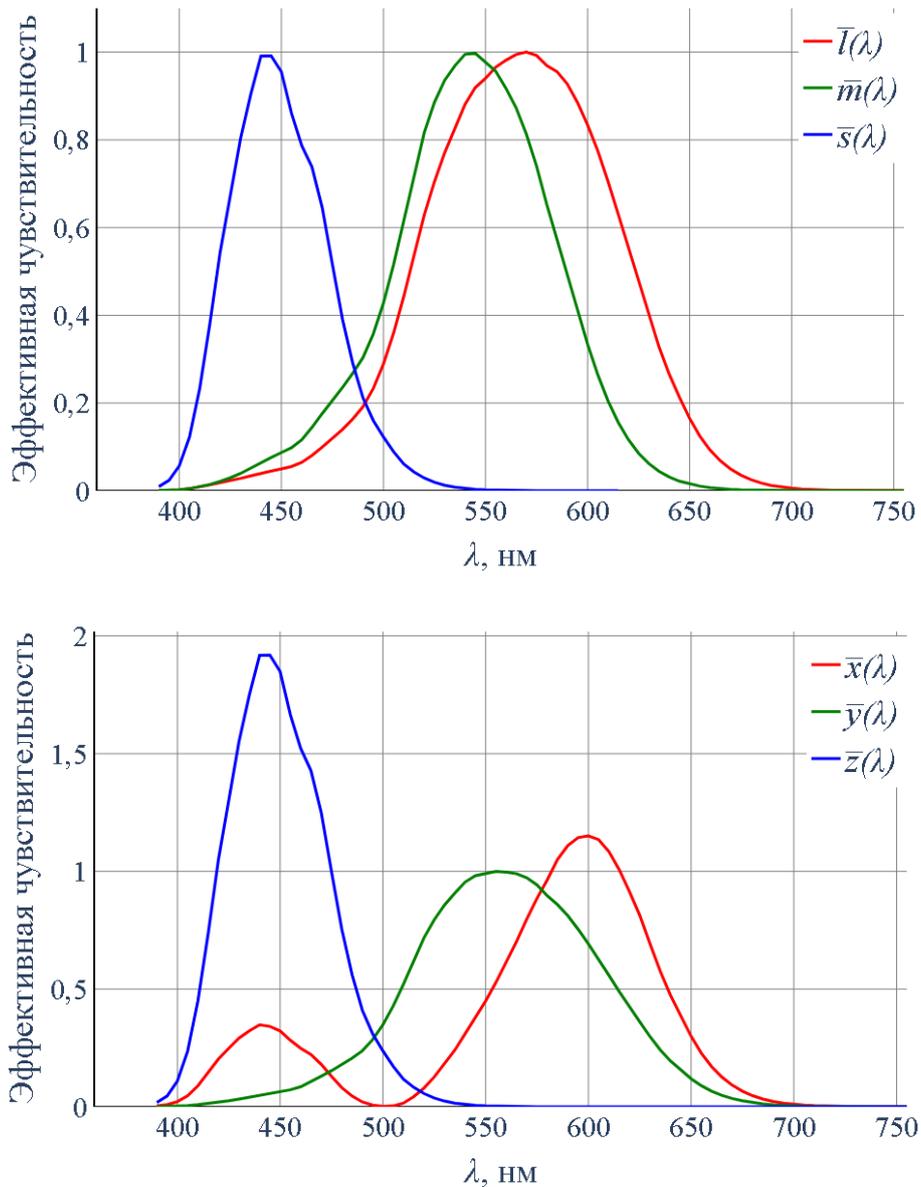
Несмотря на то что система МКО 1931 года была официально признана во всем мире, у нее довольно скоро обнаружился ряд недостатков, один из которых – малый размер поля, выделенного для исследуемого образца. Поэтому был стандартизован еще один набор функций, названных кривыми сложения дополнительного стандартного колориметрического наблюдателя МКО 1964 года. Эти кривые сложения были построены на основе опытов, выполненных В. Стайлсом, Дж. Берчем и Н. Сперанской. Угол поля зрения при уравнивании цветов был на этот раз равен не  $2^\circ$  (как в первоначальных экспериментах), а  $10^\circ$ , что соответствует восприятию цветовых полей большего размера. (Для лучшего понимания укажем, что для предмета на расстоянии 1 м угол зрения, равный  $2^\circ$ , соответствует площадке

диаметром 3,5 см, а  $10^\circ$  – площадке диаметром 17,5 см.) МКО до сих пор рекомендует к использованию обе системы кривых сложения с обязательным уточнением выбранного варианта.

Колориметрические модели хорошо согласуются с современными физиологическими данными. Достоверно известно, что в нормальных дневных условиях высокой освещенности (более  $10 \text{ кд/м}^2$ ), называемых фотопическими, в глазу активны фоторецепторы (колбочки) трех типов: L (длинноволновые), M (средневолновые) и S (коротковолновые), – однако точный вид функций спектральной чувствительности этих рецепторов остается предметом острых методических дискуссий. Как правило, соответствующие функции чувствительности нормированы так же, как в CIE XYZ: цвет равноэнергетического источника лежит на главной диагонали. Обычно считается также, что системы координат LMS и CIE XYZ линейно связаны с точностью, достаточной для практических применений. Параметры же этого линейного преобразования значительно варьируются, при этом разные системы цветовых координат могут именоваться одинаково (LMS), что следует учитывать при научно-исследовательской работе.

Здесь следует заметить, что в условиях слабого ночного освещения (менее  $0,01 \text{ кд/м}^2$ ), называемых скотопическими, колбочки практически не участвуют в зрении и наша способность различать предметы обеспечивается палочками – высокочувствительными рецепторами одного типа. В сумеречных, или мезопических, условиях ( $0,01\text{--}10 \text{ кд/м}^2$ ) активны все четыре типа рецепторов. В данном пособии мы касаемся исключительно вопросов цветового зрения в фотопических условиях, поскольку современные технические системы, как правило, адаптированы именно под фотопическое цветовое зрение человека. И именно в этих условиях модели LMS (и связанные с ними модели, включая CIE XYZ) адекватно описывают свойства цветового зрения.

В 2000 году А. Стокман и Л. Шарп опубликовали уточненные данные о спектрах чувствительности колбочек глаза человека. В связи с этим в 2006 году технический комитет МКО опубликовал рекомендации (иногда называемые в литературе моделью наблюдателя CIE 2006) по расчету функций цветового соответствия и оценок основных параметров колбочек. Эти рекомендации закрепляют удобную процедуру расчета чувствительности рецепторов для любого размера поля от  $1$  до  $10^\circ$  и для возраста наблюдателей от 20 до 80 лет. Соответствующие функции цветового соответствия могут быть получены путем линейного преобразования параметров чувствительности колбочек. На рис. 5 показаны функции чувствительности колбочек CIE 2006 для размера  $2^\circ$  (базис координатной системы LMS) и базис XYZ, им соответствующий (и не совпадающий со стандартом 1931 года).



**Рис. 5.** Один из вариантов базисных функций LMS (*сверху*) и соответствующие им базисные функции XYZ (*снизу*) (рисунок предоставлен О. А. Басовой)

Матрица перехода из LMS модели CIE 2006 к соответствующим координатам XYZ выглядит следующим образом:

$$\mathbf{XYZ} = \begin{bmatrix} 1,94735469 & -1,41445123 & 0,36476327 \\ 0,68990272 & 0,34832189 & 0 \\ 0 & 0 & 1,93485343 \end{bmatrix} \mathbf{LMS}. \quad (24)$$

Важно знать, что базисные функции XYZ, основанные на данных Стокмана и Шарпа, еще не приняты МКО в качестве стандарта, хотя этот вопрос и рассматривается с 2012 года.

Введение понятия стандартного наблюдателя в колориметрии, по существу, основано на предположении, что вся популяция наблюдателей с нормальным цветовым зрением может быть описана единой моделью. Точность и границы применимости такой модели при этом остаются дискуссионными вопросами. В 1989 году МКО признала изменчивость

цветовосприятия среди отдельных наблюдателей, введя концепцию наблюдателя со стандартным отклонением, но при этом сильно недооценила степень изменчивости, в результате чего концепция не была принята. Сама дисперсия свойств при этом не подвергается сомнению, и существуют ситуации, когда различия между наблюдателями учитывать необходимо. Интересно, что эти различия могут быть не только врожденными. Так, у курильщиков, по утверждению специалистов, происходит постепенное пожелтение не только зубов, но и роговицы, что изменяет параметры цветовосприятия.

Хотя концепция усредненного стандартного наблюдателя достаточно точна для целей полиграфии и дизайна, она оказалась слишком грубой при оценке восприятия цветных изображений на современных потребительских дисплеях с широкой цветовой гаммой. В отличие от красителей в полиграфии, цвет на современных дисплеях может синтезироваться узкополосными излучениями, в результате чего небольшие смещения функций чувствительности по оси длин волн приводят к существенному изменению восприятия таких смесей. Для подобных случаев в последнее время разрабатываются модели с несколькими категориями наблюдателей и соответствующими им функциями цветового соответствия (см., например, [11]).

## 1.4. Цвет и технические системы

Вернемся к понятию метамерии. Ранее мы уже упоминали, что одно и то же цветовое ощущение может быть вызвано излучениями разного спектрального состава, называемыми метамерными. Линейная модель сенсора позволяет нам количественно исследовать это явление, рассматривая все разнообразие неразличимых спектров.

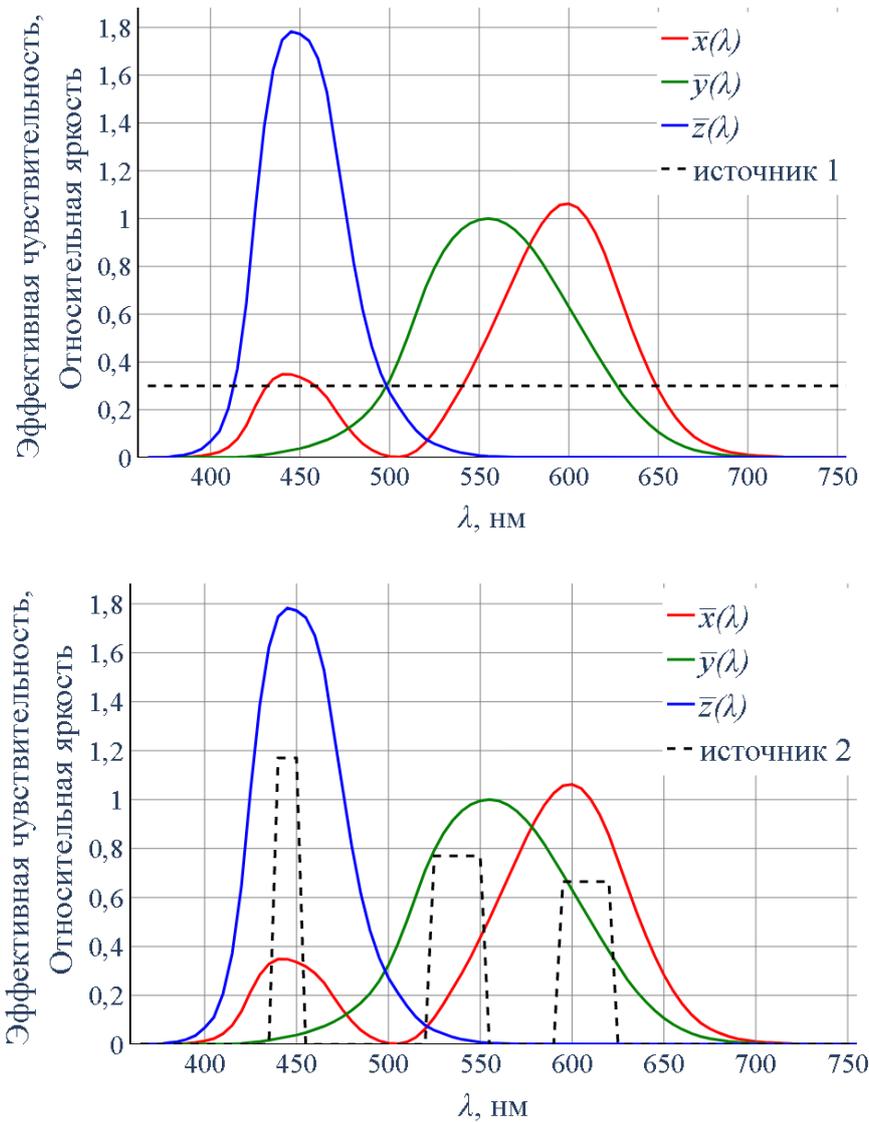
Метамерия  $F_1(\lambda) \sim F_2(\lambda)$  имеет место тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие:

$$\int_0^{\infty} \Delta(\lambda) \mathbf{X}(\lambda) d\lambda = \mathbf{0}, \quad (25)$$

где  $\Delta(\lambda) = F_2(\lambda) - F_1(\lambda)$ . Поскольку мы условились считать чувствительности  $\mathbf{X}(\lambda)$  неотрицательными, то функция  $\Delta(\lambda)$  должна либо быть сосредоточенной вне видимого диапазона (то есть ее носитель не должен пересекаться с носителями  $\mathbf{X}(\lambda)$ ), либо являться переменнзначной.

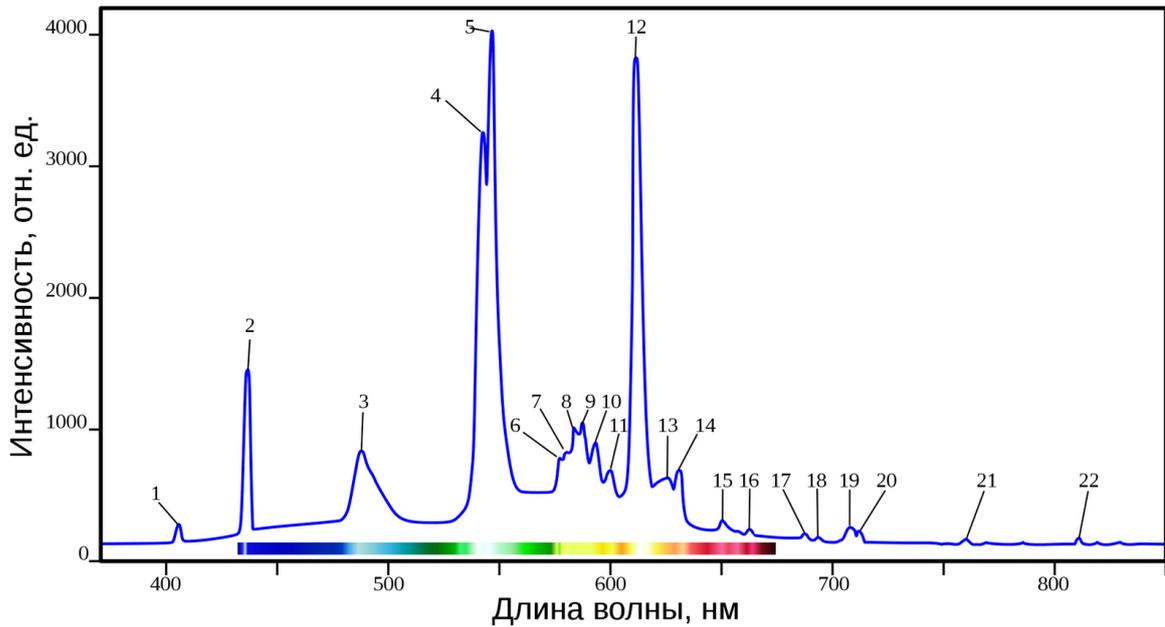
Здесь мы рассматриваем сенсор с одним набором спектров чувствительности, и обсуждение метамеров первого типа кажется бессмысленным, ведь все многообразие сконструированных таким образом спектров фактически ненаблюдаемо. Впрочем, и такие метамеры не всегда можно игнорировать. Пока же сосредоточимся на втором случае.

Для простоты рассмотрим спектр  $F_1(\lambda)$ , строго больший нуля во всем видимом диапазоне. Для любой  $\Delta(\lambda)$ , которая обращается в нуль в некоторой окрестности концов видимого интервала и удовлетворяет условию (25), найдется такой неотрицательный множитель  $\alpha$ , что  $F_1(\lambda) + \alpha\Delta(\lambda) \geq 0$ . При этом  $F_1(\lambda) \sim F_1(\lambda) + \alpha\Delta(\lambda)$ . Условие (25) не накладывает ограничений на форму функции  $\Delta(\lambda)$ , поэтому разнообразие метамеров с математической точки зрения практически безгранично. Но с точки зрения физики наше построение неубедительно: параметр  $\alpha$  может быть весьма мал, а в этом случае метамерией скорее всего можно пренебречь.



**Рис. 6.** Две функции спектральной яркости (штриховые линии на верхнем и нижнем графиках), метамерные для стандартного наблюдателя, на фоне графиков функций спектральной чувствительности стандартного наблюдателя (цветные сплошные линии). Яркость и чувствительность заданы в условных единицах (рисунок предоставлен О. А. Басовой)

Поэтому рассмотрим, насколько метамерные спектры могут различаться между собой по абсолютным значениям. На рис. 6 штриховыми линиями изображены спектр яркости равноэнергетического источника (*сверху*) и некоторый полосовой спектр яркости (*снизу*). Несмотря на разительное различие в форме графиков, обе функции при подстановке в модель стандартного наблюдателя дают одно и то же значение цветового вектора. Впрочем, у читателя может возникнуть закономерное сомнение: насколько реалистичен такой пример? Мы уже убедились, что в теории метамерные спектры могут быть весьма различны, но возможно ли такое на практике? На рис. 7 приведен график спектральной яркости реальной люминесцентной лампы. Наличие у этой функции резких пиков в произвольных местах говорит вдумчивому исследователю, что метамерию излучений не стоит игнорировать не только в теории, но и в практических приложениях.



**Рис. 7.** Спектр люминесцентной лампы с редкоземельным люминофором. Цифрами обозначены пики (URL: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Fluorescent\\_lighting\\_spectrum\\_peaks\\_labelled.png](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Fluorescent_lighting_spectrum_peaks_labelled.png))

Линейная модель сенсора хорошо подходит и для описания технических зрительных систем. Разумеется, говорить об ощущениях в этом случае бессмысленно, и под цветом при рассмотрении технических систем обычно понимается трехмерный вектор  $\mathbf{c}$ , передаваемый для дальнейшей обработки. Но наиболее существенно то, что спектральный базис  $\mathbf{X}(\lambda)$  цветового пространства камеры почти всегда значительно отличается от базиса стандартного наблюдателя:

$$\mathbf{c}(x, y) = \int_0^{\infty} F(\lambda, x, y) \mathbf{X}(\lambda) d\lambda, \quad \mathbf{X}(\lambda) \neq \mathbf{X}_x(\lambda). \quad (26)$$

Более того, камеры разных производителей, как правило, имеют различающиеся цветовые пространства. Все они подвержены метамерии в не меньшей степени, чем человек, но излучения, метамерные для человека, могут регистрироваться камерой как несовпадающие цвета, и наоборот.

Пространственное распределение  $\mathbf{c}(x, y)$  цветового вектора, регистрируемое видеокамерой, называется цифровым **цветным изображением**. Будем считать, что цветные изображения формируются зрительной системой человека при восприятии сцен физического мира, хотя такие изображения и недоступны для измерения. Помимо цифровых, существует и иной класс изображений – физические цветные изображения (например, иллюстрации в книгах), но первое слово обычно опускают, если оно ясно из контекста.

## 2. Топология и геометрия цветового пространства

Сенсор с линейным базисом. Математическое определение цвета. Цветовое пространство и цветовые координаты. Естественная система цветовых координат сенсора с линейным базисом. Спектральный конус. Цветовой конус. Цветность. Плоскость цветности. Чистые спектральные цвета. Спектрально-цветовой locus. Цветовой треугольник. Цветовой тон. Круг Ньютона. Спектральные и неспектральные тона. Насыщенность. Яркость. Цветовое тело Лютера – Ньюберга. Предельные окраски. Светлота. Грязные цвета.

Рекомендуемая литература: работы [12, 13].

В разделе 1 мы обосновали линейную модель цветового сенсора и ее частный случай – модель стандартного колориметрического наблюдателя. Обсудим теперь смысл термина «линейность», применяемого к этим моделям. Пусть в ответ на спектральный стимул  $F(\lambda)$  сенсор некоторой зрительной системы дает отклик  $\mathbf{c}$ , описываемый следующей (в общем случае нелинейной) моделью:

$$\mathbf{c} = \Phi \left( \int_0^\infty F(\lambda) \mathbf{X}(\lambda) d\lambda \right), \quad (27)$$

где  $\Phi$  – произвольная обратимая непрерывная функция. Такой сенсор мы будем называть **сенсором с линейным базисом**  $\mathbf{X}(\lambda)$ . Постулируем, что рассматриваемая зрительная система способна корректно проверять векторы  $\mathbf{c}$  на совпадение. Нетрудно убедиться, что эксперименты с колориметром, аналогичные проведенным МКО, над такой зрительной системой позволят установить (с точностью до линейного преобразования) базис  $\mathbf{X}(\lambda)$ , но не функцию  $\Phi$ . При этом построенная с помощью колориметра модель будет линейной, даже если отклик (27) сенсора существенно нелинеен. Более того, если  $\dim \mathbf{c} > \dim \mathbf{X}$  (это не противоречит обратимости), то размерность построенной модели будет совпадать с размерностью вектора функций чувствительности  $\mathbf{X}(\lambda)$  сенсора, а не с размерностью цветового вектора  $\mathbf{c}$ , обрабатываемого зрительной системой.

Итак, колориметрические эксперименты свидетельствуют о том, что цветоразличительные свойства сетчатки человека могут быть аппроксимированы моделью сенсора с линейным базисом, а не о том, что сетчатка обеспечивает линейный отклик. Кроме того, мы можем сделать вывод о том, что преобразования цветовых векторов в зрительном тракте обратимы, иначе для некоторых цветов задача колориметрического выравнивания имела бы более одного решения. Линейность же, которую мы постулировали в наших моделях, – это линейность введенных нами систем координат по отношению к освещенности сенсора, а не линейность тех или иных биологических или физических систем.

Вышесказанное указывает на то, что во избежание путаницы следует различать пространство цветов и пространство цветовых координат. Дадим **математическое определение цвета**, подобное определению Шредингера, но применимое и к техническим системам. **Цветом будем называть множество излучений, неразличимых для данного сенсора, а цветовым пространством – множество всех цветов данного сенсора.** Цветовые пространства различны, если различны множества неразличимых излучений. (Цветовые пространства сенсоров с линейным базисом могут не совпадать, если их базисы различны.)

Для картирования цветового пространства используются системы цветовых координат

(СЦК). В любой из них  $\mathbf{c}$  – вектор **цветовых координат** – связан с освещенностью  $F(\lambda)$  сенсора некоторым вектор-функционалом  $\Psi$ :

$$\mathbf{c} = \Psi[F(\lambda)]. \quad (28)$$

Если функционал  $\Psi$  линеен, то будем говорить, что он задает линейную СЦК (ЛСЦК).

Для картирования одного и того же цветового пространства могут использоваться разные СЦК. Так, для цветов стандартного наблюдателя известно множество координатных систем, отличающихся удобством при тех или иных применениях. В разделе 1 мы уже упоминали СЦК LMS, моделирующую отклики отдельных колбочек. В текущем разделе мы познакомимся с двумя нелинейными СЦК с циклическим цветовым тоном, координаты которых легко интерпретируются человеком. Кроме того, существует группа так называемых равноконтрастных координатных систем (ее типичным представителем является СЦК CIELAB), евклидово расстояние в которых аппроксимирует различие цветов в восприятии человека. Цветовой вектор  $\mathbf{c}_\phi$  любой из них может быть выражен через координаты CIE XYZ без знания  $F(\lambda)$ :

$$\mathbf{c}_\phi = \Psi_\phi[F(\lambda)] = \Phi(\mathbf{c}_x), \quad (29)$$

где  $\Phi$  – преобразование координат из CIE XYZ в рассматриваемую СЦК. **Естественной СЦК сенсора с линейным базисом  $\mathbf{X}(\lambda)$**  будем называть СЦК, вид функционала  $\Psi$  для которой совпадает с линейной моделью цветового сенсора (18) с вектором функций чувствительности  $\mathbf{X}(\lambda)$ . Очевидно, что естественная СЦК является ЛСЦК. Естественная СЦК сенсора с линейным базисом  $\mathbf{X}_x(\lambda)$  – CIE XYZ. Вооружившись этими терминами, мы готовы исследовать геометрию цветового пространства в линейных координатах.

## 2.1. Структура цветов излучений

Множество  $C$  элементов векторного пространства называется заостренным конусом (иногда просто конусом), если для любых  $\mathbf{v} \in C$  и  $\alpha \geq 0$  выполняется также условие  $\alpha \mathbf{v} \in C$ . Множество  $C$  называется выпуклым, если для любых  $\mathbf{v}_a, \mathbf{v}_b \in C$ ,  $\alpha, \beta \geq 0$  и  $\alpha + \beta = 1$  верно условие  $\alpha \mathbf{v}_a + \beta \mathbf{v}_b \in C$ . Выпуклое множество, являющееся конусом, называют выпуклым конусом. Любое линейное подпространство является выпуклым конусом, но не всякий выпуклый конус является линейным подпространством. Линейные пространства не принято называть конусами, поскольку линейная структура гораздо мощнее.

Рассмотрим пространство спектральных плотностей яркости и освещенности. Для краткости в этом разделе будем называть спектральные плотности просто спектрами. В разделе 1 мы договорились считать спектры всюду неотрицательными функциями неотрицательного аргумента. Поскольку любой спектр  $F(\lambda)$ , домноженный на  $\alpha \geq 0$ , остается неотрицательной функцией – спектром, то пространство спектров является конусом. Этот конус – выпуклый, но тривиальное доказательство этого факта мы опустим.

При этом пространство спектров, в отличие от пространств произвольных функций, не является линейным пространством. Действительно, если  $F(\lambda) \neq 0$  – спектр, то при домножении на  $\alpha < 0$  мы получим уже не спектр, поскольку  $\alpha F(\lambda)$  заведомо содержит отрицательные значения. Итак, одна из аксиом линейности не выполнена. Поэтому мы будем называть пространство спектральных плотностей **спектральным конусом**, чтобы не создавать иллюзии, что перед нами векторное (линейное) пространство.

Докажем теперь, что цветовое пространство в любой ЛСЦК также является выпуклым конусом. Рассмотрим цвет, задаваемый вектором  $\mathbf{c}$  реакции сенсора с ЛСЦК, определяемой вектор-функционалом  $\Psi$ . Поскольку это цвет, то существует как минимум один спектр, вызывающий такую реакцию. Обозначим его  $F(\lambda)$ :  $\mathbf{c} = \Psi[F(\lambda)]$ . Для любого  $\alpha \geq 0$  вектор  $\alpha\mathbf{c}$  также является цветом, так как не пусто множество спектров, вызывающих такую реакцию: из линейности  $\Psi$  следует, что спектр  $\alpha F(\lambda)$  имеет цвет с требуемыми координатами. Таким образом, цветовое пространство – конус в ЛСЦК.

Выпуклость этого конуса доказывается аналогично: для любых двух цветов можно указать соответствующие спектры, спектральный конус – выпуклый, а это гарантирует, что любая выпуклая комбинация цветовых векторов также задает цвет. Не менее очевидно, что цветовое пространство не является линейным пространством. Поэтому цветовое пространство мы будем синонимично называть **цветовым конусом**.

Заметим, что векторы ЛСЦК образуют линейное пространство. Это автоматически означает, что не все векторы этого пространства соответствуют цветам.

Здесь следует предупредить читателя, что введенные нами в этом разделе термины не вполне соответствуют общепринятым. В литературе авторы чаще всего используют терминологию, принятую по ГОСТ 13088-67 [12]. В этом стандарте, в отличие от нашей терминологии, цветовым пространством называется все пространство цветовых векторов (вне зависимости от того, можно ли получить такой отклик от сенсора). Для векторов, которым не соответствуют никакие реальные стимулы (например, вектор  $[0 \ 0 \ 1]^T$  в СIE XYZ не может быть реакцией стандартного наблюдателя ни на один стимул), используется термин «нереальные цвета». При этом область пространства цветовых векторов, содержащая реальные цвета, в колориметрическом ГОСТе называется цветовым конусом, и здесь разночтений не возникает.

В целом литература по цветовому восприятию полна всевозможных уникальных терминов, используемых отдельными авторами, различных трактовок одних и тех же терминов, а также синонимичных терминов. Так, Н. Д. Ньюберг, чьи разработки и легли в основу ГОСТ 13088-67, в «Физическом энциклопедическом словаре» для цветового конуса дополнительно вводит термин «спектральный конус» (статья «Цветовые измерения (колориметрия)» [2, с. 387–389]). Подчеркнем, что в данном пособии этот термин означает иное (что не противоречит ГОСТу).

Используемая нами терминология почти всегда соответствует ГОСТ 13088-67, а некоторые отличия объясняются желанием не вступать в противоречие с фундаментальными колориметрическими определениями. В частности, явное различие цвета и цветового вектора позволяет использовать определение Шредингера без дополнительных оговорок.

Введем теперь еще несколько важных цветовых понятий. Если какая-либо точка лежит в цветовом конусе, то ему принадлежит и луч, исходящий из начала координат и проходящий через эту точку. Говорят, что все цвета, лежащие на таком луче, различаются яркостью (чем дальше от начала координат, тем больше яркость), но имеют одинаковую **цветность**. Вне зависимости от конкретной координатной системы пару координат, позволяющих картировать все лучи цветового конуса, можно называть координатами цветности. Возьмем плоскость, не проходящую через начало координат, такую, что центральная проекция цветового конуса из точки  $\mathbf{0}$  на нее конечна. Координаты, введенные на этой плоскости, можно использовать как координаты цветности. В таком случае плоскость принято называть

**плоскостью цветности.**

Любые две плоскости цветности одного цветового пространства связаны проективным преобразованием. Проективное подобие сохраняется, даже если рассматриваются две разные ЛСЦК, связанные линейным преобразованием (например, СIE XYZ и LMS). Действительно, любая прямая на первой плоскости цветности является образом плоскости, проходящей через точку  $\mathbf{0}$ , в соответствующей СЦК. Поскольку СЦК связаны линейным преобразованием, то образ рассматриваемой плоскости во второй СЦК – также плоскость, проходящая через точку  $\mathbf{0}$ , а ее проекция на вторую плоскость цветности – прямая. Итак, любая прямая первой плоскости соответствует прямой на второй плоскости (и наоборот), откуда следует проективное подобие двух плоскостей.

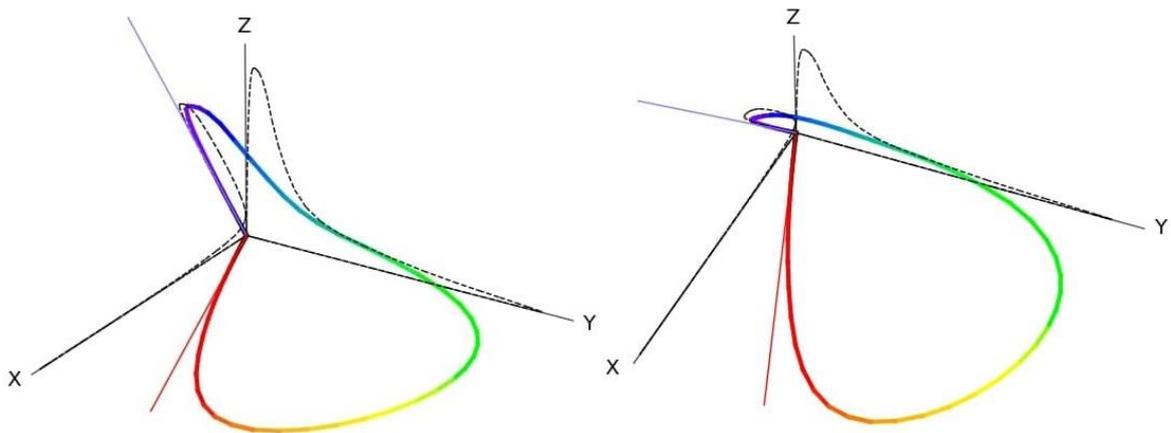
Рассмотрим естественную СЦК сенсора с линейным базисом  $\mathbf{X}(\lambda) \geq \mathbf{0}$  (такова, в частности, СIE XYZ). Будем задавать плоскость нормальным уравнением относительно  $\mathbf{c}$ :

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{c} = d, \quad \|\mathbf{n}\|_2 = 1. \quad (30)$$

Тогда любая плоскость с  $\mathbf{n} > \mathbf{0}$  и  $d > 0$  может служить плоскостью цветности. Почему это так? Согласно выражению (18), из  $\mathbf{X}(\lambda) \geq \mathbf{0}$  и  $F(\lambda) \geq 0$  следует  $\mathbf{c} \geq \mathbf{0}$  (все цвета лежат в главном октанте ЛСЦК). Образ главного октанта на любой из рассматриваемых нами плоскостей – конечный треугольник, а за его пределы не может выходить цветность никакого цвета.

**Чистыми спектральными цветами  $\mathbf{c}_\delta$**  будем называть цвета монохроматических излучений:

$$\mathbf{c}_\delta(\lambda, \alpha) = \int_0^\infty \alpha \delta(\lambda_0 - \lambda) \mathbf{X}(\lambda_0) d\lambda_0 = \alpha \mathbf{X}(\lambda), \quad \alpha > 0. \quad (31)$$

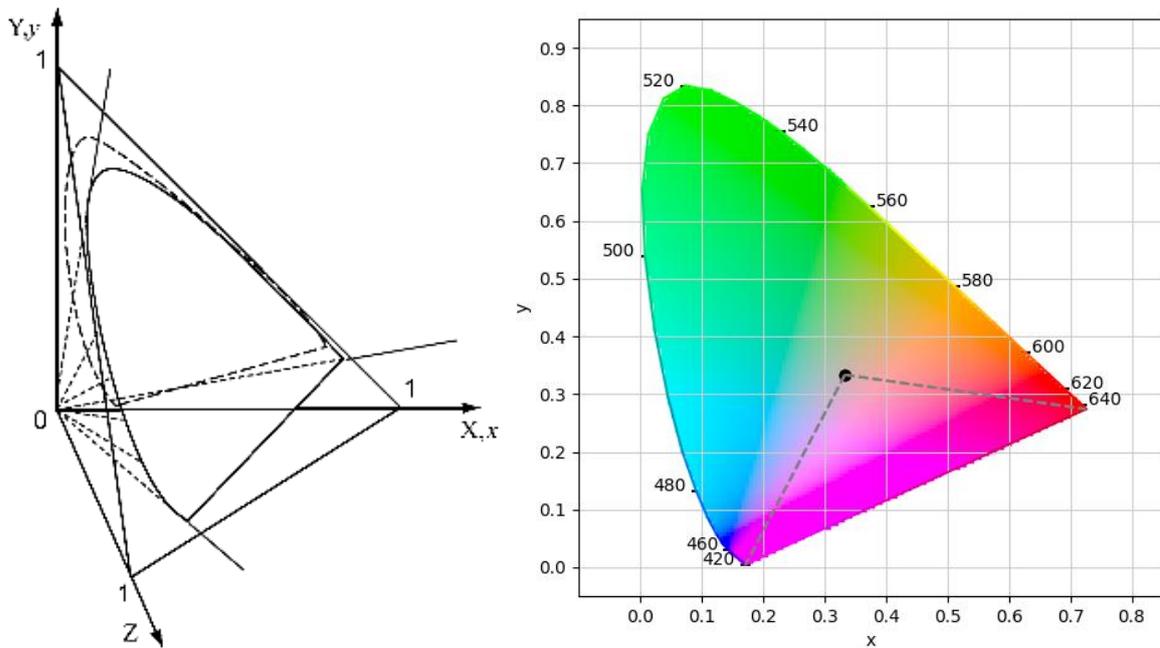


**Рис. 8.** Два ракурса спектрально-цветового локуса стандартного наблюдателя в системе координат СIE XYZ. Штриховыми линиями отмечены проекции локуса на координатные плоскости; цветными лучами (красным и фиолетовым) обозначены касательные к излому локуса в начале координат (рисунок предоставлен О. А. Басовой)

Чистые спектральные цвета  $\mathbf{c}_\delta(\lambda, 1)$  излучений с единичным интегралом спектральной яркости составляют однопараметрическое семейство. Будем называть его **спектрально-цветовым локусом**. Для стандартного наблюдателя этот локус является в ЛСЦК замкнутой кривой без разрывов, проходящей через начало координат. Принято считать, что для стандартного наблюдателя вся эта кривая покрывается реакциями на монохроматическое излучение с длинами волн в диапазоне от 380 до 750 нм. Излучения вне этого диапазона с хорошей точностью проецируются в начало координат. Вид спектрально-цветового локуса стандартного наблюдателя в системе координат СIE XYZ приведен на рис. 8.

Область плоскости цветности, содержащая проекции всевозможных цветов, называется **цветовым треугольником**. Цветовой треугольник является выпуклой оболочкой проекции спектрально-цветового локуса на плоскость цветности. Откуда это следует? Во-первых, проекция спектрально-цветового локуса на плоскость цветности совпадает с проекцией на нее всех чистых спектральных цветов. Во-вторых, цвет  $\mathbf{c}$  излучения любого спектрального состава  $F(\lambda)$  может быть представлен как непрерывная смесь чистых спектральных цветов:

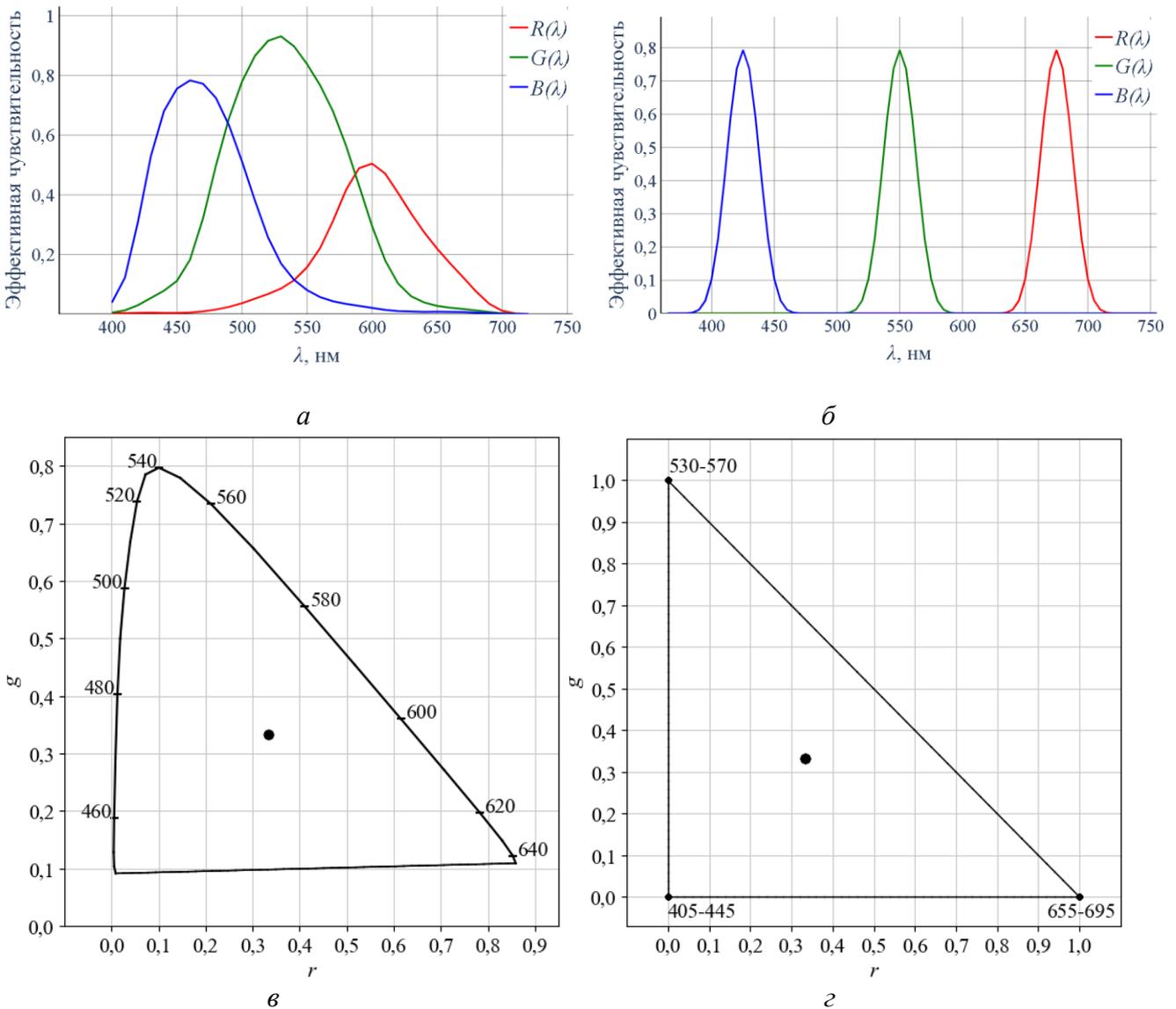
$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= \int_0^{\infty} F(\lambda) \mathbf{X}(\lambda) d\lambda = \\ &= \int_0^{\infty} F(\lambda) \int_0^{\infty} \mathbf{X}(\lambda_0) \delta(\lambda_0 - \lambda) d\lambda_0 d\lambda = \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} F(\lambda) \delta(\lambda_0 - \lambda) \mathbf{X}(\lambda_0) d\lambda_0 d\lambda = \\ &= \int_0^{\infty} \mathbf{c}_{\delta}(\lambda, F(\lambda)) d\lambda. \end{aligned} \tag{32}$$



**Рис. 9.** Цветовой конус (штриховая линия) в пространстве CIE XYZ и его параллельная проекция (сплошная линия) на плоскость XY (слева); вид цветового треугольника в этой плоскости в условных цветах с указанием длин волн для чистых спектральных цветов (справа) (URL: [https://new2.intuit.ru/EDI/15\\_10\\_17\\_5/1508019676-18691/tutorial/265/objects/1/files/1\\_8.jpg](https://new2.intuit.ru/EDI/15_10_17_5/1508019676-18691/tutorial/265/objects/1/files/1_8.jpg))

На рис. 9 показано сечение цветового конуса стандартного наблюдателя в системе координат CIE XYZ плоскостью  $[1 \ 1 \ 1]\mathbf{c}=1$  и соответствующий цветовой треугольник. Из рисунка видно, что цветовой треугольник стандартного наблюдателя не является геометрическим треугольником. Кроме того, кривая чистых спектральных цветов на плоскости цветности оказывается незамкнутой. Это неожиданно, поскольку прообраз этой кривой – спектрально-цветовой локус – замкнут. Здесь нет ошибки. Рассматриваемая проекция – центральная, а локус проходит через центр проекции, причем испытывает в этой точке излом. На рис. 8 красным и фиолетовым лучами обозначены две касательные к локусу в точке  $\mathbf{0}$ . Их проекции на плоскость цветности и ограничивают отрезок кривой, задающий значения цветности чистых спектральных цветов. Цветовой треугольник замыкается отрезком, соединяющим эти две точки. Лежащие на этом отрезке пурпурные цвета не могут быть воспроизведены монохроматическим излучением, а только смешением в разных

соотношениях красного и синего излучений.



**Рис. 10.** Примеры цветных треугольников сенсоров, отличных от стандартного наблюдателя (в ЛСЦК, связанной с приведенными функциями чувствительности): *a*, *б* – спектральные функции чувствительности сенсора; *в*, *г* – соответствующие цветные треугольники; *a*, *в* – сенсор фотоаппарата Canon EOS 600D; *б*, *г* – воображаемый сенсор со спектрально-разделенными каналами (рисунок предоставлен О. А. Басовой)

Для линейных сенсоров с чувствительностью, отличной от чувствительности стандартного наблюдателя, форма цветного треугольника может быть существенно иной (т. е. не проективно подобной). Так, у сенсора с непересекающимися носителями функций чувствительности область чистых спектральных цветов на плоскости цветности вырождается в три точки, а сам цветовой треугольник оказывается геометрическим треугольником (рис. 10). Система координат  $(r, g)$  на рис. 10 определялась аналогично координатам  $(x, y)$  цветности стандартного наблюдателя:

$$\begin{aligned} r &= \frac{R}{R+G+B}, \\ g &= \frac{G}{R+G+B}, \end{aligned} \quad (33)$$

где  $R$ ,  $G$  и  $B$  – линейные отклики в естественной СЦК сенсора.

Но для любого трехканального сенсора с линейным базисом верно следующее: на границе цветового треугольника лежат либо чистые спектральные цвета, либо смеси двух таких цветов.

## 2.2. Цветовой тон, насыщенность и яркость цветов

Будем называть излучения, цвет которых лежит на границе цветового треугольника, предельными цветами. Циклическую координату, картирующую предельные цвета, принято называть **цветовым тоном** (англ. *hue*). Проекция цвета излучения равноэнергетического источника на плоскость цветности называется нейтральной (а также белой или серой) точкой. В исходной ЛСЦК ей соответствует ахроматическая ось. Цветам, лежащим в любой полуплоскости, ограниченной ахроматической осью, приписывается одинаковый цветовой тон. Цветовой тон цветов, лежащих на ахроматической оси, не определен. Смысл понятия цветового тона следующий: любой цвет может быть получен смешением некоторого предельного и нейтрально белого. Цветовой тон смесей с ненулевым весом одного и того же предельного цвета совпадает. При этом аналитические определения цветового тона в разных СЦК могут не соответствовать друг другу, поэтому важно указывать конкретную СЦК, цветовой тон которой имеется в виду. Доминирующая длина волны, вопреки распространенному мнению, не может быть использована в качестве координаты тона, поскольку не исчерпывает всех предельных цветов.

Представление о циклическом характере цветового тона восходит к самым ранним работам по цветовой теории. Еще со времен Ньютона принято считать, что лучи всех возможных тонов образуют цветовой круг (его до сих пор называют **кругом Ньютона**). Это не вполне тривиальный факт, если учесть, что Ньютон отождествлял предельные цвета с цветами, которые можно получить разложением солнечного цвета с помощью призмы, то есть с чистыми спектральными, которые, как мы знаем, не составляют замкнутой траектории в цветовом пространстве. В любом случае впервые круговое расположение оттенков было предложено не сэром Исааком Ньютоном, как иногда ошибочно считается, а, по-видимому, Аароном Зигфридом Форсиусом, жившим веком ранее [14]. А. Форсиус упоминает круговую организацию цветовых тонов в рукописи 1611 года, которая была обнаружена в Швеции. Сектора цветового круга представляют цвета, близкие к чистым спектральным, и размещаются в порядке, соответствующем расположению в спектре видимого света. Кроме того, в круг добавлен близкий к фиолетовому цвет, который связывает крайние чистые спектральные цвета – синий и красный.

Различие свойств у чистых спектральных и прочих предельных цветов довольно существенно. Это различие сохраняется и в разбеленных смесях, поэтому мы введем два дополнительных термина. Будем говорить, что у цвета **спектральный тон**, если его цветовой тон соответствует спектрально чистому цвету, в ином случае будем говорить о **неспектральном тоне**. Область неспектральных цветовых тонов на цветовом треугольнике человека образует геометрический треугольник (см. цветовой треугольник, образованный штриховыми линиями и основанием в пурпурной области, на рис. 9, *справа*).

Цветности одного тона различаются параметром **насыщенности** (англ. *saturation*). Насыщенность ахроматических цветов считается равной 0 и нарастает по мере отдаления от нейтральной точки на плоскости цветности. Насыщенность предельного цвета данного любого цветового тона максимальна среди цветностей с совпадающим цветовым тоном. Аналогично цветовому тону, насыщенность в разных СЦК может вводиться несогласованно. В большинстве известных СЦК насыщенность предельных цветов различных цветовых тонов совпадает, но в общем случае это свойство не гарантируется.

Цветовой тон и насыщенность – наиболее легко выделяемые нашим сознанием характеристики цветовых впечатлений, и многие исследователи цветового восприятия человека, начиная с Г. Гельмгольца и Г. Грассмана, оценивают эти характеристики как особые качества цвета. Естественная способность сортировать цвета по цветовому тону, а также сравнивать их по насыщенности, присуща человеку не случайно: цветовой тон и (реже) насыщенность в определенных условиях оказываются инвариантами цвета однородно окрашенного объекта, что делает именно такие координаты ценными при распознавании окрасок.

Итак, мы обсудили возможность введения двух координат на плоскости цветности, соответствующих интуитивному человеческому восприятию цветов. Рассмотрим теперь третью координату, позволяющую совместно с цветовым тоном и насыщенностью различать любые цвета трехканального сенсора. Это – **яркость** (англ. *brightness*). Как мы уже упоминали выше, общепринято, что цвета, лежащие на луче постоянной цветности, различаются яркостью (чем дальше от начала координат, тем больше яркость). Не так проста проблематика так называемых гетерохромных сравнений яркости, иначе говоря – модель упорядочения человеком по яркости цветов несовпадающей цветности. Г. Грассман в своем четвертом законе по сути предложил вводить яркость так, чтобы в невзвешенной смеси излучений яркости суммировались. Любая координата, удовлетворяющая данному постулату, вводит упорядочение на некоторых (но не на всех) парах цветов несовпадающей цветности. В частности, предложение Грассмана само по себе не позволяет упорядочить по яркости два предельных цвета несовпадающего тона. В большинстве СЦК яркость вводится так, что четвертый закон Грассмана выполняется. Нетрудно убедиться, что в естественной СЦК сенсора с неотрицательными значениями чувствительности любая линейная форма  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{c}$  при условии  $\mathbf{n} > 0$  может называться яркостью. Если цветовой конус не касается координатных плоскостей нигде, кроме начала координат (для CIE XYZ это так), то условие ослабляется до ограничения вида  $\mathbf{n} \geq 0, \|\mathbf{n}\| > 0$ . В таких условиях любая из координат ЛСЦК может быть объявлена яркостью. В частности, во многих СЦК, порожденных от CIE XYZ, в качестве яркости используется координата  $Y$  исходного пространства.

Известно, что естественное восприятие яркости человеком нелинейно (это можно показать с помощью пороговых измерений), поэтому постулат Грассмана используется не во всех СЦК. В таких случаях можно воспользоваться ослабленным требованием: яркость смеси двух излучений ненулевой яркости должна быть больше, чем у ее компонент. Это требование, как правило, выполняется и для яркости нелинейных СЦК.



**Рис. 11.** Согласованные изменения цветов всего изображения по одной из естественных цветовых координат: *д* – картина П. Клее «На Парнасе» в стандартной палитре; *г, д, е* – изменение насыщенности (увеличивается слева направо); *б, д, з* – изменение яркости (увеличивается снизу вверх); *ж, а, в, и* – смещение цветности в область доминирования определенного цветового тона (синего, зеленого, желтого и красного соответственно)

На рис. 11 для лучшего понимания материала данного раздела показано, как меняется изображение при согласованном смещении цветового тона, насыщенности или яркости во всех его точках.

В заключение еще раз предупредим читателя, что термины «яркость», «насыщенность» и «цветовой тон» указывают на определенные свойства координат, а не на ту или иную конкретную математическую модель. Существует великое множество различных СЦК, координаты которых обозначаются этими терминами. Впрочем, для яркости, помимо очевидного термина *brightness*, в англоязычной литературе достаточно произвольно используются термины *value* (значение), *intensity* (интенсивность) или *lightness* (светлота). Тем не менее все эти СЦК претендуют на то, что три координаты цвета в них вполне соответствуют обсуждаемым нами понятиям. И все они используют существенно различные аналитические выражения для формального определения координат. Мы будем называть такие СЦК системами с циклическим цветовым тоном.

Рассмотрим для примера две распространенные СЦК с циклическим цветовым тоном. Нехсоне HSV [15] формально определяется так:

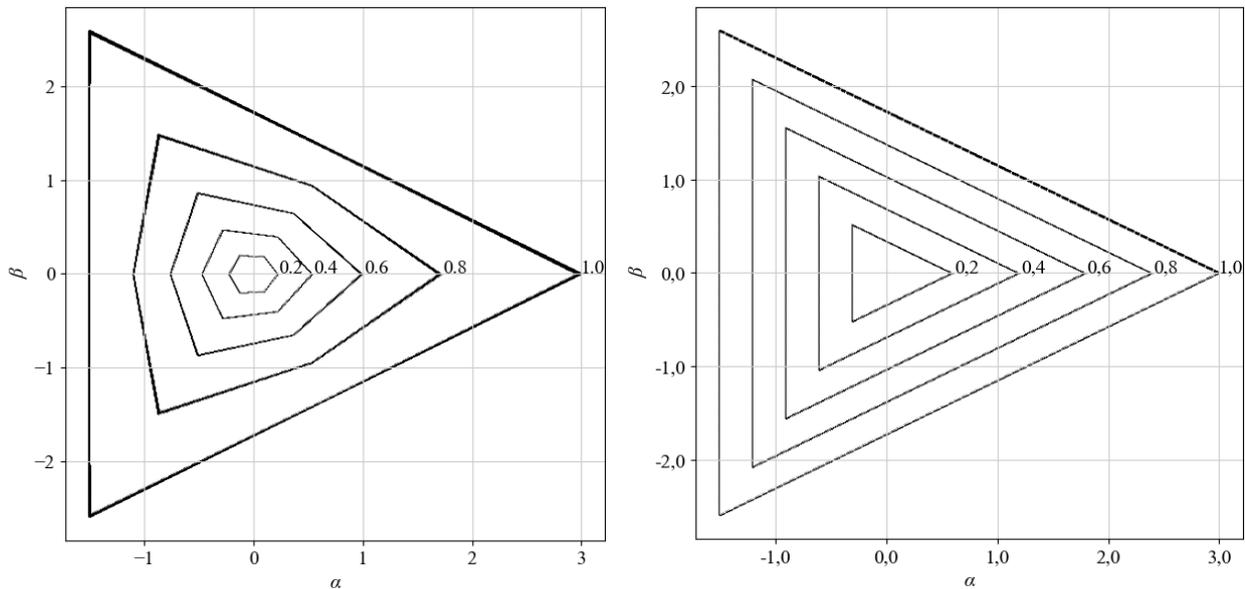
$$\begin{aligned}
 H &= 60^\circ \left( \left( \frac{\mathbf{w} \mathbf{c}}{mx - mn} + 2k + 4 \right) \bmod 6 \right), \\
 S &= \frac{mx - mn}{mx}, \quad V = mx, \\
 \mathbf{w} &= \mathbf{1}^T - [k \bmod 3 \quad (k+2) \bmod 3 \quad (k+1) \bmod 3], \\
 mn &= \min_i[\mathbf{c}]_i, \quad mx = \max_i[\mathbf{c}]_i, \quad k = \arg \max_i[\mathbf{c}]_i;
 \end{aligned}
 \tag{34}$$

а HSI [16] – следующим образом:

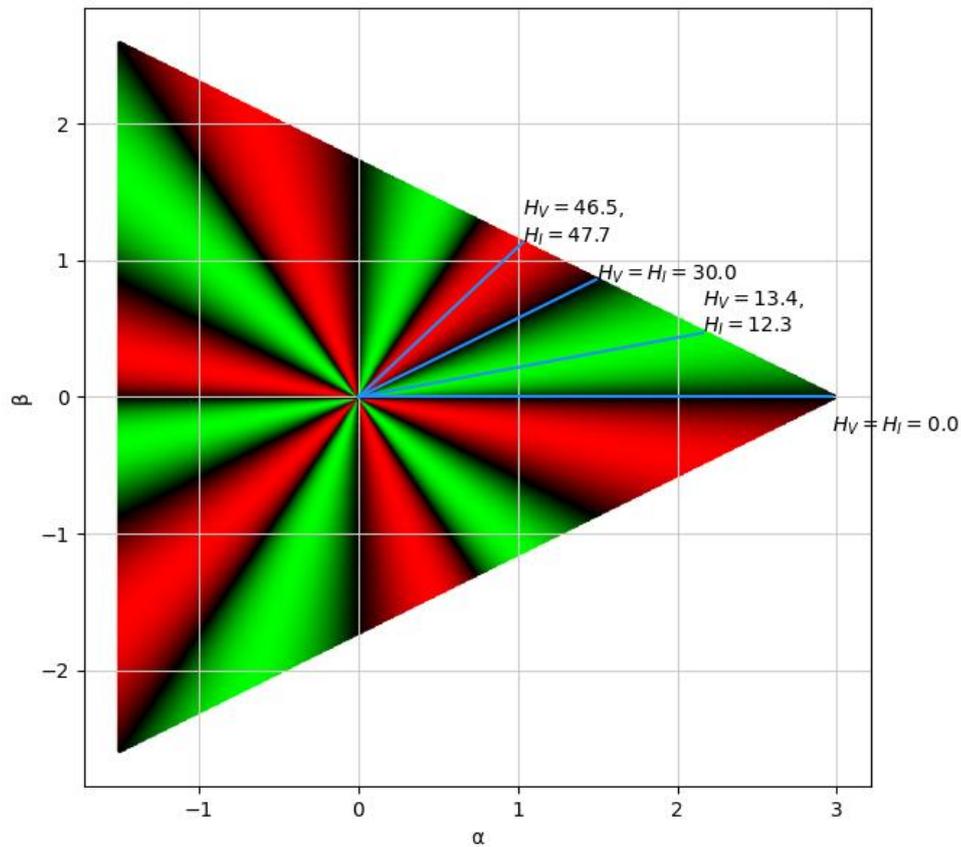
$$\begin{aligned}
 H &= \text{atan2}(\beta, \alpha), \quad S = 1 - \frac{\min[\mathbf{c}]_i}{I}, \\
 I &= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \mathbf{c}, \\
 \alpha &= \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \mathbf{c}, \\
 \beta &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \mathbf{c}.
 \end{aligned}
 \tag{35}$$

Здесь  $\text{atan2}(y, x)$  – двухместный арктангенс, совпадающий по модулю  $\pi$  с  $\arctan(\frac{y}{x})$ ,

а индексация каналов ведется, начиная с единицы, в последовательности RGB. Как видно из приведенных выражений, в двух рассматриваемых СЦК различаются определения всех трех координат, при этом в обоих вариантах одна из координат (H) имеет смысл цветового тона, вторая (S) – насыщенности, а третья (V/I) – яркости. Разница в определении насыщенности и цветового тона проиллюстрирована на рис. 12 и 13.



**Рис. 12.** Контуры постоянной насыщенности (значения насыщенности подписаны справа от соответствующего контура) на плоскости цветности  $\alpha\beta$ : для цветовых координат HSV (слева); для координат HSI (справа) (предоставлено О. А. Басовой)



**Рис. 13.** Разница численных значений цветового тона в системах координат HSV и HSI. В зеленых областях значение цветового тона в HSV больше, чем в HSI; в красных – наоборот. Яркость цвета кодирует модуль разницы значений цветового тона: чем больше разница, тем ярче цвет. Голубым цветом отмечено несколько радиусов, для которых приведены численные значения цветового тона в обеих системах координат (рисунок предоставлен О. А. Басовой)

Интересно, что использование систем с циклическим цветовым тоном может приводить к несопадающим результатам даже после выбора одного и того же аналитического преобразования, поскольку исходная ЦЦК в них зачастую не определена. Для двух рассматриваемых ЦЦК известно, что входная ЦЦК – RGB, но, к сожалению, известно великое множество различных ЦЦК с таким названием. Считая исходное пространство линейризованным sRGB, можно устранить оставшиеся разночтения и связать рассмотренные системы с уже известной нам CIE XYZ 1931 года, подставив в одно из выражений (34) и (35) в качестве  $\mathbf{c}$  цветовой вектора  $\mathbf{c}_{\text{slin}}$  в линейризованной ЦЦК sRGB:

$$\mathbf{c}_{\text{slin}} = \begin{bmatrix} 3,2406 & -1,5372 & -0,4986 \\ -0,9689 & 1,8758 & 0,0415 \\ 0,0557 & -0,2040 & 1,0570 \end{bmatrix} \mathbf{c}_{\text{xyz}}. \quad (36)$$

В заключение хочется подчеркнуть важную особенность современного состояния цветовой теории: она полна не до конца определенных и подлежащих уточнению понятий, таких как разобранное выше понятие яркости. При их использовании умалчивание конкретных определений порождает путаницу и потому абсолютно недопустимо.

## 2.3. Структура цветов окрасок и понятие светлоты

Рассмотрим сцену, состоящую из простого источника света с относительным спектральным составом испускаемого света  $S(\lambda)$ , выпуклого объекта с однородной ламбертовой окраской, описываемой спектральным распределением коэффициента отражения  $R_L(\mathbf{r}, \lambda) = R(\lambda)$ , и оптической системы, оснащенной сенсором с линейным базисом  $\mathbf{X}(\lambda)$ . Цветовым телом Лютера – Ньюберга источника со спектром  $S(\lambda)$  называется множество цветов, порождаемых в цветовом пространстве рассматриваемого сенсора фиксированной точкой окрашенного объекта при всевозможных его окрасках.

Цветовые векторы  $\mathbf{c}$ , составляющие цветное тело Лютера – Ньюберга, представимы в естественной СЦК сенсора в следующем виде:

$$\mathbf{c} = \alpha \int_0^\infty S(\lambda) R(\lambda) \mathbf{X}(\lambda) d\lambda, \quad 0 \leq R(\lambda) \leq 1, \quad (37)$$

где  $\alpha$  – фиксированный коэффициент, зависящий от геометрии рассматриваемой сцены и конкретного вида СДФОС объекта.

Что можно сказать о геометрии цветового тела помимо того, что оно (как и любое множество цветов) находится внутри цветового конуса? Чтобы ответить на этот вопрос, перепишем выражение (37) следующим образом:

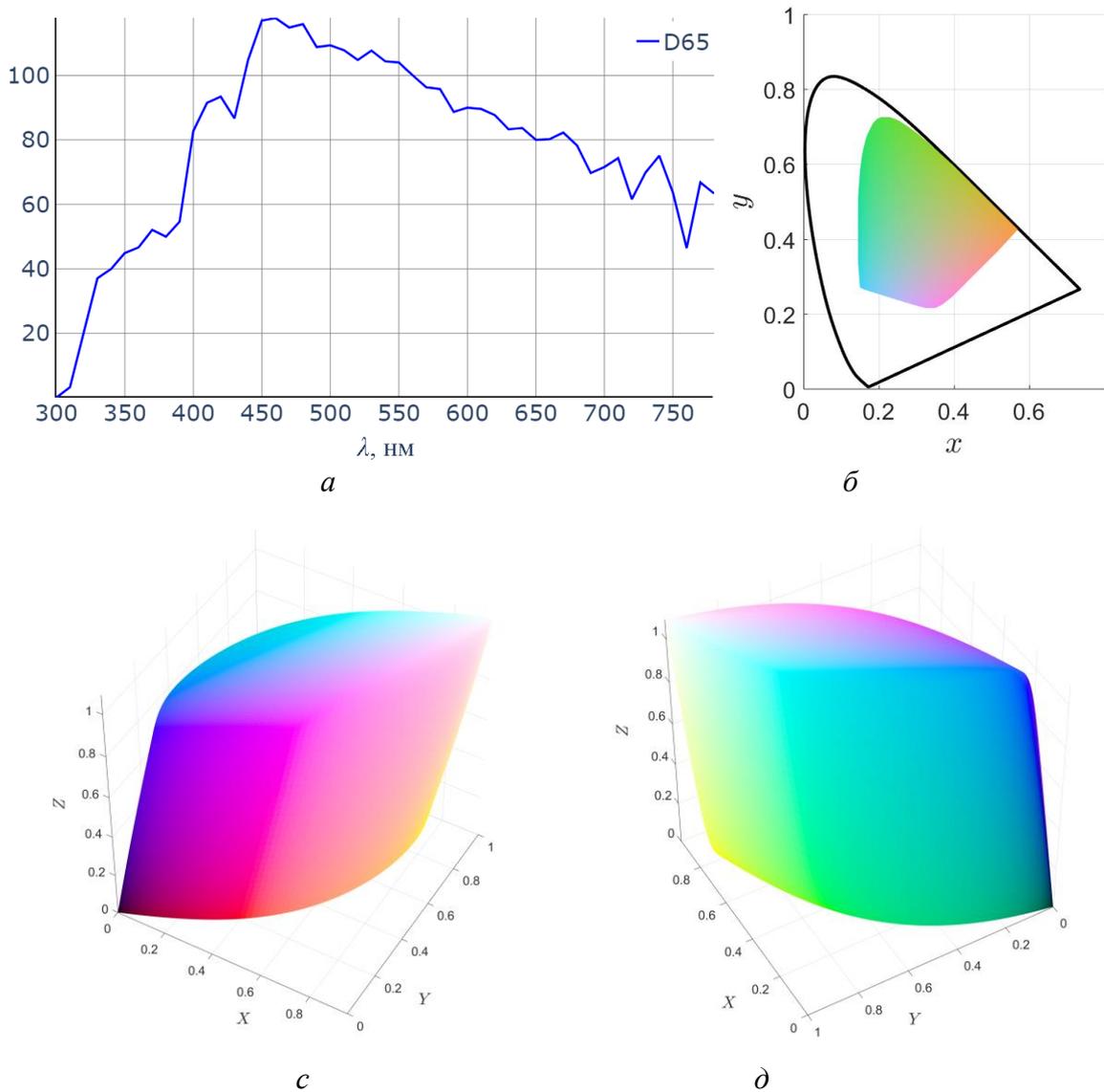
$$\mathbf{c} = \int_0^\infty R(\lambda) \mathbf{X}_s(\lambda) d\lambda, \quad \mathbf{X}_s(\lambda) = \alpha S(\lambda) \mathbf{X}(\lambda). \quad (38)$$

Множество  $\{R(\lambda)\}$  выпукло и симметрично относительно спектра  $R(\lambda) = \frac{1}{2}$ .

Поскольку отображение (38) линейно, отсюда следует выпуклость и центральная симметрия цветового тела в естественной СЦК сенсора, а также в других ЛСЦК.

На рис. 14 изображено цветное тело стандартного источника света CIE D65, моделирующего усредненное дневное освещение, в системе координат стандартного наблюдателя. Видна характерная чечевицепоподобная форма цветового тела, упоминаемая многими исследователями.

Окраску, задающую центр цветового тела, принято называть нейтрально серой. Ей при выбранных условиях наблюдения соответствует спектр  $R(\lambda) = \frac{1}{2}$ . Окраски со спектрами  $R_1(\lambda)$  и  $R_2(\lambda)$  принято называть дополнительными, если выполнено условие  $R_1(\lambda) + R_2(\lambda) = 1$ . Такие окраски имеют цвета, симметричные в ЛСЦК относительно центра цветового тела. И нейтрально серая, и дополнительные окраски сохраняют свои свойства при любом спектре источника  $S(\lambda)$ .



**Рис. 14.** Вид цветового тела с разных ракурсов (*c*, *d*) стандартного источника D65 в системе CIE XYZ; спектр источника D65 (*a*); проекция сечения  $Y = 0,5$  этого цветового тела на стандартную диаграмму цветности (*b*). (Изображения цветового тела предоставлены И. А. Коноваленко – сотрудником лаб. 11 ИППИ РАН.)

**Предельными окрасками** по аналогии с предельными излучениями назовем окраски, цвета которых составляют поверхность цветового тела. В литературе предельные окраски часто называются оптимальными из-за важного свойства: для фиксированного цветового тона и насыщенности наибольшую яркость даст именно предельная окраска (при условии, что данная комбинация тона и насыщенности достижима).

Поскольку цветовое тело выпукло, то через каждую точку его поверхности можно провести такую плоскость, что все тело будет находиться нестрого по одну сторону от нее. Будем перебирать нормали  $\|\mathbf{n}\|_2 = 1$  к плоскости в выбранной ЛСЦК. Спектры всех предельных окрасок представимы в следующем виде:

$$R_c(\lambda, \mathbf{n}) = \operatorname{argmax}_{0 \leq R(\lambda) \leq 1} \int_0^{\infty} R(\lambda) X_n(\lambda) d\lambda, \quad X_n(\lambda) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{X}_s(\lambda). \quad (39)$$

Отсюда следует простое выражение для  $R_e(\lambda, \mathbf{n})$ :

$$R_e(\lambda, \mathbf{n}) = \theta(\mathbf{n} \cdot \mathbf{X}_s(\lambda)), \quad (40)$$

где  $\theta$  – функция Хевисайда.

Итак, всех точек поверхности цветowego тела можно достичь окрасками, спектры которых принимают значения из множества  $\{0,1\}$ , причем максимальное число переходов между этими значениями совпадает с максимальным числом смены знака у всевозможных  $X_n(\lambda)$ . Поскольку  $S(\lambda) \geq 0$ , его можно ограничить сверху максимальным числом смены знака функций вида  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{X}(\lambda)$ . Как указано у В. В. Максимова в главе 2 [13, с. 42–73] и, ранее, у Э. Шредингера [7], в цветовом пространстве человека предельные окраски имеют не более двух переходов. Важно понимать, что для произвольного сенсора это ограничение может оказаться слишком жестким.

Для цветов окрасок используются СЦК, во многом сходные с системами координат цветов излучений. Но есть и некоторые отличия. Так, аналогом яркости для окрасок служит **светлота** (альбеда, англ. *lightness*). СЦК, аналогичные HSI, но используемые для окрасок, носят название HSL. Светлота, в отличие от яркости, ограничена сверху: максимальной светлотой обладает белая окраска с  $R(\lambda) = 1$ . Аналогично понятиям цветowego тона и насыщенности, многие названия цветов в равной мере применимы и к излучениям, и к окраскам. Но есть и такие названия, которые человеческое восприятие не связывает с излучениями. Всем доводилось видеть коричневые предметы, однако «коричневый свет» не говорят, называют его тускло-желтым. Точно также нет источников серого, бурого света, нет света хаки, тем более черного света. Все названия этих **грязных цветов** соответствуют окраскам малой (или, по крайней мере, не максимальной) светлоты.

Зрительная система человека обладает механизмами адаптации к разным уровням яркости освещения и одновременно механизмами количественной оценки светлоты (и цвета в целом) окрасок. Поэтому при описании цветов излучений, как правило, яркостная компонента игнорируется и указывается исключительно цветность излучения. Впрочем, воспроизведение грязных цветов излучениями возможно при использовании хотя бы пары цветов: желтое поле небольшой яркости на белом фоне воспринимается как коричневое, поскольку механизмы оценки яркости относительно максимальной наблюдаемой ее величины у зрительной системы человека есть.

## Предметный указатель

- грязные цвета 36  
естественная СЦК сенсора с линейным базисом 24  
законы Грассмана 12  
колориметр 12  
кривые сложения 15  
круг Ньютона 29  
ламбертова окраска 10  
линейная модель цветового сенсора 14  
математическое определение цвета 23  
метамерные излучения 11  
насыщенность 29  
неспектральный тон 29  
однородная окраска 10  
окраска 6  
оптическая камера 11  
оптическое изображение 11  
плоскость цветности 25  
предельные окраски 35  
простой источник света 8  
светлота 31  
светосила 11
- СДФОС 9  
сенсор 11  
сенсор с линейным базисом 23  
спектральная освещенность 8  
спектральная чувствительность 15  
спектральная яркость 7  
спектрально-цветовой локус 26  
спектральный конус 24  
спектральный тон 29  
стандартный наблюдатель 17  
цвет 7  
цвет излучения 11  
цветное изображение 22  
цветность 25  
цветовое пространство 23  
цветовое тело Лютера – Ньюберга 34  
цветовой конус 24  
цветовой тон 29  
цветовой треугольник 26  
цветовые координаты 24  
чистые спектральные цвета 26  
яркость 30

## Список литературы

1. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. М. : Мир, 1965. Т. 3 : Излучение. Волны. Кванты. 234 с. URL: [https://mipt.ru/dasr/upload/646/f\\_3kf8oa-arphh81ii9w.pdf](https://mipt.ru/dasr/upload/646/f_3kf8oa-arphh81ii9w.pdf) (дата обращения: 20.10.2021).
2. Физический энциклопедический словарь. М. : Советская Энциклопедия, 1966. Т. 5 : Спектр – Яркость. 575 с.
3. Koenderink J., van Doorn A., Gegenfurtner K. Colors and things // *i-Perception*. 2020. Vol. 11, issue 6. P. 1–43. <https://doi.org/10.1177/2041669520958431>
4. Фершильд М. Д. Модели цветового восприятия / Перевод А. Шадрина. [СПб.], 2006. URL: [https://alexey-shadrin.com/wp-content/uploads/2018/04/Color\\_Appearance\\_Models\\_SE\\_RUS.zip](https://alexey-shadrin.com/wp-content/uploads/2018/04/Color_Appearance_Models_SE_RUS.zip) (дата обращения: 20.10.2021).
5. Ньюберг Н. Д. О происхождении цветовых понятий // Проблемы физиологической оптики. 1948. Т. 6. С. 64–69. URL: <http://iitp.ru/upload/content/208/31.doc> (дата обращения: 20.10.2021).
6. Geometrical considerations and nomenclature for reflectance / F. E. Nicodemus, J. C. Richmond, J. J. Hsia [et al.]. Washington : National Bureau of Standards ; Department of Commerce, 1977. Vol. 160. 67 p. URL: <https://graphics.stanford.edu/courses/cs448-05-winter/papers/nicodemus-brdf-nist.pdf> (дата обращения: 20.10.2021).
7. Erwin Schrödinger's Color Theory: Translated with Modern Commentary / Ed. K. K. Niall. Cham: Springer, 2017. 193 p. DOI: 10.1007/978-3-319-64621-3
8. Grassmann H. Zur Theorie der Farbenmischung // *Annalen Der Physik*. 1853. Bd. 165, h. 5. S. 69–84.
9. MacAdam D. L. Sources of color science. Cambridge : MIT Press, 1970. 282 p. URL: [https://openlibrary.org/works/OL5479288W/Sources\\_of\\_color\\_science?edition=sourcesofcolorsc00davi](https://openlibrary.org/works/OL5479288W/Sources_of_color_science?edition=sourcesofcolorsc00davi) (дата обращения: 20.10.2021).
10. Хант Р. В. Г. Цветовоспроизведение / Перевод с англ. А. Е. Шадрина. Шестое издание. СПб., 2009. 928 p. URL: [https://alexey-shadrin.com/wp-content/uploads/2018/04/The-Reproduction-of-Colour\\_RUS.zip](https://alexey-shadrin.com/wp-content/uploads/2018/04/The-Reproduction-of-Colour_RUS.zip) (дата обращения: 20.10.2021).
11. Asano Y., Fairchild M. D. Categorical observers for metamerism // *Color Research & Application*. 2020. Vol. 45, issue 4. P. 576–585. <https://doi.org/10.1002/col.22493>
12. ГОСТ 13088-67 Колориметрия. Термины, буквенные обозначения. Введ. 1968.01.01. М. : Издательство стандартов, 1990. 15 с. URL: <http://www.gostrf.com/normadata/1/4294838/4294838052.pdf> (дата обращения: 20.10.2021).
13. Максимов В. В. Трансформация цвета при изменении освещения. М. : Наука, 1984. 161 с. URL: [http://iitp.ru/upload/publications/690/Maximov\\_book.pdf](http://iitp.ru/upload/publications/690/Maximov_book.pdf) (дата обращения: 20.10.2021).
14. Richter M. The development of color metrics // *Color Research & Application*. 1984. Vol. 9, issue 2. P. 69–83. <https://doi.org/10.1002/col.5080090203>
15. Smith A. R. Color gamut transform pairs // *ACM SIGGRAPH Computer Graphics*. 1978. Vol. 12, issue 3. P. 12–19. <https://doi.org/10.1145/965139.807361>
16. Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений. Издание 3-е. М. : Техносфера, 2012. 1104 с.

Николаев Дмитрий Петрович

Николаев Пётр Петрович

Гладилин Сергей Александрович

Божкова Валентина Петровна

**Основы цветовой теории в техническом зрении**  
**I. Введение в цветовую теорию**

Учебное пособие издано в авторской редакции

Сетевое издание

Главный редактор – Кирсанов К.А.

Ответственный за выпуск – Алимова Н.К.

Учебное издание

**Системные требования:**

операционная система Windows XP или новее, macOS 10.12 или новее, Linux.  
Программное обеспечение для чтения файлов PDF.

Объем данных 2 Мб

Принято к публикации «11» июня 2021 года

Режим доступа: <https://izd-mn.com/PDF/26MNNPU21.pdf> свободный. – Загл. с экрана. –  
Яз. рус., англ.

ООО «Издательство «Мир науки»

«Publishing company «World of science», LLC

Адрес:

Юридический адрес — 127055, г. Москва, пер. Порядковый, д. 21, офис 401.

Почтовый адрес — 127055, г. Москва, пер. Порядковый, д. 21, офис 401.

<https://izd-mn.com/>

**ДАННОЕ ИЗДАНИЕ ПРЕДНАЗНАЧЕНО ИСКЛЮЧИТЕЛЬНО ДЛЯ ПУБЛИКАЦИИ НА  
ЭЛЕКТРОННЫХ НОСИТЕЛЯХ**