

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Адыгейский государственный университет»

Cambridge Research and Consultancy, UK, Великобритания



М.Г. Пономарев

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ

Часть 1. «Ньютонова механика»

Учебное пособие
для физико-математических, инженерно-физических
и инженерных специальностей вузов



Москва 2023

УДК 531/534
ББК 22.2: 22.3
П 563

Автор: Пономарев Максим Глебович – кандидат физико-математических наук, доцент, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования Адыгейский государственный университет, Майкоп, Россия; CEO, Director, Founder, Cambridge Research and Consultancy, UK, Великобритания.

Рецензенты: Карев Владимир Иосифович – доктор технических наук, зам. директора по научной работе, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук (Москва).

Чаплина Татьяна Олеговна – доктор физико-математических наук (01.02.05 – «Механика жидкости, газа и плазмы»), ведущий научный сотрудник, лаборатория геомеханики, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук (Москва).

Пономарев, Максим Глебович

П 563 Физические основы механики. Часть 1. «Ньютонова механика». Учебное пособие для высшего образования [в 2 ч.]. / М.Г. Пономарев. – М.: Мир науки, 2023. – Режим доступа: <https://izd-mn.com/PDF/22MNNPU23.pdf> – Загл. с экрана.

ISBN 978-5-907731-16-5

DOI: 10.15862/22MNNPU23

Настоящее учебное пособие обобщает теоретическую, методологическую и практическую информацию, необходимую для всестороннего и системного представления о физических основах механики. Его целью является освоение фундаментальных знаний о механике – разделе физики, изучающем закономерности механического движения и причины, вызывающие изменения этого движения. Курс носит инструментально-методологический характер и ориентирован, с одной стороны, на получение обучающимися базовых знаний по физике, с другой – на формирование у них современного естественнонаучного мировоззрения. В его рамках дается базовая терминология, рассматриваются ключевые основы классической (аналитической, Ньютоновой) и релятивистской механики. Теоретические вопросы сопровождаются примерами и пояснениями.

Для демонстрации уникальных приложений Физических Основ Механики приведен также и список трудов автора, Пономарева Максима Глебовича, [87], [210-254]. Пособие соответствует требованиям федерального государственного образовательного стандарта высшего образования. Предназначено для студентов физико-математических, инженерно-физических и инженерных специальностей вузов.

ISBN 978-5-907731-16-5

© Пономарев Максим Глебович

© ООО Издательство «Мир науки», 2023



Оглавление

Предисловие	5
Введение	7
Глава 1. Предмет механики.....	9
1.1. Краткая история развития механики и ее место среди других разделов физики	9
1.2. Модели тел, материальная точка, система отсчета в классической (аналитической) механике.....	11
1.3. Описание движения при различных скоростях тел (материальных точек).....	13
1.4. Корпускулярные и волновые свойства тел	15
1.5. Размерность физической величины; системы единиц физических величин.....	18
Глава 2. Основы кинематики	22
2.1. Кинематика материальной точки и способы описания ее движения в пространстве	22
2.1.1. Способы описания движения и траектория материальной точки.....	22
2.1.2. Скорость материальной точки при разных способах задания ее движения	24
2.1.3. Ускорение материальной точки при разных способах задания ее движения; кривизна траектории	26
2.3. Типология движений материальной точки	28
2.4. Кинематика абсолютно твердого тела	30
2.4.1. Понятие и типология движения абсолютно твердого тела	30
2.4.2. Угол поворота и угловая скорость как кинематическая характеристика вращательного движения абсолютно твердого тела	31
2.4.3. Угловое ускорение как кинематическая характеристика вращательного движения абсолютно твердого тела	32
2.4.4. Типология вращательных движения абсолютно твердого тела; период и частота вращения.....	33
Глава 3. Основные законы динамики.....	36
3.1. Векторы угловых и линейных кинематических величин	36
3.2. Три закона Ньютона.....	38
3.2.1. Первый закон Ньютона	38
3.2.2. Второй закон Ньютона	39
3.2.3. Третий закон Ньютона	41
3.3. Преобразования Галилея; закон сложения скоростей	41
3.4. Связь кинематических величин в различных системах отсчета: неинерциальная система отсчета; силы инерции	44
Глава 4. Закон сохранения импульса	49
4.1. О законах сохранения	49
4.2. Импульс; закон его сохранения	50

4.3. Центр масс; закон движения центра масс	53
4.4. Ц-система; система из двух частиц	54
4.5. Движение тела переменной массы	55
Глава 5. Закон сохранения энергии	58
5.1. Энергия, работа и мощность	58
5.2. Механическая энергия частицы в силовом поле; закон сохранения полной механической энергии системы	61
5.2.1. Консервативные силы и потенциальная энергия	61
5.2.2. Потенциальное силовое поле; закон сохранения полной механической энергии системы	64
5.3. Гравитационное поле; потенциальная энергия тела	65
Глава 6. Закон сохранения момента импульса	70
6.1. Момент импульса материальной точки. Момент силы	70
6.2. Закон сохранения момента импульса	72
6.3. Динамика абсолютно твердого тела	74
Список используемых и рекомендуемых источников	78

Предисловие

В последние несколько лет мир переживает уникальный по своей природе и содержанию комплекс кризис-индуцированных (кризис-производных) процессов, прямо или косвенно отражающихся на жизнедеятельности современного общества. Ответом на вызываемые этими процессами изменения становится естественная системная адаптация, поиск новых смыслов и способов организации социальных моделей государств, где приоритетное место априори отводится человеческому ресурсу. Именно по этой причине современная система высшего образования как никогда нацелена на воспитание кадров нового типа (**«кадров будущего»**), способных к быстрой адаптации к многообразию текущих и будущих процессов миротворчества и миропорядка, изменению трендов международного и национального рынка труда и макро-социального запроса¹. Особую актуальность данный тезис приобретает относительно запросов на **специалистов естественнонаучной сферы**. Так, согласно мнению экспертов Global Education Futures и WorldSkills Russia, в настоящее время и на долгосрочную перспективу востребованными являются кадры, обладающие набором [стандартных] профессиональных компетенций и [универсальными] «базовыми» навыками, составляющими органичную совокупность жестких (англ. hard skills) и мягких (англ. soft skills) навыков, которые преобразуются в единый модуль «навыков будущего» (англ. future skills)². Именно этот модуль и должен составлять компетентностный фундамент человеческого ресурса, занятого в **естественнонаучном секторе будущего**, где привычными станут автоматизация и роботизация, блокчейн-технологии (англ. blockchain) и технологии глубокого обучения (англ. deep learning)³ и нейронных сетей, кастомизация стандартизированных продуктов и локальное производство.

На Всемирном экономическом форуме (англ. World Economic Forum), который прошел в Сингапуре еще до пандемии, в апреле 2020 г., эксперты отметили, что к 2025 г. в результате технологических изменений может быть создано 97 млн. новых рабочих мест, тогда как 85 млн. существующих может исчезнуть, а большая часть выполняемых в наше время бизнес-процессов будет автоматизирована⁴. Именно поэтому, заявили эксперты, **специалист будущего** должен обладать следующими **навыками**: *аналитическое мышление и инновационность* – способность анализировать новые нестандартные задачи и предлагать альтернативы для их действенного решения; *проактивный подход к образованию* – умение самостоятельно выстраивать стратегию своего обучения с ориентацией на настоящее и будущее в профессиональном развитии; *комплексный подход к решению проблем* – поиск решения в зависимости от собственных мета-навыков, как жестких, так и мягких, и получение, тем самым, нового знания; *критическое мышление и анализ* – умение анализировать информацию, адекватно оцени-

¹ Лошкарева Е., Лукша П., Ниненко И., Смагин И., Судаков Д. Навыки будущего. Что нужно знать и уметь в новом сложном мире [Текст]: доклад. – М.: Ворлдскиллс Россия, 2020. – 93 с.

² Абрамов А. Навыки будущего: что нужно знать и уметь в XXI веке. – 30.09.2020 // РБК. Тренды. Образование – URL: <https://trends.rbc.ru/trends/education/5e728cbc9a79476476f6eb4e> (дата обращения: 01.02.2023)

³ **Глубокое обучение** (англ. deep learning) – это набор алгоритмов машинного обучения, которые моделируют абстракции высокого уровня в данных с использованием архитектур, состоящих из нескольких нелинейных преобразований. Технология глубокого обучения основана на искусственных нейронных сетях (ИНС). Эти ИНС получают алгоритмы обучения и постоянно растущие объемы данных для повышения эффективности процессов обучения.

⁴ The 12 Transferable Skills from UNICEF's Conceptual and Programmatic Framework. Panama: United Nations Children's Fund (UNICEF), 2022. – 35 p.

вать имеющиеся навыки, идеи и результаты, которые будут оставаться приоритетными на протяжении всей жизни; *креативность и оригинальность* – умение нестандартно мыслить и находить решение проблем, с которыми человечество ранее не сталкивалось.

Доказательством сказанному, например, является то, что согласно позиции Международного университета Swissam, одна из самых быстро растущих STEM-сфер («science», «technology», «engineering», «mathematics» – наука, технология, инженерия и математика) – **информационные технологии**; в самом ближайшем будущем могут потребоваться такие специалисты, как инженер-робототехник, архитектор виртуальной реальности, проектировщик наноматериалов, разработчик беспилотных систем, специалист в области цифровой физики (физик-космолог), пилот коммерческих космических кораблей и проч. Помимо прочего, все перечисленные **«профессии будущего»** самым непосредственным образом связаны с наукой, технологиями, инженерией и математикой, т.е. с направлениями, связанными со STEM-областью. Важно понимать, что последняя объединяет широкий круг дисциплин, неразрывно связанных друг с другом: математика, физика, химия, биология, астрономия и проч. Глубокие знания в каждой из них, а также в инженерии, роботехнике и других прикладных дисциплинах позволяют разрабатывать новые технологии на стыке наук, создавать программное обеспечение, конструировать сложные устройства,двигающие мир вперед, в будущее. Спектр STEM-специальностей очень широк и постоянно увеличивается; социальный запрос на такой «универсальный» человеческий ресурс уже достаточно объемный, как в нашей стране, так и на зарубежном рынке труда. О дефиците STEM-специалистов говорят и социологические исследования: по оценкам экспертов, количество рабочих мест по данным специальностям за период с 2017 по 2025 гг. возрастет на 9 млн. человек⁵. Интересные проекты, широкий круг общения, возможность выиграть гранты или получить награды, социальная значимость профессии – это лишь некоторые из аргументов в пользу обучения STEM-специальностям⁶.

Таким образом, перед современным обучающимся – будущим специалистом естественнонаучной сферы, стоит сложнейшая задача – в экстернальном режиме познать (принять и осознать) не только профессиональные, но и мета-профессиональные основы, т.е. получить **«фундаментальные» знания, умения и навыки**, которые позволят ему подготовиться к осознанному выбору альтернатив своего профессионального будущего. К таковым, в частности, относятся знания, умения и навыки в области **теоретической физики**. Представленный в настоящем учебно-методическом пособии материал направлен на формирование этих элементов профессиональной компетенции. Желаем уважаемому читателю успехов в обучении и в дальнейшей профессиональной деятельности.

«Конечная цель физики – описать вселенную одним-единственным уравнением, которое могло бы уместиться на майке».

(Леон Ледерман – американский физик-экспериментатор, специалист в области физики высоких энергий, нобелевский лауреат 1988 г.).

⁵ См. подробнее: Колесникова Е.М., Куденко И.А. Интерес к STEM-профессиям в школе: проблемы профориентации // Социологические исследования. 2020. № 4. С. 124-133; Козырева Н.В. STEAM-форма в профориентации обучающихся образовательных организаций // Образование. Карьера. Общество. 2022. №4 (75). С. 15-18; Анисимова Т.А., Сабирова Ф.М. Актуализация магистерской программы «цифровое образование» посредством дополнения ее модулем «технологии STEAM-образования» // Общество: социология, психология, педагогика. 2022. №8 (100). С. 186-191.

⁶ См. подробнее: Волкова Г.Л., Шматко Н.А. Наиболее востребованные STEM-профессии и компетенции [Электронный ресурс]. – 25.08.2021 // Институт статистических исследований и экономики знаний. – URL: <https://issek.hse.ru/news/499130554.html> (дата обращения: 15.12.2022)

Введение

Целью настоящего **учебного пособия** является освоение фундаментальных знаний о механике – разделе физики, изучающем закономерности механического движения и причины, вызывающие изменения этого движения. Для достижения этой цели курс разделен на **две части** – классическая (Ньютонова) и релятивистская механика, и **восемь разделов (глав)**: в первом дается общая характеристика предмета механики и базовая терминология; во втором – рассмотрены основы кинематики; в третьем, четвертом, пятом и шестом разделе описываются основные положения законов динамики (в том числе первый, второй, третий законы Ньютона) и законы сохранения импульса, энергии и момента импульса; седьмой и восьмой разделы посвящены базовым положениям релятивистской кинематики (в том числе, постулатам Эйнштейна, преобразованиям Лоренца, 4 – векторам специальной теории относительности и проч.) и релятивистской динамике (в том числе, основным уравнениям релятивистской динамики, энергии свободной частицы, законам сохранения энергии-импульса, свойствам тензоров и моменту импульса частицы и проч.). Материал, таким образом, изложен структурированно, последовательно, в конспективной форме с сопроводительными комментариями и пояснениями, что облегчит восприятие и качественное усвоение новых знаний обучающимися вне зависимости от текущей формы обучения. Теоретические сведения и методические (методологические) положения по каждому разделу (главе) снабжены **практическими примерами**, составленными согласно одному из ключевых принципов педагогики – «от простого к сложному», что позволит осуществить адаптивное освоение теоретических положений учебного материала. Надеемся, что в результате изучения данного курса, уважаемый читатель сможет более обстоятельно ориентироваться и понимать смысл физики как фундаментальной науки.

Курс «**Физические основы механики**» носит *инструментально-методологический характер* и ориентирован, с одной стороны, на получение обучающимися базовых знаний по физике, с другой – на формулирование у них современного естественнонаучного мировоззрения. В результате изучения курса обучающийся должен:

знать

- основные законы, теоремы, понятия механики;
- методы исследования равновесия и движения материальной точки, твердого тела и механической системы;
- принципы расчёта элементов конструкций на прочность, жёсткость и устойчивость;
- теории физических явлений и процессов, законы классической физики и основы специальной теории относительности;

уметь

- применять полученные знания для решения задач механики;
- выбирать рациональные методы решения задач механики;
- составлять и решать уравнения равновесия точек и твердых тел;

владеть

- методами механики, которые необходимы для изучения и успешного освоения последующих инженерных дисциплин;

-
- навыками использования математического аппарата для решения задач, связанных с механическим движением;
 - принципами расчета, используя возможности современных информационно-коммуникационных и цифровых технологий;
 - представлением о фундаментальных физических опытах и их роли в развитии науки.

Глава 1. Предмет механики

1.1. Краткая история развития механики и ее место среди других разделов физики

В донаучный период становление и развитие прото-механики (греч. μηχανική – искусство построения машин) начинается значительно раньше остальных разделов физики (электромагнетизма, термодинамики, квантовой механики, теории относительности и проч.) – в III в. н.э., когда древнегреческий мыслитель Архимед формулирует свой закон равновесия рычага и законы равновесия плавающих тел. Однако, современное содержание **теоретической механики** (классической, рациональной, аналитической – в зависимости от подхода к интерпретации автором) как единой теории математического моделирования движения и покоя твердых тел формируется только в VII в. В трактатах и произведениях таких именитых мыслителей и ученых, о которых уважаемый читатель узнает по ходу изложения материала, как *Иоганн Кеплер, Галилео Галилей, Рене Декарт, Христиан Гюйгенс, Исаак Ньютон, Готфрид В. Лейбниц, Пьер Вариньон, Даниил Бернулли* и других их современников, ставятся новые вопросы и появляются новые задачи естествознания и техники, создаются новые математические методы. Этому способствовали отнюдь не только практические интересы; основными мотивами стали стремление к поиску абсолюта истины, созданию всеобщей философской системы, противодействию мнений и идеологическим дискуссиям. Как правило, научные теории формулировались с опорой на исторически доказанные факты окружающего мира, сложившиеся понятия и дефиниции, принятую аксиоматику (др.-греч. ἀξίωμα – утверждение, положение, постулат)⁷ с широким привлечением логических, математических и экспериментальных доказательств. Дальнейшее формирование классической механики, совершенствование ее понятийного и математического аппарата предпринималось уже непосредственно в контексте трендов и методологических основ, заложенных учеными XVII-XVIII вв.

Безусловно, механика на рубеже веков кардинально отличалась от той, которая представлена современной наукой, однако, даже формально, ее уже нельзя было назвать разрозненной совокупностью частных теорий и задач (о причинах и законах движения тел, о равновесии простейших механизмов, о центре тяжести, о движении небесных тел и проч.), решение которых основано на простейших опытах, арифметических расчетах и геометрических построениях. XVII – начало XVIII вв. – это период создания первых физико-математических теорий (движения планет, падения тел в пустоте, удара тел, колебаний тел, равновесия тел под действием сил, движения тел в среде и проч.), уточнения физического смысла и математического представления как общепринятых, формулировки новых понятий, принципов и законов. Данный период, согласно периодизации профессора Н.Д. Моисеева⁸, названный им «от механики частных задач и методов их решения к идеологии универсальной, построенной на общих законах и понятиях теории», иными словами, от теоретической к аналитической механике, озна-

⁷ **Аксиоматика** (фр. axiomatique) – совокупность аксиом, а иногда, в широком смысле, и совокупность выводов, которые можно сделать из этих аксиом, не прибегая к эмпирическим данным.

⁸ **См. подробнее:** Моисеев Н.Д. Очерки развития механики [Текст]: [учеб. пособие для ун-тов] / под ред. проф. П. М. Огибалова. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1961. – 478 с. – С. 18-23.

менован становлением знания, базирующегося, по преимуществу, на понятиях и методах математического анализа *Леонарда Эйлера, Жана Леона Даламбера, Жозефа Луи Лагранжа* и других ученых (см. подробнее пп. 1.5).

XVIII – XX вв. – это так называемый *аналитический период* развития теоретической механики, время развития ее математического аппарата на базе, соответственно, математического анализа, новых достижений математического знания, а также установления новых физических законов и принципов. Как отмечает профессор В.И. Яковлев, именно это обстоятельство и заставляет историков науки вновь и вновь обращаться к изучению именно этого периода ее развития⁹, т.к. в течение этих трех столетий бурно расширялся круг естественно-научных и технических задач, решаемых методами аналитической механики, и, как результат, дифференциации механики согласно физическим моделям (точка, система точек, абсолютно твердое тело, деформируемое тело, жидкость, газ, плазма, многофазная среда), конкретными задачами (небесная механика, баллистика, теория машин и механизмов, теория упругости и пластичности, сопротивление материалов, механика композиционных материалов и проч.) и специфике их математической постановка (расчет характеристик, анализ устойчивости, оптимизация и проч.). Безусловно, в XXI в. мы уже можем говорить о более масштабных направлениях развития научного знания, как в области теоретической механики, так и физики в целом, актуальным примером чему является *цифровая физика*¹⁰ (англ. digital physics); это, в свою очередь, доказывает ее потенциал как полиструктурной науки.

Физика, как, уверены, знает уважаемый читатель, включает в себя множество разделов, каждый из которых решает определенный спектр задач: *электродинамика, магнитостатика, неравновесная термодинамика, квантовая теория поля, специальная и общая теории относительности, релятивная гидродинамика* и так далее. Уточнить место механики среди них можно на следующем примере: так, к задачам механики с равной степенью обоснованности можно отнести и движение тела под действием других сил, и силы трения и всемирного тяготения, и движение электрически заряженных тел под действием сил со стороны других электрически заряженных тел (движущихся или неподвижных). Однако, отнести только к механике все задачи о движении электрически заряженных тел нецелесообразно по той простой причине, что среди них встречаются те, которые невозможно решить при помощи законов только механики – необходимо добавить законы, лежащие в основе других разделов физики, в т.ч. *электродинамики*¹¹. Еще одним аргументом является, например, то, что при движении электрически заряженных частиц, в ряде случаев, возникает электромагнитное излучение и создается электромагнитное поле, действующее на заряд с определенной силой. Как процесс этого излучения, так и характер излучаемого поля определяются законами именно этого раздела физики. Однако, что интересно, используя совокупность знаний в области механики и

⁹ Яковлев В.И. Предыстория аналитической механики [Текст]. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 328 с. – С. 8.

¹⁰ **Цифровая физика в физике и космологии** – это совокупность теоретических взглядов, основанных на интерпретации, что Вселенная по сути является информацией и, следовательно, является вычислимой. Из данной идеи следует, что Вселенная может пониматься как результат работы некоторой компьютерной программы или как некий вид цифрового вычислительного устройства (или, по крайней мере, устройства, математически изоморфного такому устройству).

¹¹ **Электродинамика** – это раздел физики, изучающий электромагнитное поле в наиболее общем случае (т.е., рассматриваются переменные поля, зависящие от времени) и его взаимодействие с телами, имеющими электрический заряд (электромагнитное взаимодействие).

электродинамики представляется возможным изучить специфику движения заряженного тела при наличии электромагнитного излучения¹².

1.2. Модели тел, материальная точка, система отсчета в классической (аналитической) механике

Движение тел – *пространственно-временное действие*; классическая (аналитическая) механика рассматривает пространство и время как объективные формы существования материи, тогда как наряду с трехмерным пространством существует независимое от него время. Для описания движения тел в данном разделе физики, по общему правилу, используют различные физические модели. **Модель** (англ. model) – это абстрактное представление тела, физического явления, которое является прототипом, т.е. упрощенной копией реального тела или некоей системы. За счет равенства для реального объекта (явления) и его модели значений *критериев подобия*¹³ – безразмерных чисел, которые зависят от физических параметров, характеризующих этот объект (явление), достигается физическое подобие. **Физическое подобие** (англ. physical likeness) заключается в том, что в натуральном объекте (явлении) и его модели протекают процессы *одинаковой физической природы* таким образом, что *поля физических величин и их свойства на границах систем подобны*.

Наиболее простой такой моделью является **материальная точка** (англ. material point, material particle) или частица¹⁴, под которой понимается некое материальное тело, размерами которого *можно пренебречь* (произвольное макроскопическое тело или систему тел можно разбить на систему материальных точек), однако, только в случаях, если его размеры малы в сравнении с размерами других тел, которые оказывают воздействие на его движение, или размеры этих тел намного меньше расстояния между ними. Так, например, в масштабах нашей солнечной системы планеты могут рассматриваться как материальные точки, т.к. их диаметр значительно меньше диаметра Солнца, равно как и меньше расстояния от него. Однако, всегда важно учитывать тот факт, что использование термина «материальная точка» дает возможность описать движение тела только с некоторым приближением, т.е. не с абсолютной точностью. Собственно по этой причине как данное, так и многие другие понятия, с которыми уважаемый читатель будет далее сталкиваться называются «*абстрактными*», т.е. мы абстрагируемся (отвлекаемся) от всех несуществующих в конкретной ситуации (задачи) свойств тела, что упрощает исследование движения тел.

Примечание: раздел механики, который изучает движение тел (материальная точка, абсолютно твердое тело, идеальная жидкость), методы их математического описания (средствами геометрии, алгебры, математического анализа и проч.), однако, не ставит в качестве основной задачи поиск ответов на вопросы о законах движения (т.е. не изучает причины движения – массы, силы и проч.) называется **кинематикой** (англ.

¹² См. подробнее: Афонин А.М. Физические основы механики [Текст]: учебное пособие для студентов вузов, обучающихся по техническим направлениям подгот. и специальностям. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2006. – 366 с.

¹³ **Критерий подобия** – это безразмерная величина, составленная из размерных физических параметров, определяющих рассматриваемое физическое явление. Равенство всех однотипных критериев подобия для двух физических явлений и систем – необходимое и достаточное условие их физического подобия.

¹⁴ **Прим.:** так как в дальнейшем мы будем рассматривать движения тела обладающего массой, но в пренебрежении ее размерами, внутренней структуры и формы, то может быть использован термин «частица», понимая под ним материальную точку. Исходя из упоминания будет ясно, относится ли решаемая задача к механике точки, или к механике твердого тела, или к механике упругих тел.

kinematics); ее исходными понятиями являются *пространство и время* (см. подробнее раздел 2). Исследование последних занимается другой раздел механики – **динамика** (англ. dynamics); ее основной задачей является выяснить причины изменений механического движения тел. Исходными понятиями динамики являются масса, импульс, момент импульса и энергия (см. подробнее разделы 3-6). В виде частного случая, как подраздел динамики можно рассматривать **статику** (англ. statics)¹⁵, который изучает условия, при которых тела остаются в покое. В зависимости от свойств тела, которые необходимо принимать во внимание при изучении тех или иных движений и содержания вопросов, на которые необходимо ответить, механика условно делится на *механику материальной точки (частицы), механику абсолютно твердых (не способных к деформации) тел и механику упругих тел (включая идеальную жидкость, газы)*.

Для описания движения материальной точки необходимо знать, в каких местах пространства она находилась и в какие моменты времени она проходила то или иное положение. Определение положения тела возможно только по отношению к другим телам, т.е. если оно находится в пространстве, где нет других тел, то о движении тела сказать что-либо не представится возможным, т.к. в этом случае нет ничего, по отношению к чему тело могло бы изменить положение. Тело, по отношению к которому рассматривается движение других тел называется **телом отсчета** (англ. reference body); оно условно неподвижно и относительно него определяется положение *тела движущегося*.

Совокупность тела отсчета и часов называется **системой отсчета** (англ. frame of reference); это совокупность системы координат и часов, связанных, соответственно, с телом отсчета, по отношению к которому определяется положение других тел в различные моменты времени. К настоящему времени известно множество разновидностей систем координат; основным критерием выбора среди них – удобство и простота описывающего движение тела математического уравнения. Среди наиболее известных вариаций систем координат – *декартова (прямоугольная)*¹⁶, *цилиндрическая*¹⁷ и *сферическая*¹⁸ (см. рисунок 1.1); первой (x, y – ось абсцисс и ординат) удобнее будет пользоваться, например, при описании движения тела, брошенного с небольшой скоростью у поверхности земли под некоторым углом к горизонту, а если это же тело «брошено» со скоростью 8500 м/с, то для описания его движения уже потребуется полярная система координат (ρ, φ)¹⁹, центр которой находится в центре Земли.

¹⁵ **Статика** (от греч. *στατός*, «неподвижный») – раздел механики, в котором изучаются условия равновесия механических систем под действием приложенных к ним сил и возникших моментов.

¹⁶ **Прямоугольная (декартова) система координат** – прямолинейная система координат с взаимно перпендикулярными осями на плоскости или в пространстве. Наиболее простая и поэтому часто используемая система координат. Очень легко и прямо обобщается для пространств любой размерности, что также способствует её широкому применению.

¹⁷ **Цилиндрической системой** координат называют трехмерную систему координат, являющуюся расширением полярной системы координат путём добавления третьей координаты (z – **аппликата**), которая задает высоту точки над плоскостью.

¹⁸ **Сферическая система координат** – трехмерная система координат, в которой каждая точка пространства определяется тремя числами (r, θ, φ), где r – расстояние до начала координат (радиальное расстояние), а θ, φ – зенитный и азимутальный углы соответственно.

¹⁹ **Полярная система координат** – это двумерная система координат, в которой каждая точка на плоскости определяется двумя числами – полярным углом и полярным радиусом. Полярная система координат особенно полезна в случаях, когда отношения между точками проще изобразить в виде радиусов и углов; в более распространенной декартовой, или прямоугольной, системе координат, такие отношения можно установить только путём применения тригонометрических уравнений.

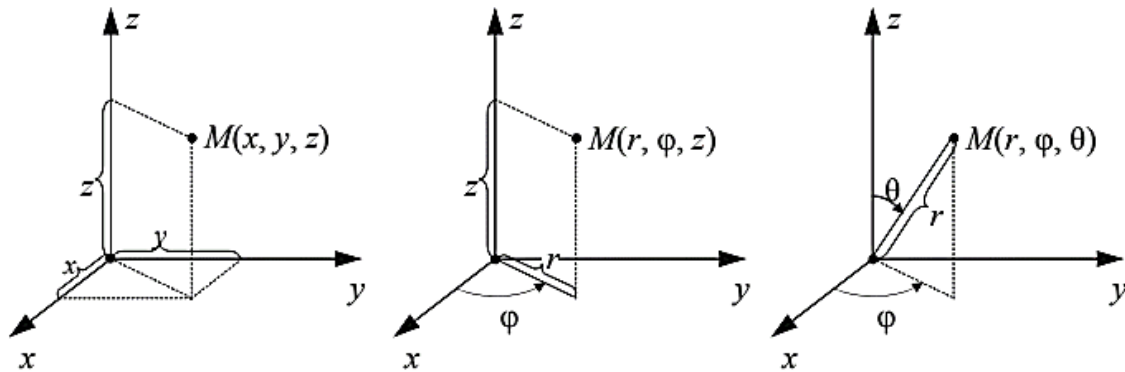


Рисунок 1.1 – Система координат (слева направо): декартова, цилиндрическая и сферическая

Положение материальной точки, как видно, характеризуется тремя координатами (x, y, z) или *радиус-вектором* $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы (*орты*):

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1; r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (1.1)$$

При движении материальной точки ее координаты, а следовательно и $\vec{r}$ – вектор, будут *изменяться со временем*.

Движение материальной точки определяется *скалярными уравнениями*²⁰:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad (1.2)$$

или *векторным уравнением* (уравнением движения материальной точки):

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \quad (1.3)$$

Оба они называются **кинематическими уравнениями движения материальной точки** (см. подробнее пп. 2.1).

1.3. Описание движения при различных скоростях тел (материальных точек)

Скорость (англ. speed) – это физическая (векторная) величина, характеризующая быстроту и направление движения тела (материальной точки). Несмотря на тот факт, что классическая (аналитическая) механика базируется на экспериментальных фактах, все они, по общему правилу, относятся к движениям макроскопических тел (систем). **Макроскопические тела (системы)** (англ. macroscopic bodies, systems) – это тела (системы), которые состоят из

²⁰ **Скаляр** (от лат. scalaris – ступенчатый) – величина, полностью определяемая в любой координатной системе одним числом или функцией. В математике под «числами» могут подразумеваться элементы произвольного поля, тогда как в физике имеются в виду действительные или комплексные числа. О функции, принимающей скалярные значения, говорят как о скалярной функции. Скаляр всегда описывается одним числом, а вектор может описываться двумя или более числами.

большого числа молекул; их размеры значительно превышают размеры одного атома или молекулы ($\gg 10^{-10}$ м)²¹. Все они находятся в постоянном движении; **медленное** или **нерелятивистское движение** (англ. slow, non-relativistic motion) – это движение с низкой скоростью, если сравнивать, например, со скоростью света в вакууме ~ 300 тыс. км/с. Соответственно, движения, приближающиеся к ней будут называться **быстрыми** или **релятивистскими** (англ. fast, relativistic motion). Так, например, движение космического корабля с $v = 8$ км/с – будет считаться относительно медленным, равно как и движение планет нашей Солнечной системы, их спутников и комет относительно Солнца. Прилагая к подобного рода телам (в т.ч. искусственно созданным их прототипам, например, спутникам) принципы классической (аналитической) механики, науке представилась возможность не только объяснить, но и предсказать характер и природу их движений согласно с их собственными наблюдениями, что, собственно, стало первым прото-доказательством справедливости Ньютоновой механики.

Примечание: любое движение твердого тела (материальной точки) можно представить как комбинацию *поступательного* и *вращательного* движений. **Поступательным** (англ. forward movement) будет называться движение, при котором любая прямая линия, непосредственно связанная с движущимся телом (материальной точкой), остается параллельной своему изначальному положению. В свою очередь, **вращательным** (англ. rotary motion) – такое движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной и той же прямой, называемой **осью вращения** (англ. axis of rotation). Как уже было неоднократно указано выше, движение тел (материальных точек) происходит в пространстве и времени, а значит для описания их движения необходимо знать, в каком именно месте пространства точка находилась в конкретный момент времени (см. подробнее пп. 2.4.1).

В XX в. известнейшие ученые задавались такими вопросами, как «возможно ли экстраполировать на быстрые движения принципы механики Ньютона, экспериментально установленные для медленного движения макроскопических тел», «применимы ли основные понятия и принципы механики Ньютона к явлениям микромира, т.е. явлениям, происходящим с отдельными молекулами, атомами, электронами, протонами, нейронами и прочими электрическими частицами» и так далее. Попытки поиска ответа на них предпринимались при помощи опытов и экспериментов, что и позволило, в целом, получить отрицательные результаты. Более того, *теория относительности Эйнштейна*, о которой мы подробно поговорим во второй части пособия, дала возможность предсказать, а опыт, соответственно, доказать, что Ньютонова механика неприменима и к движениям частиц, скорости которых близки к скорости света в вакууме. На ее основе и был создан новый раздел физики – **релятивистская механика** (англ. relativistic mechanics), или механика теории относительности, позволившая использовать последнюю к сколь угодно быстрым движениям.

В соответствии с положениями классической (аналитической) механики, скорость, до которой можно ускорить тело из состояния покоя, фактически ничем не ограничена, тогда как согласно постулатам релятивистской механики, значение скорости прямолинейно ускоряемого тела не может перейти через определенный предел, равный скорости света в вакууме c . В данном случае скорость будет называться **предельной** (англ. top speed); с практической точки

²¹ См. подробнее: Иванов В.К. Физика. Молекулярная физика [Текст]: учеб. пособие. – СПб.: ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2021. – 202 с. – С. 7.

зрения, достичь такой скорости тело не может, однако, может приблизиться. Так, в простейших ускорителях, получают частицы с высокой энергией, при которой скорость протонов меньше скорости света всего на $5,25 \times 10^{-5}$ м/с, а электронов – на $1,5 \times 10^{-9}$ м/с. В космических лучах регистрировались протоны со скоростями, которые меньше скорости света всего на величину порядка 10^{-10} м/с. К таким быстрым движениям, как мы уже сказали выше, механика Ньютона не применима; результаты механики Эйнштейна, практически повсеместно использовались и по сей день используются, к примеру, в электронной промышленности – от телевизоров и компьютеров с цветными электронно-лучевыми трубками до жидкокристаллических мониторов. Их работа, как и конструкция ускорителей заряженных частиц, рассчитывается на основе релятивистской механики, и тот факт, что они действуют согласно расчетам, является лишним аргументом в пользу ценности эксперимент-ориентированной механики Эйнштейна.

1.4. Корпускулярные и волновые свойства тел

Корпускулярно-волновой дуализм (от лат. dualis – двойственный) (англ. wave-particle duality) – это свойство природы (принцип), заключающееся в том, что материальные микроскопические тела (системы) могут при одних условиях проявлять *свойства классических волн*, при других – *свойства классических частиц*²²; иными словами, любому микроскопическому объекту свойственны одновременно и корпускулярные, и волновые характеристики²³. Так, например, электрон, нейтрон и фотон в одних условиях будут вести себя как частицы, движущиеся по классическим траекториям и имеющие определенную энергию и импульс (**см. подробнее пп. 4.2, 5.3, 6.1**), тогда как в других – обнаружится их волновая природа, которая характерна для явлений *интерференции*²⁴ и *дифракции*²⁵ частиц. Ранее, корпускулярно-волновой дуализм был определен для света; распространение света как потока фотонов и квантовый характер взаимодействия его с веществом подтверждались многочисленными экспериментами, однако, ряд оптических явлений, таких как интерференция, поляризация и дифракция, неоспоримо говорили о волновых свойствах света.

Классическая (аналитическая) физика (механика) всегда четко разделяла объекты, которые обладают волновой природой (к примеру, звук и свет), и объекты, обладающие дискретной корпускулярной структурой (к примеру, системы материальных точек). Одним из важнейших достижений физики XX в. стало убеждение в ложности противопоставления волновых и

²² В физике **частица** представляет собой небольшой локализованный объект, которому можно приписать несколько физических или химических свойств, таких как *объем, плотность или масса*. Они сильно различаются по размеру или значению, от субатомных частиц, таких как электрон, до микроскопических частиц, таких как атомы и молекулы, до макроскопических частиц, таких как порошки и другие гранулированные материалы. Частицы можно также использовать для создания научных моделей даже более крупных объектов в зависимости от их плотности, таких как люди, движущиеся в толпе, или небесные тела в движении.

²³ **См. подробнее:** Яковлев И.В. Корпускулярно-волновой дуализм // Портал «Mathus». – URL: <https://mathus.ru/phys/duality.pdf> (дата обращения: 15.12.2022); Трубицин Н.М. Доказательства корпускулярно-волнового дуализма света на примере биологических систем // Молодой исследователь Дона. 2020. №3 (24). С. 183-189; Кузнецов С.И. Физика: оптика. Элементы атомной и ядерной физики. Элементарные частицы [Текст]: учебное пособие для вузов. – М.: Издательство Юрайт, 2022. – 301 с.

²⁴ **Интерференция** (лат. interference, от inter – между + -ference – несущий, переносящий) – взаимное увеличение или уменьшение результирующей амплитуды двух или нескольких когерентных волн при их наложении друг на друга. Сопровождается чередованием максимумов (пучностей) и минимумов (узлов) интенсивности в пространстве. Результат интерференции (интерференционная картина) зависит от разности фаз накладываются волн.

²⁵ **Дифракция** (в старой литературе также диффракция, от лат. diffractus; букв. – «разломанный») – явление огибания волнами препятствий, в широком смысле любое отклонение от законов геометрической оптики при распространении волн. Она представляет собой универсальное волновое явление и характеризуется одними и теми же законами при наблюдении волновых полей разной природы.

квантовых свойств света. Так, если рассматривать его как поток фотонов, а фотоны – как кванты электромагнитного излучения, обладающие и волновыми, и корпускулярными свойствами одновременно, физика может объединить антагонистичные (от греч. *antagonisma* – спор, борьба) теории – волновую и корпускулярную, соответственно. В результате, сформулировалось представление о корпускулярно-волновом дуализме, которое лежит в основе современной физики (*корпускулярно-волновой дуализм оказывается первичным принципом квантовой механики и квантовой теории поля*).

Примечание: противоречия с применяемыми теориями, выявленные в результате экспериментов начала прошлого столетия, требовали пересмотра основ *квантовой теории и представлений о природе микрочастиц* (электронов, протонов и проч.). **Микрочастица** (от греч. *μικρός* – малый) – это частица малой массы (в частности, нулевой), для движения и взаимодействия которой существенна дискретность (атомизм) действия. В результате, возник вопрос о том, насколько исчерпывающим является представление электрона в виде малой механической частицы (материальной точки), характеризующейся определенными координатами и определенной скоростью. Дуализм в оптических явлениях на тот момент уже был выявлен, тогда как наряду с явлениями дифракции, интерференции (волновыми явлениями) также отмечались явления, характеризующие корпускулярную природу света (*фотоэффект, эффект Комптона*).

В 1924 г. французский физик *Луи де Бройль*²⁶ выдвинул гипотезу, что **дуализм не является особенностью только оптических явлений, а имеет универсальный характер. Частицы вещества также обладают волновыми свойствами**. Если фотон обладает энергией $E = h\nu$ и импульсом $p = h/\lambda$, то и частица (например, электрон), движущаяся с некоторой скоростью, обладает волновыми свойствами, т.е. движение частицы можно рассматривать как движение волны²⁷.

Согласно положениям **квантовой механики** (англ. *quantum mechanics*)²⁸, свободное движение частицы с массой m и импульсом $\vec{p} = m\vec{v}$ (где $\vec{v}$ – это скорость частицы)

²⁶ **Луи Виктор Пьер Раймон**, 7-й герцог Броли, более известный как **Луи де Бройль** (1892-1987) – французский физик-теоретик, один из основоположников квантовой механики, лауреат Нобелевской премии по физике за 1929 г., член Французской академии наук (с 1933 г.) и её неперменный секретарь (с 1942 г.), член Французской академии (с 1944 г.). Луи де Бройль является автором работ по фундаментальным проблемам квантовой теории. Ему принадлежит гипотеза о волновых свойствах материальных частиц (волны де Бройля, или волны материи), положившая начало развитию волновой механики. Он предложил оригинальную интерпретацию квантовой механики (теория волны-пилота, теория двойного решения), развивал релятивистскую теорию частиц с произвольным спином, в частности фотонов (нейтринная теория света), занимался вопросами радиофизики, классической и квантовой теориями поля, термодинамики и других разделов физики.

²⁷ *Кузнецов С.И.* Физика: оптика. Элементы атомной и ядерной физики. Элементарные частицы [Текст]: учебное пособие для вузов. – С. 129-130.

²⁸ **Квантовая (волновая) механика** – это фундаментальная физическая теория, которая описывает природу в масштабе атомов и субатомных частиц. Она лежит в основании всей квантовой физики, включая квантовую химию, квантовую теорию поля, квантовую технологию и квантовую информатику. Классическая физика, совокупность теорий, существовавших до появления квантовой механики, описывает многие аспекты природы в обычном (макроскопическом) масштабе, но недостаточна для их количественного описания в малых (атомных и субатомных) масштабах. Большинство теорий классической физики можно вывести из квантовой механики как приближения, справедливые в больших (макроскопических) масштабах. Квантовая механика отличается от классической физики тем, что энергия, импульс, угловой момент и другие величины связанного состояния системы не могут принимать произвольные значения, но ограничены дискретными значениями (квантование), объекты обладают характеристиками как частиц, так и волн (корпускулярно-волновой дуализм), и существуют пределы нашей возможности точно предсказать значение физической величины до её измерения при заданном полном наборе начальных условий (принцип неопределенности).

можно представить как плоскую монохроматическую волну ψ_0 (волну де Бройля)²⁹ с длиной волны (1.4), которая распространяется в том же направлении (к примеру, оси x), что и движется частица (см. рисунок 1.2).

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (1.4)$$

Зависимость волновой функции ψ_0 от координаты x дается следующей формулой:

$$\psi_0 \cos(k_0 x) \quad (1.5)$$

где: k_0 – это волновое число, а волновой вектор $\vec{k}_0$ направлен в сторону распространения волны или вдоль движения частицы:

$$\vec{k}_0 = \frac{2\pi}{h} \vec{p} \quad (1.6)$$



Рисунок 1.2 – Движение частицы

Исходя из этого, волновой вектор монохроматической волны, связанной со свободно движущейся микрочастицей, пропорционален ее импульсу или обратно пропорционален длине волны. Ввиду того, что кинетическая энергия сравнительно медленно движущейся частицы $E_k = mv^2/2$, то длину волны можно выразить также через энергию:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE_k}} \quad (1.7)$$

В условиях взаимодействия частицы с некоторым объектом (материальной точкой) – молекулой, кристаллом и проч. – ее энергия будет меняться: к ней добавится потенциальная энергия этого взаимодействия, что приведет к изменению движения частицы. Как следствие, поменяется и характер распространения связанной с частицей волны, что будет происходить согласно принципам, общим для всех волновых явлений. По этой причине, основные геометрические закономерности дифракции частиц не будут ничем отличаться от закономерностей дифракции любых волн. Особым условием дифракции волн любой природы является соизмеримость длины падающей волны λ с расстоянием d между рассеивающими центрами: $\lambda \leq d$.

²⁹ **Монохроматическая волна** – это строго гармоническая (синусоидальная) волна с постоянными во времени частотой и амплитудой. Такая волна может быть бегущей или стоячей, последняя формируется при распространении двух плоских монохроматических волн одинаковой поляризации навстречу друг другу.

Гипотеза Луи де Бройля стала революционной даже для своего времени, однако, в последствии, она неоднократно подтверждалась опытами и экспериментами.

1.5. Размерность физической величины; системы единиц физических величин

Значение **величины** (англ. magnitude), как правило, выражается как произведение числа на единицу; **размерность физической величины** (англ. dimension of a physical quantity) – это единица измерения, в которой эта величина измеряется³⁰. **Единица** (англ. unit) – это конкретная величина определенного рода, которая используется как основа для сравнения, а **число** (англ. number) – выражает отношение значения величины к значению единицы. Для конкретной величины могут быть использованы разные единицы; так, значение скорости v может быть выражено как $v = 25$ м/с или $v = 90$ км/ч, где метр в секунду и километр в час – это альтернативные единицы для одной и той же величины скорости. Обращаем внимание уважаемого читателя на то, что прежде чем представлять результат измерения, важно адекватно описать измеряемую величину. Оно может быть простым, как в случае длины конкретного стального прута, а может усложниться, когда, например, потребуется более высокая точность и необходимость указать дополнительные параметры, такие как амплитуда. Таким образом, при представлении результата измерения необходимы *оценочное значение* измеряемой величины и связанная с этим значением *неопределенность*; оба параметра выражаются в одних и тех же единицах.

³⁰ **Размерность физической величины** – выражение в форме степенного одночлена, составленного из произведений символов основных физических величин в различных степенях, которое отражает связь данной величины с основными физическими величинами, принятыми в данной системе, с коэффициентом пропорциональности, равным единице. Размерность величин обозначают знаком dim . Например, $dim X = L^l \times M^m \times T^t$ где L, M, T – символы величин длины, массы, времени, принятые за основные; l, m, t – показатели размерности основных величин, которые могут быть целыми или дробными, положительными или отрицательными вещественными числами. **Прим.:** яблоки нельзя складывать со сливами или арбузами. Эта простая мысль лежит в основе теории размерности. Размерность физической величины – это единица измерения, в которой эта величина измеряется. Почему яблоки нельзя складывать со сливами или арбузами? Потому, что приравнивать корзину, в которой 2 яблока и 3 арбуза, корзине, в которой 4 яблока и 1 арбуз, было бы неестественно: 2 яблока + 3 арбуза = 5 чего-то $\neq$ 5 чего-то другого = 4 яблока + 1 арбуз.

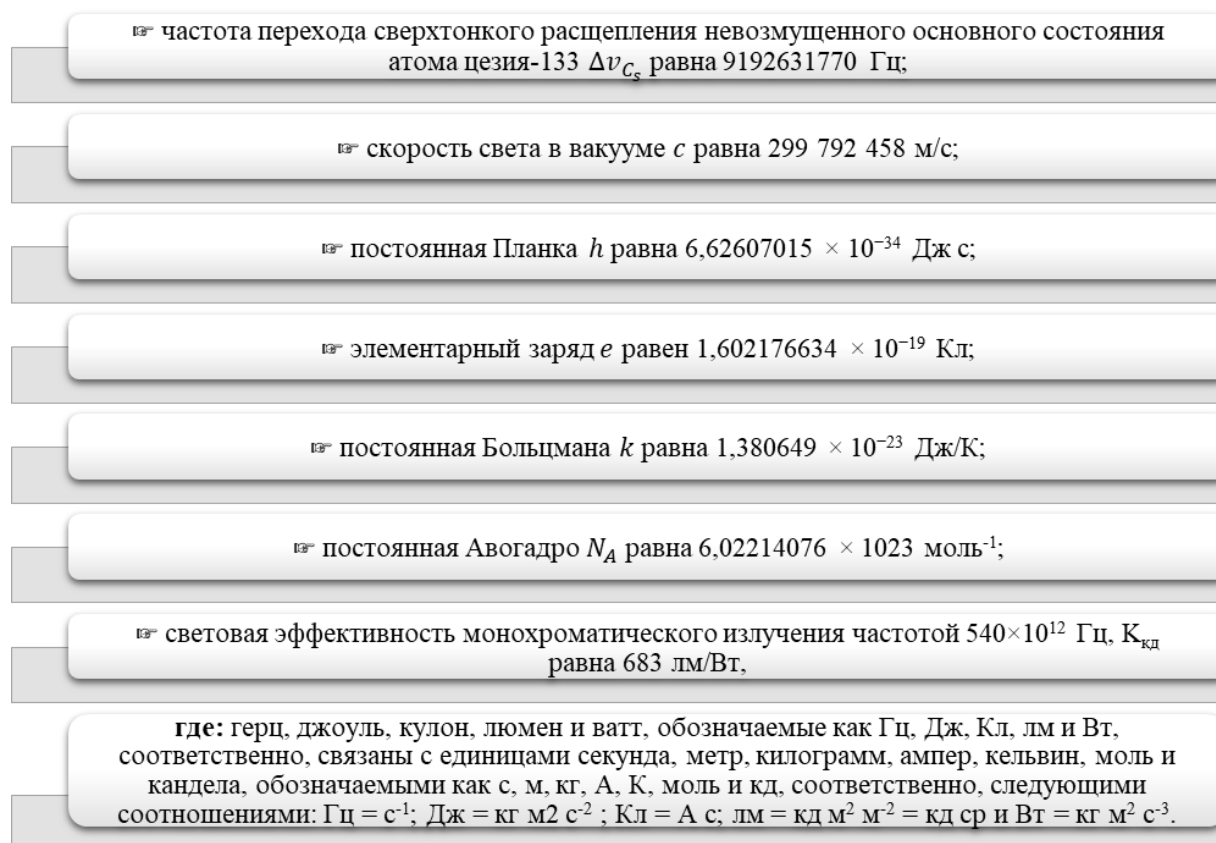


Рисунок 1.3 – Семь констант Международной системы единиц СИ

Как и для любой величины, значение фундаментальной константы может быть выражено в виде произведения числа на единицу. Представленные на **рисунке 1.3** определения дают точное числовое значение каждой из *констант*³¹, выраженное в соответствующих единицах системы СИ. Согласно международному словарю метрологии, **Международная система единиц СИ** (фр. *Système international d'unités*, SI) – это система единиц, основанная на Международной системе величин, вместе с наименованиями и обозначениями, а также набором приставок и из наименованиями и обозначениями вместе с правилами их применения, принятая Генеральной конференцией по мерам и весам (CGPM). Фиксация точного числового значения константы определяет единицу, т.к. произведение числового значения на единицу должно быть равно значению константы, которое полагается постоянным. Семь констант выбраны таким образом, что любая единица СИ может быть представлена или через саму определяющую константу, или через произведения или отношения определяющих констант. Так, система единиц СИ – это такая система единиц, в которой:

Сохранение преемственности, насколько это возможно, всегда было неотъемлемой частью любых изменений в Международной системе единиц. Числовые значения определяющих констант были выбраны таким образом, чтобы соответствовать предыдущим определениям настолько, насколько позволяют современные достижения в науке и накопленные знания.

³¹ **Прим.:** определение единиц СИ основано на наборе из *семи определяющих констант*. Вся система единиц может быть получена из фиксированных значений этих определяющих констант, выраженных в единицах СИ. Эти семь определяющих констант – фундаментальная особенность определения всей системы единиц. Набор данных констант был признан оптимальным, принимая во внимание предыдущее определение СИ, основанное на семи основных единицах, и прогресс в науке.

До определений, принятых в 2018 г., СИ определялась через семь *основных единиц* а производные единицы вычислялись как *произведения степеней основных единиц* (см. таблицу 1.1). Определение СИ путем фиксирования числовых значения семи определяющих констант приводит к тому, что это различие, фактически, больше не требуется, т.к. все единицы, как основные, так и производные, могут быть выведены непосредственно из определяющих констант. Одновременно с этим, концепция основных и производных единиц сохраняется, т.к. она полезна и исторически хорошо обоснована, учитывая, что стандарты серии ISO/IEC 80000 определяют основные и производные величины, которые, безусловно, соответствуют основным и производным единицам СИ. На основе ее определения через фиксированные числовые значения определяющих констант определения каждой из семи основных единиц выводятся при помощи одной или нескольких определяющих констант³²:

– **секунда** (англ. second), обозначение $s(s)$, есть единица времени в СИ. Она определяется путем принятия фиксированного числового значения частоты перехода сверхтонкого расщепления невозмущенного основного состояния атома цезия-133 $\Delta\nu_{Cs}$ равным 9 192 631 770 при выражении в единице Гц, что соответствует s^{-1} ;

Таблица 1.1 – Основные единицы международной системы СИ

Основная величина		Основная единица	
Наименование	Принятое обозначение	Наименование	Обозначение
время	t	Секунда	$s(s)$
длина	l, x, r и проч.	Метр	$m(m)$
масса	m	Килограмм	$kg(кг)$
электрический ток	I, i	Ампер	A
термодинамическая температура	T	Кельвин	K
количество вещества	n	Моль	$mol(моль)$
сила света	I_v	кандела	$cd(кд)$

– **метр** (англ. meter), обозначение $m(m)$, есть единица длины в СИ. Он определяется путем принятия фиксированного числового значения скорости света в вакууме с равным 299 792 458 при выражении в единице $m\ s^{-1}$, где секунда определяется через частоту перехода в цезии $\Delta\nu_{Cs}$;

– **килограмм** (англ. kilogram), обозначение $kg(kg)$, есть единица массы в СИ. Он определяется путем принятия фиксированного числового значения постоянной Планка h равным $6,62607015 \times 10^{-34}$ при выражении в единице Дж/с, что соответствует $kg\ m^2\ s^{-1}$, где метр и секунда определяются через s и $\Delta\nu_{Cs}$;

– **ампер** (англ. ampere), обозначение $A(A)$, есть единица электрического тока в СИ. Он определяется путем принятия фиксированного числового значения элементарного заряда e равным $1,602176634 \times 10^{-19}$ при выражении в единице Кл, что соответствует $A\ s$, где секунда определяется через $\Delta\nu_{Cs}$;

– **кельвин** (англ. kelvin), обозначение $K(K)$, есть единица термодинамической температуры в СИ. Он определяется путем принятия фиксированного числового значения постоянной Больцмана, k равным $1,380649 \times 10^{-23}$ при выражении в единице Дж K^{-1} , что соответствует $kg\ m^2\ s^{-2}\ K^{-1}$, где килограмм, метр и секунда определяются через h, s и $\Delta\nu_{Cs}$;

³² См. подробнее: Международная система единиц (SI). – 9-е изд. – М.: Росстандарт, 2019. – 100 с.

– **моль** (англ. mole), обозначение моль (*mol*), есть единица количества вещества в СИ. Один моль содержит точно $6,02214076 \times 10^{23}$ структурных элементов. Это число есть фиксированное числовое значение постоянной Авогадро, N_A , выраженное в единице моль⁻¹ и называемое числом Авогадро. Количество вещества в системе, обозначение n , является мерой количества конкретных структурных элементов. Структурными элементами могут быть атомы, молекулы, ионы, электроны и любые другие частицы или определенные группы частиц;

– **кандела** (англ. candela), обозначение кд (*cd*), в СИ есть единица силы света в заданном направлении. Она определяется путем принятия фиксированного числового значения световой эффективности монохроматического излучения частотой 540×10^{12} Гц, ККД, равным 683 в единице лм Вт⁻¹ или кд ср кг⁻¹ м⁻¹ с³, где килограмм, метр и секунда определяются через h , c и $\Delta\nu Cs$.

Глава 2. Основы кинематики

2.1. Кинематика материальной точки и способы описания ее движения в пространстве

2.1.1. Способы описания движения и траектория материальной точки

Основными **способами описания движения материальной точки в механике** являются: *векторный, координатный и естественный*. В первом случае (**векторный способ** – англ. vector method) задания движения положение материальной точки M на конкретный момент времени характеризует радиус-вектор $\vec{r}$ (см. подробнее пп. 1.2), проведенный из начала координат в эту точку (см. **рисунок 2.1**). При движении материальной точки в пространстве конец радиус-вектора $\vec{r}$ описывает в пространстве кривую, называемую **траекторией** (англ. trajectory), причем длина и направление $\vec{r}$ меняются со временем, – согласно закону – уравнению движения материальной точки ($\vec{r} = \vec{r}(t)$) ((1.3). пп. 1.2)

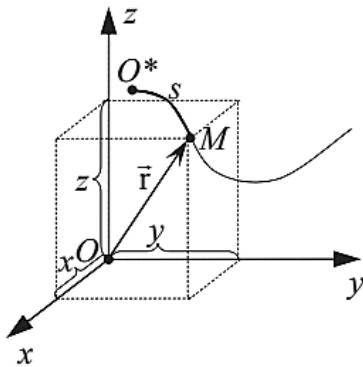


Рисунок 2.1 – Способы задания движения материальной точки

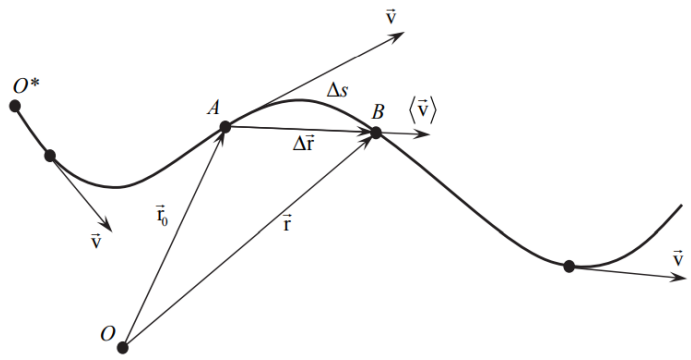


Рисунок 2.2 – Перемещение материальной точки вдоль произвольной траектории из положения A в положение B

В зависимости от формы траектории движения материальной точки, движение, по общему правилу, может быть *прямо- или криволинейным*, и для того, чтобы найти уравнением траектории точки, необходимо в уравнениях пп. 1.2, (1.2) и (1.3) *исключить время*. Так, рассмотрим ситуацию, при которой материальная точка перемещается вдоль некоторой (произвольной) траектории из положения A в положение B (см. **рисунок 2.2**); радиус-векторы точек A и B – это $\vec{r}_0$ и $\vec{r}$. Вектор $\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0$, проведенный из начального в конечное положение точки называется **вектором перемещения** (англ. displacement vector) или, просто, *перемещением*. Перемещение $\Delta\vec{r}$ – это приращение радиус-вектора $\vec{r}$ точки за рассматриваемый период времени. В свою очередь, длина отрезка траектории AB , который прошло тело, называется **длиной пути** (англ. path length) ΔS .

Важно запомнить: перемещение $\Delta\vec{r}$, средняя и мгновенная скорость $\langle\vec{v}\rangle, \vec{v}$ – это векторы, длина пути ΔS – скаляр.

В случае прямолинейного движения модуль перемещения будет равен пройденному пути, т.е.:

$$|\Delta \vec{r}| = \Delta S \quad (2.1)$$

А в случае криволинейного движения –

$$|\Delta \vec{r}| < \Delta S \quad (2.2)$$

Однако, если перемещение осуществляется в течение бесконечно малого (крайне незначительного) промежутка времени (т.е. Δt стремится к 0), то модуль такого перемещения можно принять как равное бесконечно малой (крайне незначительной) длине пути, вне зависимости от способа движения (произвольно):

$$|d\vec{r}| < dS \quad (2.3)$$

В случае же, если материальная точка стала участником одновременно *нескольких перемещений*, как это видно на **рисунке 2.3**, то итоговое перемещение будет равно их векторной сумме, т.е. сумме перемещений материальной точки в каждом движении отдельно:

$$\Delta \vec{r} = \sum \Delta \vec{r}_1 \quad (2.4)$$

$$\Delta \vec{r} = \sum \Delta \vec{r} + \Delta \vec{r}_0 \quad (2.5)$$

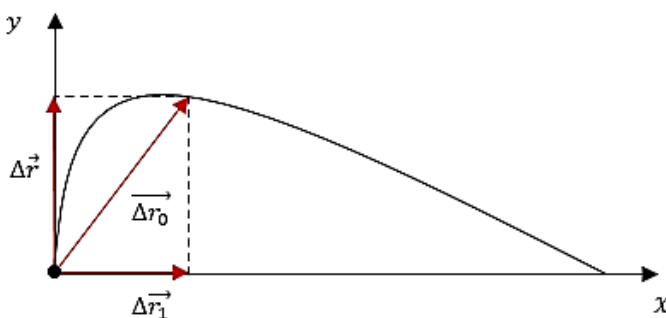


Рисунок 2.3 – Ситуация, при которой материальная точка участвует в нескольких перемещениях

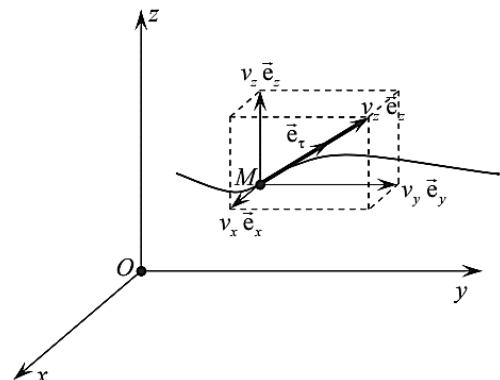


Рисунок 2.4 – Распад вектора мгновенной скорости на три элемента

При **координатном способе** (англ. coordinate method) движения (если используется классическая, прямоугольная или декартова система координат), положение материальной точки в конкретный момент времени характеризуется *тремя координатами* (x, y, z), соответственно, перемещение материальной точки представляется как *результат трех независимых перемещений вдоль осей координат* (см. рисунок 2.1). Таким образом, уравнение движения материальной точки записывается в виде трех, уже известных уважаемому читателю ($x = x(t); y = y(t); z = z(t)$) (пп. 1.2, (1.2)). Количество независимых координат, которые полностью

определяют положение материальной точки в пространстве, называется **числом степеней свободы** (англ. number of degrees of freedom). Радиус-вектор $\vec{r}$ материальной точки можно также выразить через ее координаты:

$$\vec{r} = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z, \quad (2.6)$$

при: $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (пп. 1.2, (1.1))

где: $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ – единичные векторы соответствующих осей координат.

Примечание: три степени свободы (координаты x, y, z) – соответствуют свободному движению в пространстве; две (координаты x, y) – движению по некоторой поверхности; одна – (координата x) – движению вдоль некоторой линии.

В свою очередь, при **естественном способе** (англ. natural way method) задания движения положение материальной точки будет характеризоваться *дуговой координатой* S – расстоянием, измеряемым вдоль траектории движения материальной точки (см. рисунок 2.1). В таком случае уравнение движения материальной точки приобретет следующий вид:

$$S = S(t) \quad (2.7)$$

Для полной записи движения материальной точки приведем еще два уравнения, определяющие ее траекторию:

$$y = y(t); z = z(t) \quad (2.8)$$

Примечание: единицей измерения расстояния, пути и перемещения в системе единиц СИ является метр (м).

2.1.2. Скорость материальной точки при разных способах задания ее движения

Скорость – это, как уже было указано ранее, векторная величина, которая характеризует быстроту и направление движения тела – материальной точки. Ее *единицей измерения* в системе единиц СИ является метр в секунду (м/с), т.е. скорость 1 м/с будет иметь материальная точка, которая за 1 секунду проходит путь в 1 метр (осуществляет перемещение длиной 1 м или изменяет свою координату на 1 м). При векторном способе задания движения она характеризуется *векторами средней и мгновенной скорости*. **Вектор средней скорости** (англ. average speed vector) – это отношение приращения радиус-вектора $\vec{r}$ материальной точки к промежутку времени Δt (2.9). Направление этого вектора, по общему правилу, совпадает с направлением перемещения (см. рисунок 2.2).

$$\langle \vec{v} \rangle = \Delta \vec{r} / \Delta t \quad (2.9)$$

Примечание: под *средней скоростью движения материальной точки* понимается величина, равная отношению длины пути ΔS к промежутку времени Δt , за который эта точка прошла этот путь, т.е.: $\langle v \rangle = \Delta S / \Delta t$.

Модуль вектора средней скорости будет определяться следующим выражением:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \quad (2.10)$$

В случае неограниченного уменьшения Δt вектор средней скорости стремится к предельному значению, т.е. к **вектору мгновенной скорости** (англ. instantaneous velocity vector) (2.11); он равен первой производной радиус-вектора $\vec{r}$ движущегося тела по времени и направлен по касательной к траектории оси в сторону движения (см. рисунок 2.2).

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \right) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} \quad (2.11)$$

При координатном способе задания движения материальной точки, вектор мгновенной скорости, соответственно, проецируют на оси координат (см. рисунок 2.4) и представляют в следующем виде:

$$\vec{v} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y + v_z \vec{e}_z \quad (2.12)$$

В (2.12) v_x, v_y, v_z – это проекции вектора мгновенной скорости на оси координат (x, y, z) . Для их определения спроецируем на координатные оси радиус-вектор $\vec{r}$ и продифференцируем его по времени, что дает нам следующее выражение:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \vec{e}_x + \frac{dy}{dt} \vec{e}_y + \frac{dz}{dt} \vec{e}_z \quad (2.13)$$

Если сравнить (2.12) и (2.13), то получается (2.14):

$$v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt}, v_z = \frac{dz}{dt} \quad (2.14)$$

Наконец, вектор мгновенной скорости при естественном способе задания движения материальной точки будет представлен следующим выражением:

$$\vec{v} = v \vec{e}_\tau \quad (2.15)$$

где: $\vec{e}_\tau$ – это единичный вектор касательной к траектории, а v , соответственно, – мгновенная скорость материальной точки, которая равна первой производной от дуговой координаты по времени, т.е.:

$$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s} \quad (2.16)$$

Представим выражение (2.13) в следующем виде: $ds = v(t)dt$; далее проинтегрируем его в пределах от начального t_1 до конечного момента времени t_2 . В результате, мы получим изменение дуговой координаты материальной точки за время $\Delta t = t_2 - t_1$:

$$\Delta S = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt \quad (2.17)$$

2.1.3. Ускорение материальной точки при разных способах задания ее движения; кривизна траектории

Физическая (векторная) величина **ускорение** (англ. acceleration) вводится в случае неравномерного движения для описания изменения скорости с течением времени; она позволяет охарактеризовать быстроту изменения скорости по величине и направлению. **Мгновенное ускорение материальной точки** (англ. instantaneous acceleration) – это величина, которая характеризует быстроту изменения вектора скорости этой точки; как видно из выражении (2.18), она равна первой производной от скорости по времени.

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} \quad (2.18)$$

Примечание: единицей измерения ускорения в системе единиц СИ является *метр на секунду в квадрате* (м/с²). Ускорением 1 м/с² будет обладать материальная точка, которая за 1 секунду изменит свою скорость на 1 м/с.

В случае *координатного способа задания ее движения*, вектор мгновенного ускорения проецируется на оси координат (см. рисунок 2.5):

$$\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z \quad (2.19)$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

В (2.19) a_x, a_y, a_z – это проекции мгновенного ускорения на оси координат (x, y, z). Для их определения продифференцируем выражение (2.12) по времени, что даст нам следующее выражение:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}; a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}; a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} \quad (2.20)$$

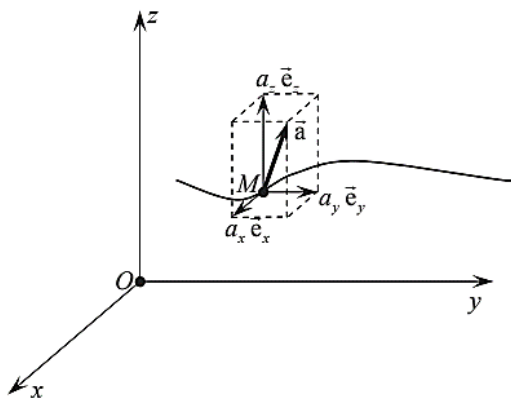


Рисунок 2.5 – Распад вектора мгновенного ускорения на три элемента

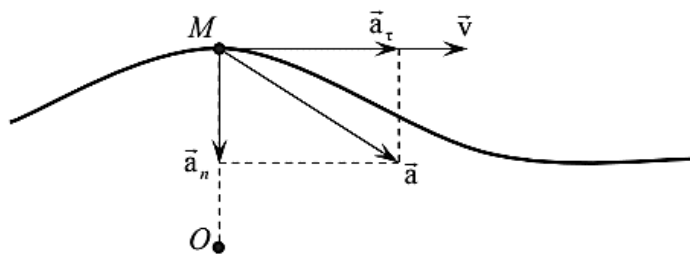


Рисунок 2.6 – Распад вектора мгновенного ускорения на нормальный и тангенциальный элементы (естественный способ движения точки)

При естественном способе задания движения материальной точки, как это представлено на **рисунке 2.6**, вектор ускорения можно разложить на две части:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n = a_\tau \vec{e}_\tau + a_n \vec{e}_n \quad (2.21)$$

Первая часть ($\vec{a}_\tau = a_\tau \vec{e}_\tau$) называется **тангенциальным (касательным)** (англ. tangential acceleration), вторая (она направлена перпендикулярно касательной) – ($\vec{a}_n = a_n \vec{e}_n$) – **нормальным ускорением материальной точки** (англ. normal acceleration). Для того, чтобы определить a_τ и a_n продифференцируем выражение (2.15); в результате, получаем следующее:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(v\vec{e}_\tau) = \frac{dv}{dt}\vec{e}_\tau + v \frac{d\vec{e}_\tau}{dt} \quad (2.22)$$

В (2.22) $d\vec{e}_\tau$ – это выражение приращения единичного вектора касательной к траектории (см. **рисунок 2.7**), соответствующего элементарному пути $ds = vdt$, который проходит материальная точка по траектории за бесконечно малый промежуток времени dt . Участок траектории ds – это (в конкретном случае) малая дуга окружности радиуса (R). Если точка движется по криволинейной траектории, то ее отличие от прямолинейной характеризуется **радиусом кривизны** (англ. trajectory curvature radius), или *кривизной траектории*; она характеризует скорость поворота касательной при движении. Центр окружности, таким образом, будет называться **центром кривизны траектории** (англ. center of curvature radius). Малой дуге окружности ds соответствует центральный угол поворота $d\alpha$, определяемый выражением:

$$d\alpha = \frac{ds}{R} = \frac{v}{R} dt \quad (2.23)$$

Примечание: тангенциальное ускорение характеризует быстроту изменения количественного значения скорости материальной точки; оно соответствует направлению вектора скорости – при условии, что это значение увеличивается, и противоположно – если

уменьшается. В свою очередь *нормальное ускорение* характеризует быстроту изменения направления вектора скорости и направлено по нормали к траектории всегда к центру кривизны.

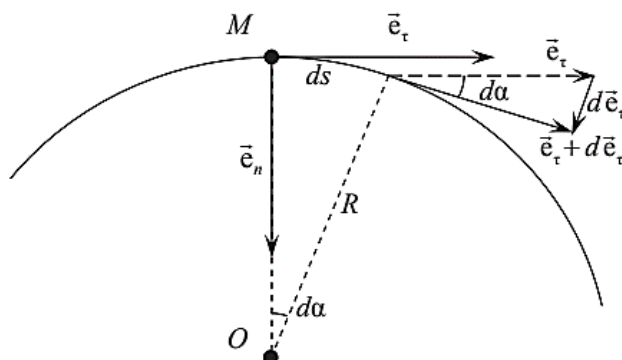


Рисунок 2.7 – Приращение единичного вектора касательной к траектории

Как видно на рисунке 2.7, когда материальная точка перемещается по траектории на расстояние ds , единичный вектор касательной – поворачивается на угол $d\alpha$. Поскольку этот угол относительно мал, модуль вектора $d\vec{e}_\tau$ будет равен длине дуги окружности, описывающей единичный вектор $\vec{e}_\tau$ при повороте. Иными словами: $|d\vec{e}_\tau| = |\vec{e}_\tau|d\alpha = d\alpha$. Кроме того, вектор $d\vec{e}_\tau$ по своему направлению соответствует единичному вектору нормали к траектории $\vec{e}_n$. Из этого следует, что $d\vec{e}_\tau = d\alpha\vec{e}_n$ и:

$$\frac{d\vec{e}_\tau}{dt} = \frac{d\alpha}{dt}\vec{e}_n = \frac{v^2}{R}\vec{e}_n \quad (2.24)$$

Таким образом, можно заключить, что выражение (2.21) может быть записано по-другому:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{e}_\tau + \frac{v^2}{R}\vec{e}_n \quad (2.25)$$

Соответственно, $a_\tau = \dot{v}$ (1.26); $a_n = \frac{v^2}{R}$ (1.27); $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$ (1.28).

Если первое выражение представить в виде $dv = a_\tau(t)dt$ и проинтегрировать в пределах t_1, t_2 , т.е. от начального до конечного момента времени, то получим приращение мгновенной скорости материальной точки за время $\Delta t = t_2 - t_1$:

$$\Delta v = \int_{t_1}^{t_2} a_\tau(t)dt \quad (2.26)$$

2.3. Типология движений материальной точки

Движение материальной точки также может *классифицироваться* по признаку зависимости того, как с течением времени изменится ее тангенциальное (касательное) ускорение $\vec{a}_\tau$. Согласно этому, материальная точка может двигаться *равномерно*, *равнопеременно* или *переменно*. Так, **равномерным** (англ. uniform motion) будет называться движение с нулевым тангенциальным (касательным) ускорением, т.е. $\vec{a}_\tau = \vec{0}$. Принимая во внимание выражение (1.26),

правомерным является заключение о том, что скорость материальной точки в конкретном случае постоянна и не будет меняться с течением времени, т.е. $\vec{v} = \overline{const}$. Иными словами, за равные промежутки времени тело проходит одинаковые расстояния. Используя выражение (2.17), получаем следующее изменение дуговой координаты точки за некоторое время t (при равномерном движении):

$$\Delta S = \int_0^t v dt = vt \quad (2.27)$$

Равнопеременное движение (англ. equally alternating motion) – это такое движение материальной точки, при котором *тангенциальное (касательное) ускорение* с течением времени не меняется, т.е. $\vec{a}_\tau = \overline{const}$. Если его вектор $\vec{a}_\tau$ будет совпадать по направлению с вектором мгновенной скорости $\vec{v}$, то модуль скорости тела с течением времени увеличится, и движение станет **равноускоренным** (англ. uniformly accelerated motion). В случае же, если $\vec{a}_\tau$ направлен противоположно $\vec{v}$, то количественное значение скорости с течением времени уменьшится, и движение станет, соответственно, **равнозамедленным** (англ. uniformly slowdown motion).

Предположим, что в начальный момент времени скорость материальной точки равна $\vec{v}_0$. Воспользовавшись выражением (2.26), можно определить ее скорость через определенный промежуток времени t (2.28). Как видно, при равнопеременном движении зависимость скорости от времени будет описана *линейной функцией*. Иными словами, за одинаковое время скорость движения материальной точки изменится на одинаковую величину.

$$\vec{v}_t = \vec{v}_0 + \Delta \vec{v}_t = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a}_\tau dt = \vec{v}_0 + \vec{a}_\tau t \quad (2.28)$$

Наконец, для того, чтобы получить изменение дуговой координаты этой точки за определенный промежуток времени t (при равноускоренном движении), также можно использовать выражение (2.17). Таким образом, получим:

$$\Delta S = \int_0^t (v_0 + a_\tau t) dt = v_0 t + \frac{a_\tau t^2}{2} \quad (2.29)$$

Переменным (англ. variable movement) будет называться движение материальной точки с тангенциальным (касательным) ускорением, изменяемое с течением времени произвольно, т.е. $\vec{a}_\tau = \vec{a}_\tau(t)$. Используя выражения (2.17) и (2.26), можно определить ее скорость $\vec{v}_t$ в конкретный момент времени t и узнать изменение дуговой координаты за это время:

$$\vec{v}_t(t) = \vec{v}_0 + \Delta \vec{v}_t = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a}_\tau(t) dt \quad (2.30)$$

$$\Delta S = \int_0^t v(t) dt \quad (2.31)$$

Также, в зависимости от того, каким образом с течением времени меняется радиус кривизны траектории R , можно выделить *криволинейное, прямолинейное движение* материальной точки, а также *движение по окружности*. **Криволинейное движение** (англ. curvilinear motion) – это движение по траектории, R которой изменяется с течением времени произвольным образом, т.е. $R = R(t)$; **прямолинейное движение** (англ. rectilinear motion) – это, соответственно, движение по траектории, R которой стремится к бесконечности, т.е. $R \rightarrow \infty$; **движение по**

окружности (англ. circular motion), в свою очередь, – это по траектории, R которой не меняется с течением времени, т.е. $R = const$.

2.4. Кинематика абсолютно твердого тела

2.4.1. Понятие и типология движения абсолютно твердого тела

Напомним уважаемому читателю, что *материальная точка* – это простейшая абстрактная модель тела; любое макроскопическое тело (систему) можно разбить на систему таких точек. Так как под воздействием тел друг на друга они могут деформироваться (менять свою форму и размеры), целесообразно говорить о другой, более сложной модели – *абсолютно твердом теле*. **Абсолютно твердое тело** (англ. absolutely rigid body) – это тело, которое ни при каких обстоятельствах не может деформироваться и вне зависимости от условий, расстояние между двумя точками (частицами) этого тела останутся постоянными. Наиболее простые виды его движения, как мы уже указывали ранее, можно представить в виде комбинации *поступательного* и *вращательного* (см. подробнее пп. 1.3).

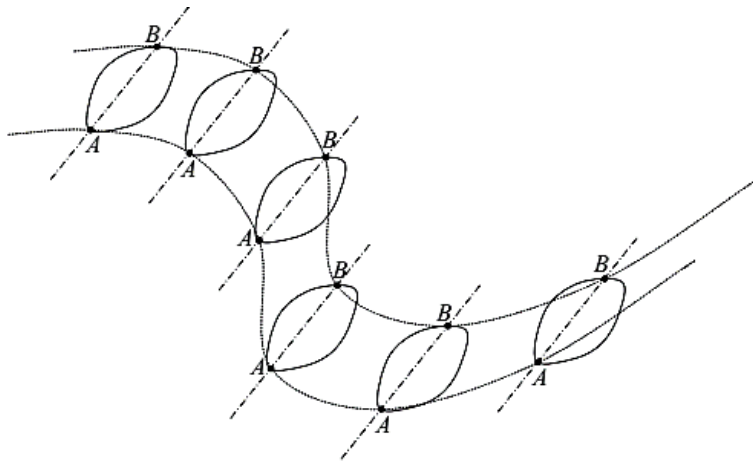


Рисунок 2.8 – Интерпретация поступательного движения АТТ

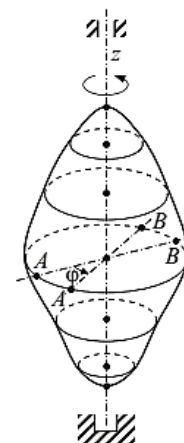


Рисунок 2.9 – Интерпретация вращательного движения АТТ

В первом случае, как видно на **рисунке 2.8**, *траектории всех точек тела идентичны*, а значит имеют *одинаковые скорости и ускорение*. Таким образом, рассмотрение поступательного движения тела с позиции кинематики сводится к изучению движений любой из них. При вращательном движении абсолютно твердого тела (далее – тело или в графических элементах – АТТ) имеют *разные скорости и ускорение*, поэтому *общими кинематическими характеристиками его движения* (при вращении) являются угол поворота, угловая скорость и угловое ускорение (см. подробнее пп. 2.4.2-2.4.3).

2.4.2. Угол поворота и угловая скорость как кинематическая характеристика вращательного движения абсолютно твердого тела

Итак, **угол поворота** (англ. angle of rotation); на этот угол поворачивается прямая, непосредственно связанная с телом и перпендикулярная оси вращения (см. рисунок 2.10). В процессе вращения этот угол, соответственно, меняется, согласно закону (2.32), называемому *уравнением вращательного движения тела*:

$$\varphi = \varphi(t) \quad (2.32)$$

Примечание: единицей измерения угла поворота в системе единиц СИ является *радиан* (от лат. radius – луч, радиус) (обозначается или на кириллице «рад» или на латинице «rad»). Если произвольная точка тела проходит по дуге окружности путь, равный радиусу этой окружности, это будет означать, что тело повернулось на угол 1 rad. Поскольку угол, выраженный в радианах, считается безразмерной величиной (формально), название единицы измерения «rad» после количественного значения угла допустимо не ставить ($\varphi = \pi$).

Важно запомнить: если угол поворота измеряется в градусах, то углу π будет соответствовать угол 180° .

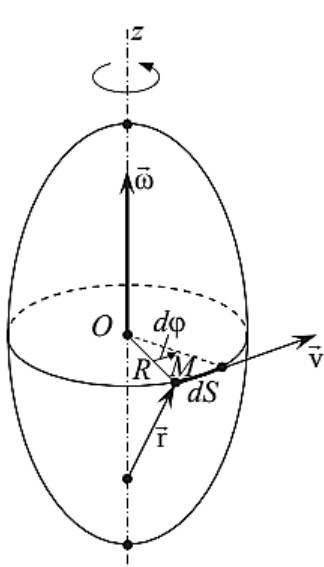


Рисунок 2.10 – Угловая скорость вращения АТТ

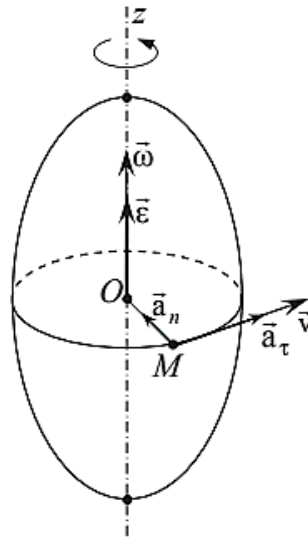


Рисунок 2.11 – Угловая скорость вращения АТТ при ускоренном вращении

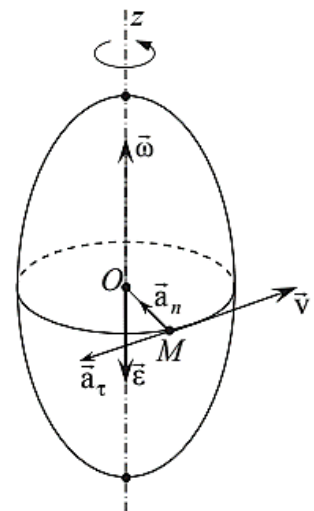


Рисунок 2.12 – Угловая скорость вращения АТТ при замедленном вращении

Угловая скорость (англ. angular velocity) – это вектор, который численно равен первой производной по времени от угла поворота тела по времени и направлен вдоль оси вращения

согласно правилу правого винта (правилу буравчика³³) (2.33). В соответствии с ним, вектор угловой скорости направлен вдоль оси вращения таким образом, что вращение (рассматривается с конца вектора угловой скорости) происходит *против хода часовой стрелки*, как это видно на **рисунке 2.11**.

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \quad (2.33)$$

Если взять это выражение и представить его в виде $d\varphi = \omega(t)dt$ и проинтегрировать в пределах от начального до конечного момента времени ($t_1 t_2$), то получится угол, на который тело повернулось за период времени $\Delta t = t_2 - t_1$:

$$\Delta\varphi = \int_{t_1}^{t_2} \omega(t)dt \quad (2.34)$$

Примечание: единицей измерения по системе единиц СИ в данном случае будет *радиан в секунду* (может обозначаться как «рад/с», так и s^{-1} , т.е. если тело за 1 секунду проворачивается на угол 1 rad, то тело вращается со скоростью 1 рад/с.

2.4.3. Угловое ускорение как кинематическая характеристика вращательного движения абсолютно твердого тела

Физическая (векторная) величина **углового ускорения** (англ. angular acceleration) вводится для характеристики неравномерного вращения тела; согласно (2.35), она равна первой производной угловой скорости по времени:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \dot{\vec{\omega}} \quad (2.35)$$

При ускоренном вращении, как видно на **рисунке 2.13 «а»**, вектор углового ускорения сонаправлен вектору угловой скорости, тогда как при замедленном (см. **рисунки 2.13 «б»**) – противоположен ему по направлению:

³³ **Прим.:** также иногда выделяется *приближенно прямолинейное движение* (англ. approximately straight motion), т.е. движение по дуге окружности, если проходимый путь намного меньше радиуса этой окружности.

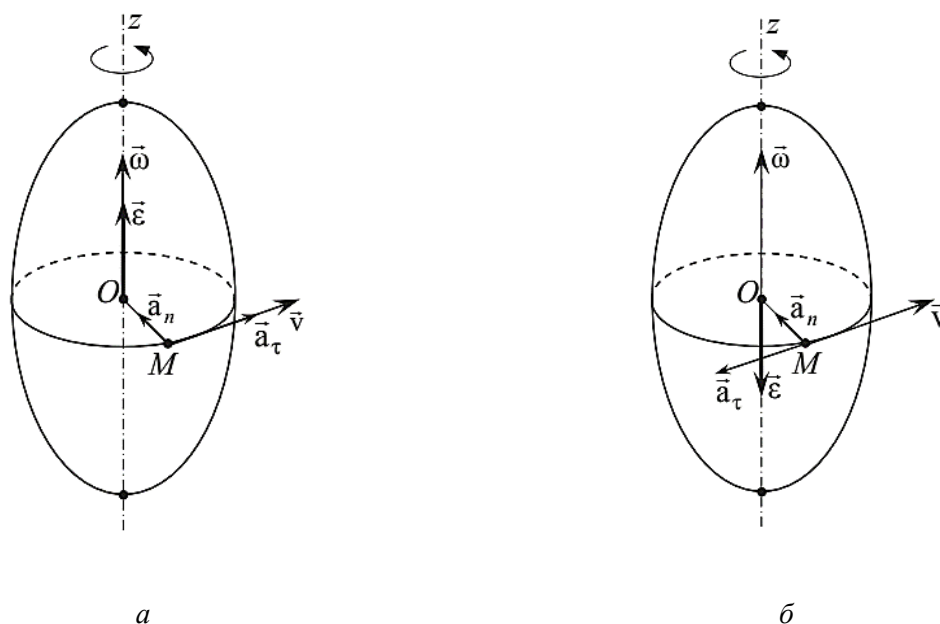


Рисунок 2.13 – Угловая скорость вращения тела: (а) ускоренное вращение, (б) замедленное вращение

Если представить выражение (2.35) в виде $d\vec{\omega} = \vec{\varepsilon}(t)dt$ и проинтегрировать в пределах от начального до конечного момента времени t_1, t_2 , то получим приращение угловой скорости тела за время $\Delta t = t_2 - t_1$:

$$\Delta\vec{\omega} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{\varepsilon}(t)dt \quad (2.36)$$

Примечание: единицей измерения по системе единиц СИ в данном случае будет *радиан в секунду в квадрате* (может обозначаться как «рад/с²», так и с⁻², т.е. если тело вращается с угловым ускорением 1 рад/с², то за 1 секунду оно изменяет свою угловую скорость вращения на 1 рад/с.

2.4.4. Типология вращательных движения абсолютно твердого тела; период и частота вращения

Равно как и в случае с материальной точкой (см. подробнее пп. 2.3), вращательное движение абсолютно твердого тела подразделяют на равномерное, равнопеременное и переменное. Так, **равномерным вращением** тела (англ. uniform rotation) будет называться вращательное движение с нулевым угловым ускорением, т.е. $\vec{\varepsilon} = \vec{0}$. Как следует из выражения (2.35), угловая скорость материальной точки постоянна, т.е. с течением времени изменяться не будет: $\vec{\omega} = \text{const}$. Это говорит нам о том, что за равные промежутки времени тело поворачивается на одинаковые углы. Используя выражение (2.34), можно без затруднений получить угол, на который поворачивается тело за время t в случае равномерного вращения:

$$\Delta\varphi = \int_0^t \omega dt = \omega t \quad (2.37)$$

Примечание: обращаем внимание уважаемого читателя на то, что выражение (2.37) подобно выражению (2.27).

Под **равнопеременным вращением** (англ. equally alternating rotation) понимается вращательное движение тела с постоянным, т.е. с неизменяющимся с течением времени угловым ускорением ($\vec{\varepsilon} = \overline{const}$). Если угловая скорость с течением времени будет увеличиваться, то вращение приобретет характер *равноускоренного*, а если уменьшаться – соответственно, *равнозамедленного*. Так, предположим, что в начальный момент времени угловая скорость тела равна $\vec{\omega}_0$. Используя выражение (2.36), получим выражение для угловой скорости через определенный промежуток времени t :

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \Delta\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \int_0^t \vec{\varepsilon} dt = \vec{\omega}_0 + \vec{\varepsilon} t \quad (2.38)$$

Как видно, при равнопеременном вращении зависимость угловой скорости от времени будет описана линейной функцией, т.е. за равные промежутки времени угловая скорость тела изменится на одинаковую величину. Угол поворота за время t при равнопеременном вращении можем получить, используя выражение (2.34):

$$\Delta\varphi = \int_0^t (\omega_0 + \varepsilon t) dt = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2} \quad (2.39)$$

Примечание: обращаем внимание уважаемого читателя на то, что выражение (2.39) подобно выражению (2.29).

Наконец, **переменное вращение** (англ. variable rotation) – это вращение тела с угловым ускорением, изменяющимся с течением времени произвольно, т.е. $\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}(t)$. Если данная зависимость определена аналитически, то используя уравнения (2.34) и (2.36), можем получить выражения, которые определяют зависимость угловой скорости и угла поворота от времени.

В завершении параграфа также необходимо указать еще на две кинетические характеристики вращательного движения абсолютно твердого тела – период вращения T и частоту вращения ν . **Период вращения** (англ. rotation period) – это время, за которое тело при равномерном вращении совершает один оборот, поворачиваясь на угол 2π . Если период T – это время, то единицей измерения (в системе СИ) будет *секунда*. Обращаясь к выражению (2.37), можно заключить, что если соответствующий одному обороту угол $\Delta\varphi = 2\pi$ разделить на угловую скорость ω , то получится время, за которое совершается один оборот – период T :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (2.40)$$

Частота вращения (англ. rotation frequency) – это количество оборотов, которое совершает равномерно вращающееся тело, за единицу времени. Для определения частоты вращения необходимо число оборотов N , совершенных телом на время t , разделить на это время, т.е.:

$v = N/t$. Поскольку тело совершает один оборот ($N = 1$) за время равное периоду вращения ($t = T$), то получаем следующее выражение:

$$v = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (2.41)$$

Таким образом, частота вращения – это величина обратная периоду вращения T . Единицей измерения частоты согласно системе единиц СИ, является s^{-1} . В случае неравномерного вращения, период T и частота v будут изменяться с течением времени, однако, их также можно рассчитать, используя формулы (2.40) и (2.41).

Глава 3. Основные законы динамики

3.1. Векторы угловых и линейных кинематических величин

Вращательное движение абсолютно твердого тела, по общему правилу, описываются с использованием **угловых кинематических величин** (англ. angular kinematic quantities): *угловая скорость* $\vec{\omega}$ и *угловое ускорение* $\vec{\varepsilon}$. Материальные точки вращающегося тела движутся по окружностям и это движение характеризуется **линейными кинематическими величинами** (англ. linear kinematic quantities): *линейной скоростью точки* $\vec{v}$, *векторами тангенциального* $\vec{a}_\tau$ *и нормального* $\vec{a}_n$ *ускорений*.

Линейная скорость (англ. linear speed) вращающегося тела сводится к скоростям материальных точек из которых состоит это тело; для каждой материальной точки она направлена по касательной к окружности, вдоль которой движется эта точка (см. рисунок 2.10) (**см. подробнее пп. 2.4.2**). Если предположить, что за время dt она проходит по дуге окружности радиуса R путь $dS = R d\varphi$, то количественное значение линейной скорости будет представлено следующим выражением:

$$v = \frac{dS}{dt} = R \frac{d\varphi}{dt} = \omega R = \omega r \sin \alpha \quad (3.1)$$

где: r – это модуль радиус-вектора $\vec{r}$, направленного от произвольной точки, которая лежит на оси вращения, к рассматриваемой точке тела; α – это угол между осью вращения и $\vec{r}$.

Тангенциальное $\vec{a}_\tau$ и нормальное $\vec{a}_n$ ускорения произвольной точки вращающегося тела направлены также, как это показано на рисунке 1.1 (**см. подробнее пп. 1.2**); их количественные значения определяются следующими выражениями:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = \varepsilon R = \varepsilon r \sin \alpha \quad (3.2)$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(\omega R)^2}{R} = \omega^2 R = \omega v \quad (3.3)$$

В векторном варианте уравнения, связывающие угловые и линейные кинематические величины будут записаны следующим образом:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}; \quad (3.4)$$

$$\vec{a}_\tau = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} \quad (3.5)$$

$$\vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{v}; \quad (3.6)$$

где: знак « $\times$ » указывает на **векторное произведение** (англ. vector product).

Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, который определяется по формуле (**см. рисунок 3.1**):

$$\vec{c} = absin\alpha\vec{n} \quad (3.7)$$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \quad (3.8)$$

где: a и b – это модули перемножаемых векторов; α – угол между векторами; $\vec{n}$ – единичный вектор нормали к плоскости, в которой лежат векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Кроме того, направление результирующего вектора $\vec{c}$ определяется согласно правилу правого винта (правилу буравчика³⁴).

Примечание: направление вектора $\vec{n}$, по общему правилу выбирается так, чтобы кратчайший поворот от $\vec{a}$ к $\vec{b}$, рассматриваемый с конца $\vec{n}$, происходил против хода часовой стрелки.

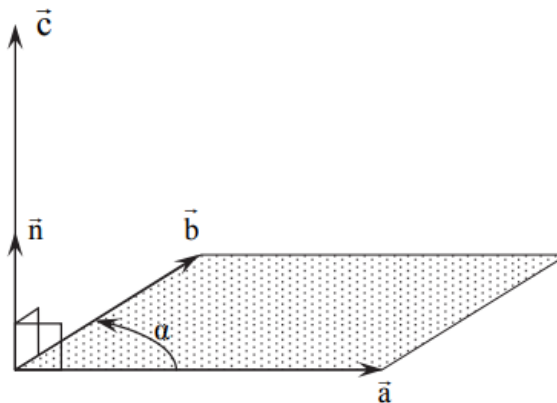


Рисунок 3.1 – Иллюстрация векторного произведения

Исходя из выражения (3.7), модуль вектора $\vec{c}$ можно рассчитать по формуле:

$$c = absin\alpha \quad (3.9)$$

Примечание: если в уравнении (3.8) множители $\vec{a}$ и $\vec{b}$ поменять местами, то направление вектора $\vec{c}$ изменится на противоположное, тогда как модуль останется таким же.

³⁴ **Правило буравчика** (правило винта) – любое из множества вариантов мнемонического правила для определения направления векторного произведения и тесно связанного с этим выбора правого базиса в трехмерном пространстве, соглашения о положительной ориентации базиса в нем, и соответственно – знака любого аксиального вектора, определяемого через ориентацию базиса. **Прим.:** буравчик – это винт с правой резьбой, который можно представить себе как штопор для открывания бутылок. Если мысленно направить винт буравчика вдоль оси вращения и начать крутить его в направлении вращения тела, то ось буравчика станет совершать поступательное движение. Направление этого движения соответствует направлению вектора угловой скорости.

3.2. Три закона Ньютона

3.2.1. Первый закон Ньютона

Как уже было отмечено ранее, динамика – это раздел механики, который изучает законы движения тел во взаимосвязи с причинами, вызывающими или изменяющими это движение. Основу динамики составляют *три закона*³⁵, сформулированные в конце 80-х гг. XVII в. английским физиком (а также математиком, механиком, астрономом и проч., одним из создателей классической физики) **Исааком Ньютоном**³⁶. На тот момент в академическом сообществе доминировало *два основных подхода к толкованию движения тел по горизонтальной поверхности*; в соответствии с первым (предложен Аристотелем), находящееся на земле тело, получившее начальный толчок, всегда замедляется и останавливается. Исходя из этой мысли, Аристотель предположил, что естественным состоянием тела является *покой*. Автор второго подхода, итальянский физик (а также математик, астроном, философ, механик) **Галилео Галилей**³⁷, обратился к ситуации «идеального» движения, т.е. без сопротивления. Он представил, что если можно было бы устранить трение, то тело, получившее начальный толчок на горизонтальной поверхности, продолжало бы двигаться безостановочно в течение неопределенного промежутка времени. В результате, Галилей заключил, что для тела состояние движения также естественно, как и состояние покоя. Впоследствии, развив его идеи, Ньютон сформулировал свой **первый закон – закон инерции** (англ. law of inertia): *«всякое тело находится в состоянии покоя или равномерно прямолинейного движения, если на тело не действуют другие тела или их действие скомпенсировано»*. Стремление тела сохранить состояние покоя или равномерного прямолинейного движения называется **инертностью** (англ. inertia); собственно, поэтому первый закон Ньютона получил соответствующее название.

Обращаем внимание уважаемого читателя на то, что данный закон выполняется не во всех системах отсчета. Предположим, что имеются две такие системы, двигающиеся друг относительно друга с некоторым ускорением. Если относительно одной из них тело покоится, то относительно другой оно будет двигаться с ускорением. Исходя из этой мысли, получается, что в одной системе отсчета закон инерции выполняется, а в другой – нет. Поэтому, те системы отсчета, относительно которых данный закон выполняется будут называться **инерциальными системами отсчета** (англ. inertial frames of reference). Любая система отсчета, которая движется относительно некоторой инерциальной системы прямолинейно или равномерно, иными словами, с постоянной скоростью, также будет рассматриваться как инерциальная. В свою

³⁵ **Законы Ньютона** – три важнейших закона классической механики, которые позволяют записать уравнения движения для любой механической системы, если известны силы, действующие на составляющие её тела. Впервые в полной мере сформулированы Исааком Ньютоном в книге «Математические начала натуральной философии» (1687). В ньютоновском изложении механики, широко используемом и в настоящее время, эти законы являются аксиомами, базирующимися на обобщении экспериментальных результатов.

³⁶ **Сэр Исаак Ньютон** (1642-1727) – английский физик, математик, механик и астроном, один из создателей классической физики и математического анализа. Автор фундаментального труда «Математические начала натуральной философии», в котором он обнаружил законы движения и закон всемирного тяготения, сформировавшие господствующую научную точку зрения вплоть до появления общей теории относительности. **См. подробнее:** Храмов Ю.А. Физики: Биографический справочник. – 2-е изд. – М.: Наука, 1983. – 400 с. **См. подробнее:** Исаак Ньютон. Математические начала натуральной философии [Текст]; пер. с лат. и прим. А. Н. Крылова / под ред. Полака Л.С. – М.: Наука, 1989. – 690 с.

³⁷ **Галилео Галилей** (1564-1642) – итальянский физик, механик, астроном, философ, математик, оказавший значительное влияние на науку своего времени. Он одним из первых использовал телескоп для наблюдения небесных тел и сделал ряд выдающихся астрономических открытий. Галилей – основатель экспериментальной физики. Своими экспериментами он убедительно опроверг умозрительную метафизику Аристотеля и заложил фундамент классической механики. **См. подробнее:** Храмов Ю.А. Физики: Биографический справочник. – 2-е изд. – М.: Наука, 1983. – 400 с.

очередь, те системы отсчета, относительно которых первый закон Ньютона не выполняется, будут называться **неинерциальными** (англ. non-inertial frames of reference) Такие системы отсчета движутся относительно инерциальных систем с некоторым ускорением.

Существует мнение, что в изначальной формулировке первый закон Ньютона не вполне верен, т.к.: во-первых, тело при отсутствии воздействующих на него сил может совершать вращательное движение, а значит термин «тело» оптимально заменить на понятие «материальная точка»; во-вторых, в своих трудах Ньютон опирался на идею существования абсолютной неподвижной системы отсчета, с чем современная физика не согласна, а в произвольной системе отсчета (например, вращающейся), как мы уже указали выше, закон инерции не выполняется. В связи с этим, современная наука предлагает иную формулировку первого закона Ньютона: *«существуют такие системы отсчета, называемые инерционными, относительно которых материальная точка, когда на нее не действуют никакие силы (или из действие взаимно уравновешено), находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения»*.

Доказательно, что система отсчета, центр которой совмещен с Солнцем, а оси направлены на соответствующим образом выбранные звезды, является с высокой степенью точности инерциальной; она получила название **гелиоцентрической системы отсчета** (англ. heliocentric frame of reference)³⁸. Земля движется относительно Солнца и звезд по криволинейной траектории, которая имеет эллиптическую форму; криволинейное движение, как известно, всегда происходит с некоторым ускорением. Кроме того, Земля также совершает вращение вокруг своей оси. Учитывая эти два тезиса, можно заключить, что система отсчета, связанная с земной поверхностью, движется с ускорением относительно гелиоцентрической системы отсчета и не является инерциальной. Однако, ее ускорение настолько незначительно, что в некоторых случаях ее можно назвать почти инерциальной.

3.2.2. Второй закон Ньютона

Воздействие на конкретное тело со стороны других тел вызывает, соответственно, изменение его скорости, иными словами, сообщает этому телу ускорение. Доказательно, что одинаковое воздействие сообщает разным телам разные по величине ускорения, однако, любое тело будет сопротивляться попыткам изменить его состояние движения; т.е. мы вновь говорим об инертности. Так, количественной мерой инертности тел является **инертная масса** (англ. inertial mass). Следует оговориться; в теории гравитации Ньютона масса также характеризуется как, соответственно, гравитационная; под **гравитационной массой** (англ. gravitational mass) понимается количественная мера гравитационного взаимодействия. Согласно экспериментальным данным инертная, и гравитационная массы с большой степенью точности совпадают, т.е. они эквивалентны; данный закон получил название **принцип эквивалентности** (англ. equivalence principle). Таким образом, заключим, что масса – это физическая величина, которая выступает одной из базовых характеристик материи и определяет ее

³⁸ **Гелиоцентрическая система мира (гелиоцентризм)** (от др.-греч. ἥλιος – солнце и κέντρον – центр) – представление о том, что Солнце является центральным небесным телом, вокруг которого обращаются Земля и другие планеты. Возникла в противовес геоцентрической системе мира в античности, но получила широкое распространение в XVI-XVII вв. В гелиоцентрической системе Земля предполагается обращающейся вокруг своей оси за одни звёздные сутки и одновременно вокруг Солнца за один звёздный год. Следствием первого движения является видимое вращение небесной сферы, следствием второго – годовое перемещение Солнца среди звёзд по эклиптике. Солнце считается неподвижным относительно звёзд.

инерционные и гравитационные свойства. В системе СИ единицей измерения массы является килограмм (кг, kg).

Импульс (англ. momentum) или количество движения материальной точки (англ. amount of movement) – это физическая (векторная) величина, равная произведению массы m этой точки на ее скорость $\vec{v}$ (3.9). Направление вектора $\vec{p}$, по общему правилу, должно совпадать с направлением вектора скорости $\vec{v}$. Единицей измерения импульса (по системе СИ) является килограмм, умноженный на метр в секунду (кг × м/с).

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad (3.10)$$

Сила (англ. force) – это физическая (векторная) величина, которая является мерой механического воздействия на тело со стороны других тел или полей, ввиду чего оно приобретает ускорение или изменяет свою форму и размеры. Так, **второй закон Ньютона** заключается в следующем: «*скорость изменения импульса материальной точки равна действующей на нее силе*»

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad (3.11)$$

Исходя из него, если на материальную точку действует несколько сил, то ее сила будет равнодействующей (т.е. векторной сумме) всех приложенных сил. Если в уравнении (3.9) заменить импульс $\vec{p}$ произведением массы m на скорость $\vec{v}$, то для точки постоянной массы получим выражение (3.12).

Соответственно, второй закон Ньютона также можно сформулировать следующим образом: «ускорение материальной точки прямо пропорционально приложенной силе и обратно пропорционально массе» (3.12). Выражение (3.12) устанавливает связь между кинематической характеристикой движения – **ускорением** $\vec{a}$ (англ. acceleration) и такими понятиями, как сила $\vec{F}$ и масса m . Единицей измерения (по системе СИ) первой является **ньютон** (Н); один ньютон – это сила, которую необходимо приложить к телу массой 1 килограмм, чтобы сообщить ему ускорение 1 м/с², т.е.: 1Н = 1кг × 1 м/с².

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \quad \text{т. е.} \quad m\vec{a} = \vec{F} \quad (3.12)$$

Второй закон Ньютона дает возможность решить **основную задачу механики** (англ. main task of mechanics), которая заключается в том, чтобы определить кинематический закон движения материальной точки, если известны приложенные силы и начальные условия. Именно поэтому, уравнение (3.12) носит название **основного уравнения динамики поступательного движения** (англ. basic equation of the dynamics of translational motion).

3.2.3. Третий закон Ньютона

Согласно **третьему закону Ньютона** «силы, с которыми две материальные точки взаимодействуют друг с другом, равны по величине, противоположны по направлению и действуют вдоль прямой, проходящей через эти точки»:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad (3.13)$$

В выражении (3.13) $\vec{F}_{12}$ – это сила, которая действует на первую материальную точку со стороны второй, а $\vec{F}_{21}$ – сила, которая действует на вторую материальную точку со стороны, соответственно первой. Знак «-» (минус) в данном случае указывает на то, что данные силы направлены в противоположные стороны.

3.3. Преобразования Галилея; закон сложения скоростей

Как уже было отмечено ранее, рассмотренные три закона Ньютона выполняются исключительно в инерциальных системах отсчета. В классической (аналитической) механике при переходе от описания движения в одной такой системе к описанию движения в другой используются преобразования координат и времени, которые называются **преобразованиями Галилея** (англ. Galilean transformations)³⁹.

На **рисунке 3.2** представлены две инерциальные системы отсчета, которые движутся друг относительно друга с постоянной скоростью $\vec{v}$. Одну из них будем считать неподвижной (K), вторая же будет двигаться поступательно прямолинейно и равномерно (K'). Для каждой системы отсчета выберем соответствующие оси координат – $x, y, z \rightarrow x', y', z'$ – таким образом, чтобы первые оси совпадали, а вторые и третьи – были параллельны друг другу. Далее, найдем связь между координатами x, y, z и некоторой точкой M в системе отсчета K и координатами x', y', z' этой же точки в системе отсчета K' . Отсчет времени начнем с того момента, когда начала координат обеих систем совпадают.

³⁹ **Преобразования Галилея** – в классической механике (механике Ньютона) и нерелятивистской квантовой механике: преобразования координат и скорости при переходе от одной инерциальной системы отсчета (ИСО) к другой. Термин был предложен *Филиппом Франком* в 1909 г. Преобразования Галилея опираются на принцип относительности Галилея, который подразумевает одинаковость времени во всех системах отсчета («абсолютное время»). Преобразования Галилея являются предельным (частным) случаем преобразований Лоренца для скоростей, малых по сравнению со скоростью света в вакууме и в ограниченном объеме пространства. Для скоростей вплоть до порядка скоростей движения планет в Солнечной системе (и даже больших), преобразования Галилея приближенно верны с очень большой точностью.

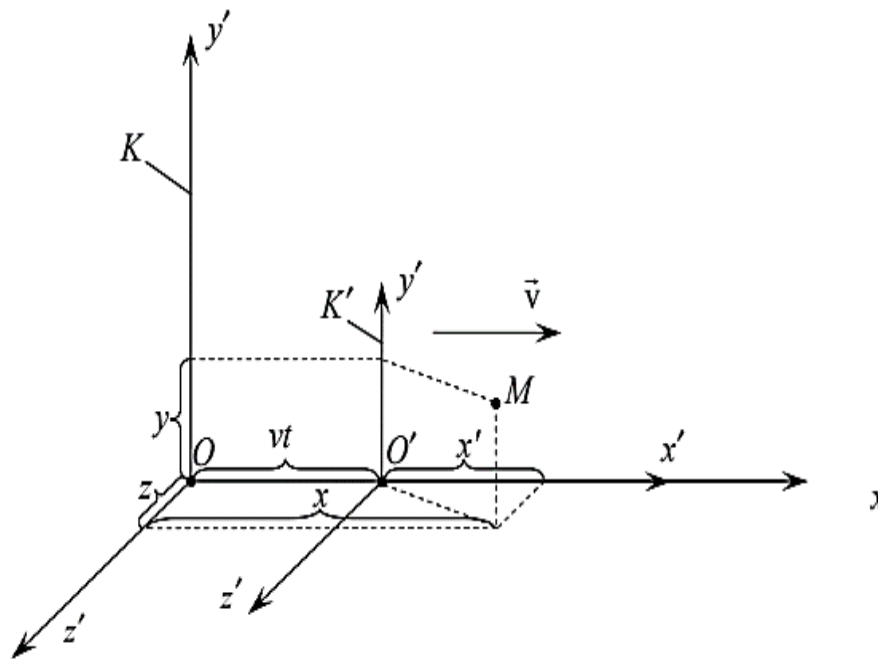


Рисунок 3.2 – Иллюстрация преобразований Галилея

Таким образом, становится очевидным тот факт, что координаты точки M в обеих системах отсчета связаны *следующими отношениями*:

$$\begin{cases} x = x' + vt \\ y = y' \\ z = z' \end{cases} \quad (3.14)$$

При векторном способе задания движения, данные соотношения можно свести к выражению, которое связывает радиус-вектор $\vec{r}$ точки M в системе отсчета K с радиус-вектором $\vec{r}'$ точки M в системе отсчета K' (3.15). Добавляя к отношениям (3.14) и (3.15) известное в классической (аналитической) механике предположение о том, что время в обеих системах течет одинаково, т.е. $t = t'$ (3.15), получаем уравнения, которые и называются преобразованиями Галилея (3.14) – (3.15).

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}' + \vec{v}t \\ t = t' \end{cases} \quad (3.15)$$

Примечание: преобразования Галилея справедливы только в классической (аналитической) механике, иными словами, когда движение происходит со скоростями значительно меньше скорости света; в обратном случае, т.е. когда скорости сравнимы со скоростью света, их необходимо заменить более общими – **преобразованиями Лоренца** (англ. Lorentz transformations)⁴⁰, которые будут рассмотрены во второй части настоящего методического пособия – в курсе «Релятивистская механика».

⁴⁰ **Преобразования Лоренца** – линейные (или аффинные) преобразования векторного (соответственно, аффинного) псевдо-евклидова пространства, сохраняющие длины или, что эквивалентно, скалярное произведение векторов. См. подробнее: Ардашев А.П. Преобразования Лоренца. Новые горизонты [Текст]: [Монография]. – Киров, 2003 (Тип. ТДООШ). – 50 с. Иваницкая О.С. Обобщенные преобразования Лоренца и их применение [Текст]; под ред. докт. физ.-мат. наук, проф. В.И. Родичева.

Для того, чтобы найти соотношение между скоростью точки M в указанных системах отсчета, продифференцируем выражения (3.14) и (3.15) по времени. Таким образом, при координатном способе описания движения получаем следующие соотношения:

$$\begin{cases} u_x = u'_x + v \\ u_y = u'_y \\ u_z = u'_z; \end{cases} \quad (3.19)$$

тогда как при векторном:

$$\vec{u} = \vec{u'} + \vec{v} \quad (3.20)$$

Представленные уравнения (3.19) и (3.20) – это ни что иное, как **закон сложения скоростей** (англ. law of addition of velocities) (в классической (аналитической) механике).

Для того, чтобы получить соотношение между ускорением точки M в системах отсчета K и K' , продифференцируем данные выражения во времени. Принимая за истину, что скорость $\vec{v} = \overline{const}$, при координатном способе описания движения получим:

$$\begin{cases} a_x = a'_x \\ a_y = a'_y \\ a_z = a'_z \end{cases} \quad (3.21)$$

тогда как при векторном:

$$\vec{a} = \vec{a'} \quad (3.22)$$

Вышесказанное позволяет вывести следующий постулат: *ускорение материальной точки не зависит от выбора инерциальной системы отсчета, иными словами оно инвариантно относительно преобразований Галилея.*

Важно запомнить, что силы взаимодействия материальных точек зависят от их взаимного расположения, а также от скоростей движения друг относительно друга. Обращаясь к уравнениям (3.11) и (3.12) можно заключить, что взаимное расположение и скорость относительного движения любых двух точек не будет зависеть от выбора инерциальной системы отсчета – они инвариантны относительно преобразований Галилея, а значит, инвариантны и силы, которые действуют на материальную точку (3.23). Таким образом, во всех инерциальных системах отсчета вид второго и третьего законов Ньютона будет идентичным.

$$\vec{F} = \vec{F'} \quad (3.23)$$

Вышесказанное позволяет вывести еще один постулат: *в классической (аналитической) механике будет справедливым механический принцип относительности (принцип относительности Галилея): законы механики одинаковы во всех инерциальных системах отсчета.*

Иными словами, никакими механическими опытами, проводимыми в данной системе отсчета, невозможно установить, покоится ли она или движется равномерно и прямолинейно. Все инерциальные системы отсчета одинаковы, и даже с опорой на законы механики нельзя выделить из множества таких систем какую-либо одну «главную», которая обладала бы такими преимуществами перед другими, и движение тел относительно ее можно было бы рассматривать как «абсолютное», равно как и покой.

3.4. Связь кинематических величин в различных системах отсчета: неинерциальная система отсчета; силы инерции

Итак, в предыдущем параграфе мы изучили вопрос о преобразованиях Галилея; это позволяет перейти от вопроса об описании движения материальной точки в одной инерциальной системе к следующему вопросу – описанию движений материальной точки в другой инерциальной системе. Необходимо заметить, что при изучении этой темы придется рассматривать движение в отношении к двум взаимно перемещающимся системам отсчета, одна из которых инерциальная, а вторая – *неинерциальная*. Причем первую систему отсчета, как правило, принимают за *условно неподвижную*, а вторую – за *подвижную*, перемещающуюся с некоторым ускорением. Движение тела, рассматриваемое одновременно в отношении к подвижной и неподвижной системам отсчета называется **сложным движением** (англ. complex movement); движение тела относительно первой системы отсчета называется **абсолютным** (англ. absolute movement), второй системы отсчета – **относительным** (англ. relative motion). В свою очередь, движение самой подвижной системы отсчета относительно неподвижной называется **переносным** (англ. portable movement). Связь между кинематическими величинами в различных системах отсчета, между характеристиками абсолютного, относительного и переносного движений задается следующими уравнениями:

$$\vec{r}_{абс} = \vec{r}_0 + \vec{r}_{отн}; \quad (3.24)$$

$$\vec{v}_{абс} = \vec{v}_{отн} + \vec{v}_{пер}; \quad (3.25)$$

$$\vec{a}_{абс} = \vec{a}_{отн} + \vec{a}_{пер} + \vec{a}_{кор}; \quad (3.26)$$

где: $\vec{r}_{абс}, \vec{r}_{отн}$ – радиус-векторы материальной точки в подвижной и неподвижной системах отсчета, соответственно, $\vec{r}_0$ – радиус-вектор начала координат подвижной системы отсчета, $\vec{v}_{абс}, \vec{a}_{абс}$ – скорость и ускорение материальной точки в неподвижной системе отсчета, соответственно, $\vec{v}_{отн}, \vec{a}_{отн}$ – скорость и ускорение материальной точки в подвижной системе отсчета, соответственно, $\vec{v}_{пер}, \vec{a}_{пер}$ – скорость и ускорение той точки подвижной системы отсчета, в которой оказалась движущаяся материальная точка на конкретный момент времени, $\vec{a}_{кор}$ – это **ускорение Кориолиса** (англ. Coriolis acceleration)⁴¹, отражающее эффект взаимного кинематического влияния относительного и переносного движений друг на друга; оно определяется следующим выражением:

⁴¹ Гаспар-Гюстав де Кориолис (1792-1843) – французский математик, механик и инженер. Больше всего известен работой, посвящённой изучению эффекта Кориолиса. Также известен теоремой об ускорениях в абсолютном и относительном движениях, называемой теорема Кориолиса. **Эффект Кориолиса:** «Во вращающейся системе отсчета (например, на поверхности Земли) наблюдателю кажется, что тела движутся по изогнутой траектории. Иногда этот эффект объясняют действием некой фиктивной силы – силы Кориолиса». См. подробнее: Эффект Кориолиса [Электронный ресурс] // 200 законов мироздания. – URL: https://elementy.ru/trefil/21119/Effekt_Koriolisa

$$\vec{a}_{\text{кор}} = 2\vec{\omega}_{\text{пер}} \times \vec{v}_{\text{отн}} \quad (3.27)$$

где $\vec{\omega}_{\text{пер}}$ – это угловая скорость вращения подвижной системы отсчета.

Примечание: в неинерциальных системах отсчета законы Ньютона не выполняются. Одновременно с этим, если помимо сил, обусловленных воздействием тел друг на друга, ввести в рассмотрение силы особого рода, т.е. **силы инерции** (англ. inertia forces), то данные законы будут справедливыми и для неинерциальных систем.

Для того, чтобы вывести закон движения тела в неинерциальной системе отсчета, данное движение следует рассматривать и относительно неподвижной инерциальной системы отсчета, и относительно неинерциальной системы, которая движется ускоренно относительно, соответственно, инерциальной.

Используя уравнения (3.23), для ускорения *второй закон Ньютона в подвижной неинерциальной системе отсчета* запишем следующим образом:

$$m\vec{a}_{\text{отн}} + m\vec{a}_{\text{пер}} + m\vec{a}_{\text{кор}} = \vec{F} \quad (3.28)$$

Далее, для получения уравнения динамики в неинерциальной системе отсчета, слагаемые, которые содержат $\vec{a}_{\text{пер}}$ и $\vec{a}_{\text{кор}}$ перенесем в правую часть:

$$m\vec{a}_{\text{отн}} = \vec{F} - m\vec{a}_{\text{пер}} - m\vec{a}_{\text{кор}} \quad (3.29)$$

Приблизим это выражение ко второму закону Ньютона, для чего введем две силы инерции: переносную $\vec{F}_{\text{пер}}$ и кориолисову $\vec{F}_{\text{кор}}$. Таким образом получаем:

$$\vec{F}_{\text{пер}} = -m\vec{a}_{\text{пер}}; \vec{F}_{\text{кор}} = -m\vec{a}_{\text{кор}} \quad (3.30)$$

Если подставить выражение (2.22) в (2.23), получаем **уравнение динамики в неинерциальной системе отсчета** (англ. equation of dynamics in a non-inertial frame of reference):

$$m\vec{a}_{\text{отн}} = \vec{F} + \vec{F}_{\text{пер}} + \vec{F}_{\text{кор}} \quad (3.31)$$

Силы инерции обуславливаются неинерциальностью той системы отсчета, механические явления которой рассматриваются и, в отличие от реальных физических сил, которые описывают взаимодействие тел, силы инерции, при переходе от одной системы отсчета к другой, изменяются, тогда как при переходе к инерциальной системе – вообще исчезают. Помимо прочего, они не подчиняются третьему закону Ньютона, т.к. если к материальной точке в неинерциальной системе отсчета приложены силы инерции, противодействующей силы, которая могла бы быть приложена к другой материальной точке просто нет. Учитывая сказанное, в силу позиций классической (аналитической) механики силы инерции можно охарактеризовать как фиктивные. Однако, необходимо уточнить, что использование термина «сила инерции» в ряде случаев все же будет, как говорится, к месту, например, при описании движения наблюдателя, находящегося в инерциальной системе отсчета. В быту мы постоянно сталкиваемся с

действием сил инерции, например, при катании на карусели или при разгоне и остановке автомобиля или общественного транспорта.

В данном контексте изучим вопрос положения сил инерции в поступательно движущейся неинерциальной системе отсчета. Так, представим себе такую систему (K'), движущуюся поступательно и параллельно инерциальной системе K (см. рисунок 3.3). Предположим, что начало координат системы K' – точка O движется по некоторой криволинейной траектории. При поступательном движении скорости и ускорения всех точек данной системы отсчета одинаковы и равны скорости и ускорению точки O' , движение которой зададим естественным способом:

$$\begin{cases} s_0 = s_0(t) \\ v_0 = \frac{ds_0}{dt} \\ \vec{a}_0 = \vec{a}_{0\tau} + \vec{a}_{0n} \end{cases} \quad (3.32)$$

где: s_0 – дуговая координата точки O' , v_0 – мгновенная скорость этой точки, $\vec{a}_0, \vec{a}_{0\tau}, \vec{a}_{0n}$ – полное, тангенциальное и нормальное ускорение точки O' , соответственно.

Движение материальной точки M в неинерциальной системе отсчета K' (см. рисунок 3.4) характеризуется относительной скоростью $\vec{v}_{\text{отн}}$ и относительным ускорением $\vec{a}_{\text{отн}}$. Для определения сил инерции, которые действуют на данную материальную точку, нужно найти ее переносное ускорение и ускорение Кориолиса. Ввиду того, что переносное движение неинерциальной системы K' поступательное ($\omega_{\text{пер}} = 0$ – система не вращается), то согласно выражению (3.27) ускорение Кориолиса равно нулю, а переносное ускорение материальной точки M равно ускорению точки O' , равно как и любой другой в системе K' , т.е.:

$$\vec{a}_{\text{кор}} = 0, \vec{a}_{\text{пер}} = \vec{a}_0 = \vec{a}_{0\tau} + \vec{a}_{0n} \quad (3.33)$$

а значит

$$\vec{F}_{\text{пер}} = -m\vec{a}_0 = -m\vec{a}_{0\tau} - m\vec{a}_{0n} \quad (3.34)$$

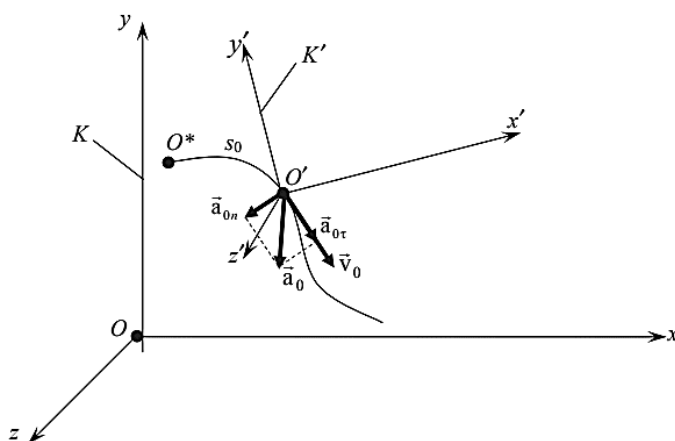


Рисунок 3.3 – Иллюстрация движения неинерциальной системы отсчета K' относительно инерциальной K

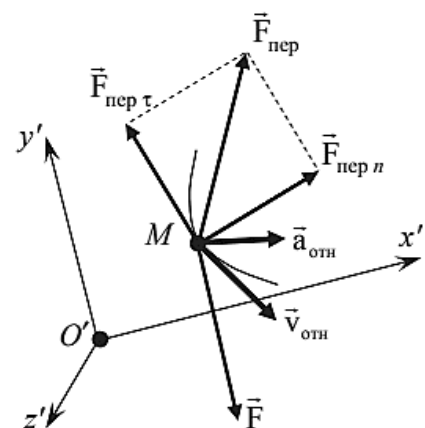


Рисунок 3.4 – Иллюстрация сил инерции в поступательно движущейся неинерциальной системе отсчета K'

Из этого следует, что переносная сила инерции $\vec{F}_{\text{пер}}$ может быть разделена на две перпендикулярные друг другу компоненты – нормальную $\vec{F}_{\text{пер}n}$ и касательную силу инерции $\vec{F}_{\text{пер}т}$. Таким образом:

$$\vec{F}_{\text{пер}} = \vec{F}_{\text{пер}т} + \vec{F}_{\text{пер}n}; \quad (3.35)$$

$$\vec{F}_{\text{пер}n} = -m\vec{a}_{0n}; \quad (3.36)$$

$$\vec{F}_{\text{пер}т} = -m\vec{a}_{0т}; \quad (3.37)$$

$$\vec{F}_{\text{кор}} = \vec{0}; \quad (3.38)$$

Теперь рассмотрим неинерциальную систему K' , вращающуюся с угловой скоростью $\omega_{\text{пер}}$ и угловым ускорением $\varepsilon_{\text{пер}}$ вокруг некоторой оси, которая проходит через начало координат (точку O'). Одновременно с этим, точка O' и ось вращения неподвижны относительно инерциальной системы отсчета K . На **рисунке 3.5** неинерциальная система представлена в виде диска, ось которого является одновременно осью вращения и совпадает с осью y' .

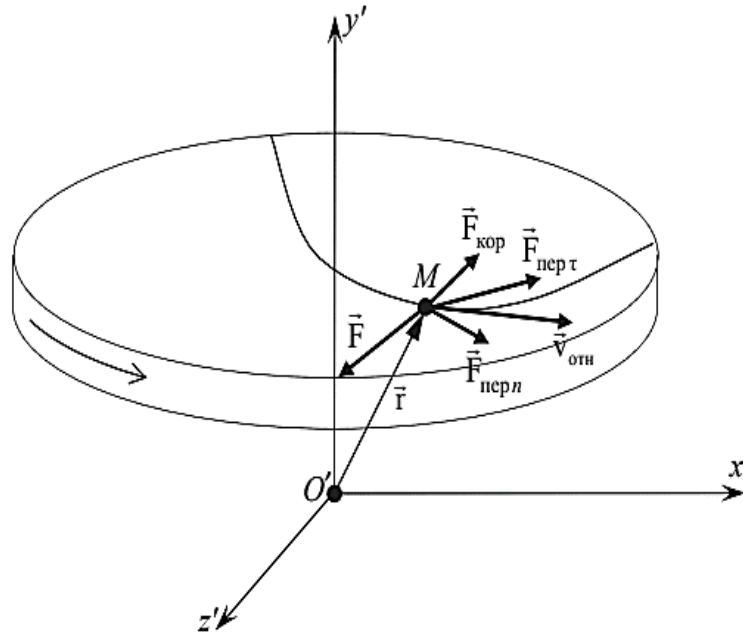


Рисунок 3.5 – Иллюстрация сил инерции во вращающейся неинерциальной системе отсчета K'

Материальная точка M , которая движется относительно неинерциальной системы K' со скоростью $\vec{v}_{\text{отн}}$ и ускорением $\vec{a}_{\text{отн}}$ также характеризуется переносным касательным $\vec{a}_{\text{пер}т}$ и переносным нормальным $\vec{a}_{\text{пер}n}$ ускорениями, а также ускорением Кориолиса $\vec{a}_{\text{кор}}$, т.е.:

$$\vec{a}_{\text{пер}т} = \vec{\varepsilon}_{\text{пер}} \times \vec{r}; \quad (3.39)$$

$$\vec{a}_{\text{пер}n} = \vec{\omega}_{\text{пер}} \times \vec{v}_{\text{пер}}; \quad (3.40)$$

$$\vec{a}_{\text{кор}} = 2\vec{\omega}_{\text{пер}} \times \vec{v}_{\text{отн}}; \quad (3.41)$$

где $\vec{r}$ – это радиус-вектор точки M в неинерциальной системе отсчета K' , $\vec{v}_{\text{пер}}$ – переносная скорость этой точки, которая, в свою очередь, определяется выражением $\vec{v}_{\text{пер}} = \vec{\omega}_{\text{пер}} \times \vec{r}$.

Сказанное позволяет заключить, что при изучении движения во вращающихся системах отсчета необходимо учитывать *три силы инерции*, как это показано на рисунке 3.5, т.е. нормальную силу инерции $\vec{F}_{\text{пер}n}$ – она же **центробежная сила инерции** (англ. centrifugal force

of inertia), касательную силу инерции $\vec{F}_{\text{пер}\tau}$ (англ. tangential force of inertia), и кориолисову силу инерции $\vec{F}_{\text{кор}}$:

$$\vec{F} = \vec{F}_{\text{пер}\tau} + \vec{F}_{\text{пер}n} + \vec{F}_{\text{кор}}; \quad (3.42)$$

$$\vec{F}_{\text{пер}n} = -m\vec{\omega}_{\text{пер}} \times \vec{v}_{\text{пер}}; \quad (3.43)$$

$$\vec{F}_{\text{пер}\tau} = -m\vec{\varepsilon}_{\text{пер}} \times \vec{r}; \quad (3.44)$$

$$\vec{F}_{\text{кор}} = -2\vec{\omega}_{\text{пер}} \times \vec{v}_{\text{отн}}; \quad (3.45)$$

Глава 4. Закон сохранения импульса

4.1. О законах сохранения

Законы сохранения (англ. conservation laws) – это фундаментальные физические законы, в соответствии с которыми при определенных условиях некоторые измеримые физические (векторные) величины, характеризующие замкнутую физическую систему, с течением времени не изменяются. В любой физической теории данные законы считаются наиболее общими, что доказывает их высокое эвристическое значение. Следует отметить, что только некоторые из них выполняются при всех условиях; в любом случае, никогда не было доказано обратного; остальные законы являются, соответственно приближенными и выполняются при определенных условиях (см. рисунок 4.1)⁴².

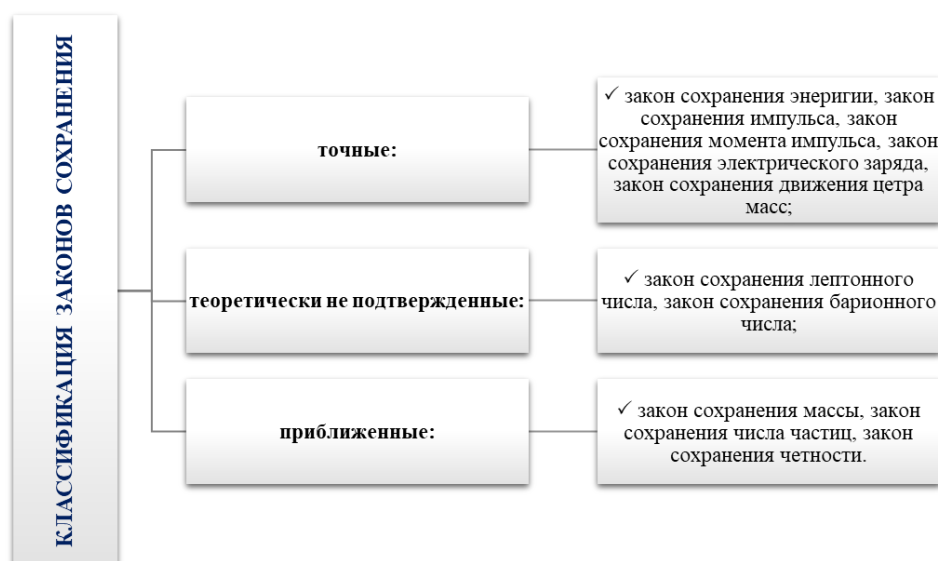


Рисунок 4.1 – Классификация законов сохранения⁴³

⁴² См. подробнее: Беловол А.В. Законы механики и универсальные законы природы // Вестник ХНАДУ. 2013. №60. С. 148-153; Егоров Г.В. О роли законов сохранения в физике // Вестник БГУ. 2014. №1. С. 291-294.

⁴³ Далее, определения законов не рассматриваемых в рамках данного методического пособия: закон сохранения электрического заряда – это закон физики, утверждающий, что алгебраическая сумма зарядов электрически замкнутой системы сохраняется: $q_1 + q_2 + q_3 + \dots + q_n = \text{const}$; лептонное число, лептонный заряд – разность числа лептонов и антилептонов в данной системе; во всех наблюдавшихся процессах лептонное число в замкнутой системе сохраняется, поэтому был сформулирован закон сохранения лептонного заряда, являющийся одним из экспериментальных оснований Стандартной Модели физики элементарных частиц, причины сохранения лептонного числа пока неизвестны; в отличие от электрического заряда, лептонный заряд не является источником какого-либо известного дальнего действующего калибровочного поля, поэтому более правильный термин – лептонное число; по соглашению, лептонам присваивается лептонное число $L = +1$, для антилептонов $L = -1$; закон сохранения лептонного числа был постулирован Конопинским и Махмудом в 1953 г.; барионное число (барионный заряд) – сохраняющееся аддитивное квантовое число в физике элементарных частиц, определяющее количество барионов в системе; оно определяется как: $B = (N_q - N_{\bar{q}})/3$, где $N_q, N_{\bar{q}}$ – количество кварков и антикварков, соответственно; количество вещества – физическая величина, характеризующая количество однотипных структурных единиц, содержащихся в веществе; под структурными единицами понимаются любые частицы, из которых состоит вещество (атомы, молекулы, ионы, электроны или любые другие частицы); единица измерения количества вещества в системе единиц СИ и в системе СГС – моль; без конкретизации объекта рассмотрения термин «количество вещества» не используют. 1 моль содержит в себе N_A частиц; эта физическая величина используется для измерения макроскопических количеств веществ в тех случаях, когда для численного описания изучаемых процессов необходимо принимать во внимание микроскопическое строение вещества, например, в химии, при изучении процессов электролиза, или в термодинамике, при описании уравнений состояния идеального газа, по закону Авогадро, количество газообразного вещества можно также определить

Законы сохранения коррелируют с симметриями физических систем (теорема Нетер⁴⁴). Так, например, законы сохранения импульса, момента импульса (см. подробнее пп. 4.2, 6.1), энергии (см. подробнее Глава 5) являются следствием пространственно-временных симметрий (изотропности пространства, однородности времени и однородности пространства). Одновременно с этим, указанные свойства пространства и времени в классической (аналитической) механике, как правило, рассматриваются как **инвариантность лагранжиана** (англ. Lagrangian invariance)⁴⁵ относительно изменения начала отсчета времени, переноса начала координат системы и вращения ее координатных осей.

4.2. Импульс; закон его сохранения

Совокупность материальных точек, которая выделена для решения некоторой задачи, называется **механической системой** (англ. mechanical system). Силы, взаимодействующие в рамках этой системы между материальными точками называются **внутренними** (англ. internal forces), а силы, с которыми на эти точки действуют внешние тела – соответственно, **внешними** (англ. external forces); механическая система тел, на которую внешние силы вообще не действуют называется **замкнутой** (англ. closed mechanical system). С практической точки зрения, с такими системами сталкиваются редко; как правило, говорят о *незамкнутых механических системах*, т.к. скорее невозможно выделить механическую систему, на материальные точки которой не действуют никакие внешние силы. Однако, можно рассмотреть некоторые случаи, когда действием этих можно пренебречь, к примеру, в случае, если они малы в сравнении с внутренними силами.

Предлагаем уважаемому читателю рассмотреть механическую систему, которая состоит из n материальных точек, массы и скорости которых соответственно равны $m_1, m_2, \dots, m_n$ и $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$. Предположим, что $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ – это равнодействующие внешних сил, действующих на каждую из этих материальных точек, а $\vec{F}'_1, \vec{F}'_2, \dots, \vec{F}'_n$ – равнодействующие, соответственно, внутренних сил. Запишем второй закон Ньютона для каждой из n материальных точек механической системы:

на основании его объема: $n = V/V_m$, где V – объем газа при нормальных условиях, а V_m – молярный объем газа при тех же условиях, равный 22,4 л/моль.

⁴⁴ **Теорема Эмми Нётер** – теорема, доказанная Эмми Нётер в 1918 г. Была впервые определена в работах учёных гёттингенской школы Д. Гильберта, Ф. Клейна и самой Эмми Нётер. Теорема Нётер утверждает, что каждой непрерывной симметрии физической системы соответствует некоторый закон сохранения: однородности времени соответствует закон сохранения энергии, однородности пространства соответствует закон сохранения импульса, изотропии пространства соответствует закон сохранения момента импульса, калибровочной симметрии соответствует закон сохранения электрического заряда и проч. Теорема обычно формулируется для систем, обладающих функционалом действия, и выражает собой инвариантность лагранжиана по отношению к некоторой непрерывной группе преобразований. Если действие инвариантно относительно n -параметрической непрерывной группы преобразований, то существует n независимых законов сохранения. Теорема Нётер формулирует достаточное условие существования законов сохранения. Однако, это условие не является необходимым, поэтому могут существовать законы сохранения, не следующие из неё (и такие примеры известны). Известна теорема, формулирующая необходимые и достаточные условия существования законов сохранения.

⁴⁵ **Лагранжиан, функция Лагранжа $L[\varphi_i]$ динамической системы**, является функцией обобщенных координат $\varphi_i(s_j)$ и описывает развитие системы. Например, уравнения движения (для классической механики) в этом подходе получаются из принципа наименьшего действия, записываемого как $\delta S/\delta \varphi_i = 0$, где действие – функционал $S[\varphi_i] = \int L[\varphi_i(s_j)] d^m s$, φ_i – обобщённые координаты (например, координаты частиц или полевые переменные), s_j обозначает множество параметров системы, в случае классической механики – независимые пространственные координаты и время, а более широко – еще электрические или другие физические параметры. Названа в честь *Жозефа Луи Лагранжа*. Уравнения, полученные посредством приравнивания нулю функциональной производной функционала по всем направлениям, идентичны обычным уравнениям Эйлера–Лагранжа. Динамические системы, чьи уравнения могут быть получены посредством принципа наименьшего действия для удобно выбранной функции Лагранжа, известны как *лагранжевы динамические системы*.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(m_1 \vec{v}_1) = \vec{F}_1 + \vec{F}'_1 \\ \frac{d}{dt}(m_2 \vec{v}_2) = \vec{F}_2 + \vec{F}'_2 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \frac{d}{dt}(m_n \vec{v}_n) = \vec{F}_n + \vec{F}'_n \end{cases} \quad (4.1)$$

Если сложить почленно эти выражения, то получим следующее:

$$\frac{d}{dt}(m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots + m_n \vec{v}_n) = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n) + (\vec{F}'_1 + \vec{F}'_2 + \dots + \vec{F}'_n) \quad (4.2)$$

Используя Σ (знак суммы), каждую из сил $\vec{F}'_1, \vec{F}'_2, \dots, \vec{F}'_n$ можно представить в следующем виде:

$$\vec{F}'_1 = \sum_{j=1}^n \vec{F}'_{1j}; \vec{F}'_2 = \sum_{j=1}^n \vec{F}'_{2j}; \dots \vec{F}'_n = \sum_{j=1}^n \vec{F}'_{nj}; \quad (4.3)$$

где: $\vec{F}'_{jj} = 0$. В таком случае, выражение (4.2) можно записать проще:

$$\sum_{i=1}^n \frac{d}{dt}(m_i \vec{v}_i) = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \vec{F}'_{ij} \quad (4.4)$$

В соответствии с третьим законом Ньютона, силы взаимодействия между двумя любыми материальными точками механической системы будут равны по модулю и противоположны по направлению. Таким образом, сумма векторов внутренних сил равна нулю, т.е. $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \vec{F}'_{ij} = 0$. Из этого следует, что выражение (4.4) можно упростить:

$$\sum_{i=1}^n \frac{d}{dt}(m_i \vec{v}_i) = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad (4.5)$$

Теперь, изменив последовательность суммирования и дифференцирования, получаем следующее уравнение:

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad \text{или} \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad (4.6)$$

где: $\vec{p} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i$ – это **импульс механической системы** (англ. momentum of a mechanical system), представляющий собой векторную сумму импульсов всех материальных точек системы.

Уравнение (4.6) является следствием второго и третьего законов Ньютона, причем, следует уточнить, что второй закон описывает поведение только одной материальной точки, а выражение (4.6) – всей механической системы, которая состоит из n числа таких точек. Данное уравнение также называют теоремой об изменении импульса механической системы, согласно которой: «*скорость изменения импульса механической системы равна векторной сумме внешних сил, действующих на систему*».

Пусть векторная сума всех внешних сил, действующих на механическую систему, равна нулю. В таком случае, уравнение (4.6) приобретет следующий вид:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n (m_i \vec{v}_i) = 0 \quad (4.7)$$

Таким образом, импульс $\vec{p}$ механической системы – это константа, т.е. с течением времени он не будет меняться.

Вышесказанное позволяет нам вывести **закон сохранения импульса** (англ. law of conservation of momentum), согласно которому *«импульс механической системы не изменится с течением времени, если векторная сумма внешних сил, действующих на систему равна нулю» (4.9)*. Важно заметить, что данный закон будет актуален и в отношении замкнутых механических систем, однако, формулироваться будет немного по-другому: *«импульс замкнутой механической системы не изменяется с течением времени»*.

$$\text{Если } \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{0}, \text{ то } \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \overline{const} \quad (4.8)$$

Спроецируем выражение (4.6) на оси координат:

$$\begin{cases} \frac{dp_x}{dt} = \sum_{i=1}^n F_{xi} \\ \frac{dp_y}{dt} = \sum_{i=1}^n F_{yi} \\ \frac{dp_z}{dt} = \sum_{i=1}^n F_{zi} \end{cases} \quad (4.9)$$

Далее, если сумма проекций внешних сил на некоторую ось координат равна нулю, то проекция импульса механической системы на ту же ось будет постоянной величиной или константой, иными словами, не будет изменяться с течением времени:

$$\text{если } \sum_{i=1}^n F_{xi} = 0, \text{ то } p_{xi} = \sum_{i=1}^n m_i v_{xi} = const_x \quad (4.10)$$

$$\text{если } \sum_{i=1}^n F_{yi} = 0, \text{ то } p_{yi} = \sum_{i=1}^n m_i v_{yi} = const_y \quad (4.11)$$

$$\text{если } \sum_{i=1}^n F_{zi} = 0, \text{ то } p_{zi} = \sum_{i=1}^n m_i v_{zi} = const_z \quad (4.12)$$

Важно запомнить: уравнения (4.10), (4.11), (4.12) – следствия закона сохранения импульса.

Итак, мы вывели закон сохранения импульса, основываясь на втором и третьем законах Ньютона. Он будет справедлив не только в пределах классической (аналитической) механики, но и для релятивистской и квантовой, иными словами, он универсален. Закон сохранения импульса – фундаментальный закон природы, являющийся следствием определенного свойства симметрии пространства – его однородности. **Однородность пространства** (англ. homogeneity of space) – это одинаковость свойства пространства во всех его местах. Это означает, что параллельный перенос замкнутой механической системы из одного места в пространстве в другое не изменит механические свойства соответствующей системы.

4.3. Центр масс; закон движения центра масс

В динамике, как подразделе механики, традиционно используется понятие центра масс механической системы. **Центр масс системы материальных точек** (англ. center of mass of a system of material points) – это абстрактная точка C , расположение которой характеризует распределение массы этой системы; ее радиус-вектор $\vec{r}_C$ определяется следующим выражением:

$$\vec{r}_C = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \quad (4.13)$$

где: $m_i, \vec{r}_i$ – масса и радиус-вектор i -й материальной точки, n – количество материальных точек в системе, m – результирующая масса системы.

Если начало координат будет совпадать с положением центра масс системы ($\vec{r}$ проводятся из центра масс), то $\vec{r}_C = 0$, а значит $\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i = 0$. Таким образом, можно заключить, что центр масс – это геометрическая точка, для которой сумма произведений масс материальных точек, которые образуют механическую систему, на их радиус-векторы $\vec{r}$, проведенные из этой точки, равна нулю.

Если мы говорим о непрерывном распределении массы в системе (к примеру, в ситуации протяженного тела), $\vec{r}$ центра масс системы будет определен следующим выражением:

$$\vec{r}_C = \frac{1}{m(m)} \int \vec{r} dm = \frac{1}{m(v)} \int \vec{r} \rho dV \quad (4.14)$$

где: $\vec{r}$ – радиус-вектор малого элемента системы; его масса равна dm , а объем – dV ; ρ – плотность тела.

Примечание: интегрирование проводится по всем компонентам механической системы, т.е. по всей ее массе m или по всему объему V .

Теперь определим скорость центра масс механической системы:

$$\vec{v}_C = \frac{d\vec{r}_C}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \right) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_i = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \frac{\vec{p}}{m} \quad (4.15)$$

При этом, учтено, что $\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i$ – это импульс механической системы. Соответственно:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = m \vec{v}_C \quad (4.16)$$

Из этого следует, что импульс механической системы равен произведению массы системы на скорость ее центра масс. Если подставить в формулу (4.6) уравнение для импульса механической системы, то получится следующее:

$$m \frac{d\vec{v}_C}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad (4.17)$$

Таким образом, мы вывели **закон движения центра масс** (англ. law of motion of the center of mass), согласно которому: «центр масс системы движется как материальная точка,

в которой сосредоточена масса всей системы, и на которую действует сила, равная векторной сумме всех внешних сил, приложенных к системе». Он показывает, что для изменения скорости центра масс системы нужно, чтобы на нее действовала внешняя сила. Внутренние силы взаимодействия компонентов данной системы могут вызвать изменение скоростей последних, к примеру, при разрыве снаряда на несколько осколков, однако, они никак не повлияют на суммарный импульс системы и скорость ее центра масс. Согласно закону движения центра масс, скорость этого центра в замкнутой механической системе с течением времени не изменится, т.е. он будет или покоиться, или двигаться с постоянной скоростью относительно инерциальной системы отсчета.

4.4. Ц-система; система из двух частиц

В случаях, когда нас интересует не движение системы как целого, а только относительное движение частиц внутри ее, оптимальнее использовать систему отсчета, в которой центр масс покоится, что дает нам возможность упростить и расчеты, и анализ самого явления. Так, систему отсчета, непосредственно связанную с центром масс и перемещающуюся поступательно относительно инерциальной системы, называют **системой центра масс**, или **Ц-системой** (англ. center of gravity system). Ее главной отличительной особенностью является то, что полный импульс системы материальных точек в ней всегда равно нулю, что следует из выражения (4.16), т.к. в Ц-системе $V_C = 0$. Иными словами, любая система материальных точек как целое покоится в своей системе центра масс.

Примечание: для замкнутой системы частиц ее система центра масс является инерциальной, для незамкнутой – по общему правилу, неинерциальной.

Важно понимать, что роль Ц-системы в классической физике играет весьма значимую роль, что обуславливается широким спектром безусловных преимуществ, которые дает ее использование во многих ситуациях; к ней обращаются, например, при изучении теории столкновения частиц, в динамике твердого тела и проч.

Представим систему из двух материальных частиц. Предположим, что массы этих частиц равны m_1 и m_2 , а их скорости в исходной системе отсчета K – v_1 и v_2 , соответственно. Далее, найдем импульсы данных частиц в системе центра масс (все величины в Ц-системе будем помечать специальным знаком тильды $\sim$). Итак, искомые импульсы можно будет записать следующим образом:

$$\tilde{p}_1 = m_1 \tilde{v}_1 = m_1(v_1 - V_C), \tilde{p}_2 = m_2 \tilde{v}_2 = m_2(v_2 - V_C) \quad (4.18)$$

где: V_C – скорость Ц-системы относительно системы отсчета K .

Подставив в эти уравнения выражения для V_C , $V_C = (m_1 v_1 + m_2 v_2)/(m_1 + m_2)$, получаем:

$$\mathbf{p}_1 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2), \mathbf{p}_2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_2 - v_1) \quad (4.19)$$

Как видно, импульсы обеих частиц системе центра масс одинаковы по модулю и противоположны по направлению: $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2$. Данное заключение верно, т.к., как мы уже указывали выше, суммарный импульс материальных частиц в Ц-системе всегда равен нулю.

Полученные нами результаты справедливы вне зависимости от того, является ли система замкнутой или незамкнутой, равно как и от наличия взаимодействия между частицами.

4.5. Движение тела переменной массы

Как известно, движение некоторых тел сопровождается изменениям их массы; в качестве примера можно привести катушку с кабелем, масса которой увеличивается или уменьшается в зависимости от того, наматывается на нее кабель или наоборот, сматывается, или же космический корабль, масса которого уменьшается по мере истечения газов, которые образуются при сгорании топлива. Попробуем вывести уравнение движения тела переменной массы на примере его движения (см. рисунок 4.2). Так, предположим, что в момент времени t масса корабля m , а его скорость $\vec{v}$. В таком случае, по истечении времени dt по мере истечения газов его масса уменьшилась на величину dm_r и стала $m - dm_r$, а скорость – равной $\vec{v} + d\vec{v}$.

Таким образом, изменение импульса системы (космический корабль – истекшие газы) за промежуток времени dt будет определяться следующим выражением:

$$d\vec{p} = [(m - dm_r)(\vec{v} + d\vec{v}) + dm_r(\vec{v} + \vec{u})] - m\vec{v} \quad (4.20)$$

где: $\vec{u}$ – скорость истечения газов относительно космического корабля. Необходимо учесть, что приращению массы выбрасываемого из него газа соответствует убыль массы корабля, т.е. $dm_r = -dm$:

$$d\vec{p} = [(m + dm)(\vec{v} + d\vec{v}) - dm(\vec{v} + \vec{u})] - m\vec{v} \quad (4.21)$$

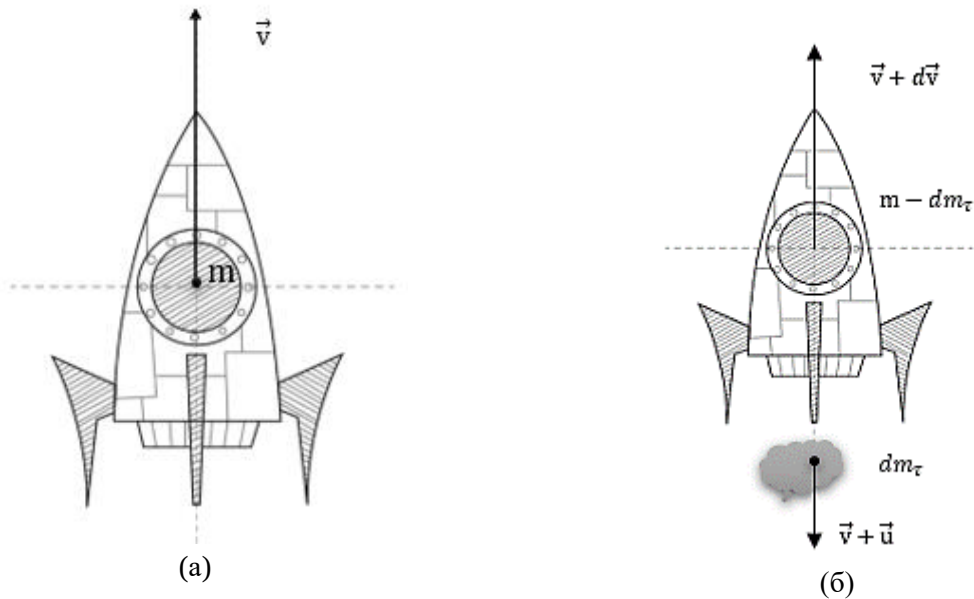


Рисунок 4.2 – Движение тела переменной массы на примере космического корабля: (а) – в момент времени t , (б) в момент времени $t + dt$

Теперь раскроем скобки и примем во внимание, что член $dmd\vec{v}$ является малым высшего порядка в сравнении с остальными членами. Таким образом, получаем следующее выражение:

$$d\vec{p} = m d\vec{v} - \vec{u} dm \quad (4.22)$$

Зная, что на механическую систему действуют силы, то в соответствии со вторым законом Ньютона $d\vec{p} = \vec{F} dt$. Соответственно, получаем:

$$\vec{F} dt = m d\vec{v} - \vec{u} dm \quad (4.23)$$

или

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{u} \frac{dm}{dt} \quad (4.24)$$

Второй член из правой части уравнения называется **реактивной силой** $\vec{F}_p$ (англ. reactive force):

$$\vec{F}_p = \vec{u} \frac{dm}{dt} \quad (4.25)$$

Ввиду того, что масса космического корабля уменьшается, производная dm/dt в выражении (4.25) будет отрицательной, а значит, вектор реактивной силы $\vec{F}_p$ – противоположным

по направлению к вектору скорости $\vec{u}$. Соответственно, выводим следующее **уравнение движения тела переменной массы** (англ. equation of motion of a body of variable mass) или **уравнение Мещерского**⁴⁶, названное по фамилии ученого, впервые его выведшего:

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_p \quad (4.26)$$

Используя формулу (4.24), рассчитаем скорость космического корабля, на которого внешние силы не действуют. Примем, что $\vec{F} = 0$, а скорость корабля $\vec{v}$ и скорость истечения газов $\vec{u}$ направлены в противоположные стороны. В таком случае получаем в проекции на направление движения:

$$m \frac{dv}{dt} = -u \frac{dm}{dt} \quad (4.27)$$

или

$$dv = -u \frac{dm}{m} \quad (4.28)$$

Проинтегрируем обе части получившегося выражения, предположив, что в начальный момент космический корабль находился на стартовой площадке, далее стартовал и после сгорания топлива массой m_t приобрел скорость v_{max} . Масса корабля, при этом, уменьшилась от стартовой массы $m_p + m_t$ до конечной m_p , тогда как скорость выросла с 0 до v_{max} . Таким образом, получаем:

$$\int_0^{v_{max}} dv = -u \int_{m_p+m_t}^{m_p} \frac{dm}{m} \quad (4.29)$$

или

$$v_{max} = u \ln \frac{m_p+m_t}{m_p} \quad (4.30)$$

Уравнение (4.30) называется **формулой Циолковского**⁴⁷, а скорость v_{max} – **характеристической скоростью объекта** – космического корабля (англ. characteristic speed). Действительно, ввиду влияния тяготения Земли и аэродинамического сопротивления атмосферы, скорость космического корабля в момент полного выгорания топлива и, соответственно, прекращения работы двигателя, значительно меньше характеристической скорости.

⁴⁶ **Иван Всеволодович Мещерский** (1859-1935) – русский учёный-механик, основоположник механики систем переменного состава (систем переменной массы). Член Санкт-Петербургского математического общества. См. подробнее: Храмов Ю.А. Физики: Биографический справочник. – 2-е изд. – М.: Наука, 1983. – 400 с

⁴⁷ **Константин Эдуардович Циолковский** (1857-1935) – русский и советский учёный-самоучка, разрабатывавший теоретические вопросы космонавтики, мыслитель эзотерической ориентации, занимавшийся философскими проблемами освоения космоса. См. подробнее: Храмов Ю.А. Физики: Биографический справочник. – 2-е изд. – М.: Наука, 1983. – 400 с.

Глава 5. Закон сохранения энергии

5.1. Энергия, работа и мощность

Под **энергией** (англ. energy), как правило, понимается универсальная мера различных форм движения и взаимодействия. С первыми связывают такие формы энергии, как механическую, тепловую, электромагнитную, ядерную, темную энергию и проч. Трансформацию механического движения вызывают силы, которые действуют на тело со стороны других тел. Для того, чтобы количественно охарактеризовать процесс обмена энергией между взаимодействующими телами, в классической (аналитической) механике вводится понятие «**работа силы**» (англ. force work). Так, под **работой постоянной силы** (англ. constant force work) на прямолинейном участке пути понимается физическая величина, равная скалярному произведению вектора силы $\vec{F}$ на вектор перемещения $\vec{s}$:

$$A = \vec{F} \cdot \vec{s} = F s \cos \alpha \quad (5.1)$$

где: α – это угол между векторами $\vec{F}$ и $\vec{s}$ (см. рисунок 5.1):

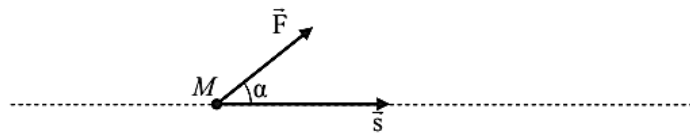


Рисунок 5.1 – Иллюстрация определения работы постоянной силы на прямолинейном участке пути

Если мы говорим о переменной силе, которая действует на криволинейном участке траектории, то вводится понятие элементарной работы δA . Под **элементарной работой** δA (англ. elementary work) силы $\vec{F}$ на элементарном участке пути ds понимается скалярное произведение силы $\vec{F}$ на вектор перемещения $d\vec{r}$:

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F ds \cos \alpha = F_t ds \quad (5.2)$$

где: $F_t = F \cos \alpha$ – это проекция вектора $\vec{F}$ на касательную к траектории (см. рисунок 5.2)

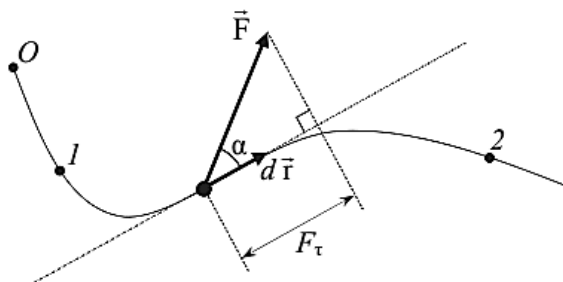


Рисунок 5.2 – Иллюстрация определения элементарной работы силы на элементарном участке пути и работа на участке траектории от точки 1 до точки 2

Работа, которая совершается силой $\vec{F}$ на конечном участке пути от точки 1 до точки 2, будет равна сумме элементарных работ на отдельных бесконечно малых участках пути и определяться следующим криволинейным интервалом:

$$A = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{s_1}^{s_2} F \cos \alpha ds = \int_{s_1}^{s_2} F_\tau ds \quad (5.3)$$

где: s – это дуговая координата точки, которая отсчитывается вдоль ее траектории; s_1, s_2 – значения дуговой координаты в точках 1 и 2.

Если угол $-90^\circ < \alpha < 90^\circ$, в таком случае работа силы $\vec{F}$ будет положительной или **движущей** (англ. driving force), а если угол $270^\circ > \alpha > 90^\circ$ – отрицательной или **противодействующей движению** (англ. opposing force). В случае, если угол $\alpha = \pm 90^\circ$, то $\vec{F} = \vec{0}$. На рисунке 5.3 представлены зависимости F_τ от длины пути s , где работа силы равна площади под кривой $F_\tau(s)$.

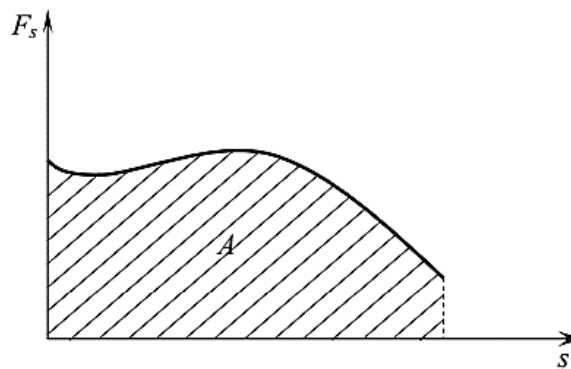


Рисунок 5.3 – Иллюстрация работы переменной силы

Примечание: единицей измерения работы в системе единиц СИ является *джоуль* (Дж), т.е. 1 Дж – это работа, которая совершается силой 1 Н, действующей на тело (материальную точку), которое перемещается в направлении действия силы на расстояние 1 м: $1 \text{ Дж} = 1 \text{ Н} \times 1 \text{ м}$.

Для того, чтобы дать характеристику скорости совершения работы, необходимо ввести еще одно понятие – **Мощность** (англ. power) – это отношение элементарной работы δA , которая совершается силой $\vec{F}$ за малый промежуток времени dt , к величине этого промежутка:

$$N = \frac{\delta A}{dt} \quad (5.4)$$

За период времени dt сила $\vec{F}$, которая действует на материальную точку, совершает работу $\vec{F} \cdot d\vec{r}$. В таком случае, мощность, развиваемая этой силой, будет определяться следующим уравнением:

$$N = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (5.5)$$

где: $\vec{v}$ – это мгновенная скорость материальной точки.

Примечание: единицей измерения мощности в системе единиц СИ является *ватт* (Вт), т.е. Мощность 1 Вт развивается в том случае, когда за 1 секунду совершается работа в 1 Дж, т.е. $1\text{Вт} = 1\text{ Дж}/1\text{ с}$.

Далее рассмотрим произвольную механическую системы, которая состоит из n материальных точек. Общую элементарную работу, совершаемую внутренними и внешними силами над системой находим следующим образом:

$$\delta A = \sum_{i=1}^n (\vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\vec{F}'_{ij} \cdot d\vec{r}_i) \quad (5.6)$$

где: $\vec{F}_i$ – это векторная сумма всех внешних сил, которые действуют на i -ю точку системы, $\vec{F}'_{ij}$ – это сила взаимодействия i -й и j -й точек системы, $d\vec{r}_i$ – элементарное перемещение i -й материальной точки.

Теперь определим общую работу внутренних сил при движении *абсолютно твердого тела*. Для этого рассмотрим i -ю и j -ю точки этого тела, при условии, что они взаимодействуют между собой силами $\vec{F}'_{ij}$ и $\vec{F}'_{ji}$. Исходя из третьего закона Ньютона, последние равны модулю и противоположны по направлению, т.е. $\vec{F}'_{ij} = -\vec{F}'_{ji}$ (**см. рисунок 5.4**). Согласно определению абсолютно твердого тела, расстояние между i -й и j -й точками неизменны. Их движение, как мы уже указывали ранее, можно представить как комбинацию поступательного и вращательного движения отрезка, соединяющего эти точки (ось вращения проходит через один из его концов). В случае поступательного движения этого отрезка, точки будут совершать равные перемещения $d\vec{r}_i = d\vec{r}_j$, а работы сил – численно равными и противоположны по знаку $\delta A'_i = -\delta A'_j$, иными словами, общая работа этих сил равна нулю. В случае же вращательного движения ось вращения будет проходить через один из концов отрезка, а значит одна из материальных точек является неподвижной, тогда как другая – перемещается перпендикулярно действующей на нее силе, соответственно, работа сил взаимодействия также будет равна нулю. Таким образом, *если для двух материальных точек абсолютно твердого тела работа внутренних сил равна нулю, то и для всего этого тела общая работа внутренних сил будет равна нулю:*

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\vec{F}'_{ij} \cdot d\vec{r}_i) = 0 \quad (5.6)$$

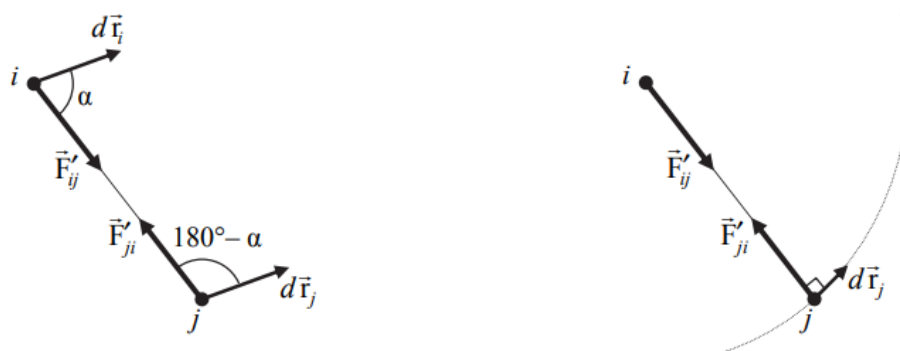


Рисунок 5.4 – Иллюстрация работы сил взаимодействия двух материальных точек абсолютно твердого тела: (а) поступательное движение отрезка, соединяющего эти точки, (б) – вращательное движение отрезка, соединяющего эти точки

Из данного заключения можно сделать вывод о том, что при движении твердого тела вся работа совершается исключительно внешними силами:

$$\delta A = \sum_{i=1}^n (\vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i) \quad (5.7)$$

В случае поступательного движения данного тела перемещения всех его материальных точек будут одинаковым:

$$d\vec{r}_i = d\vec{r}_j = d\vec{r}_C$$

где: $d\vec{r}_C$ – это элементарное перемещение центра масс абсолютно твердого тела.

Таким образом, выражение для элементарной работы при поступательном движении абсолютно твердого тела будет следующим:

$$\delta A = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_C = \vec{F} \cdot d\vec{r}_C \quad (5.8)$$

где: $\vec{F}$ – это векторная сумма всех внешних сил, которые действуют на абсолютно твердое тело.

5.2. Механическая энергия частицы в силовом поле; закон сохранения полной механической энергии системы

5.2.1. Консервативные силы и потенциальная энергия

Сила, которая действует на материальную точку, будет называться **консервативной (потенциальной)** (англ. conservative, potential force), если ее работа зависит только от начального и конечного положения данной точки и не зависит от вида траектории, по которой она двигалась. Наиболее известными примерами таких сил являются: *силы тяготения, силы упругости и силы электростатического взаимодействия*. Помимо этого, легко доказать (уважаемый читатель сможет вполне сделать это самостоятельно), что любое стационарное однородное поле и любое стационарное центральное поле является **полем консервативных сил**

(англ. field of conservative forces). Независимость работы консервативных сил от вида траектории означает, что работа таких сил на замкнутом пути равна нулю:

$$\oint_{(L)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad (5.9)$$

Поясним, что кружочек на знаке интеграла в данном выражении указывает на то, что интегрирование производится по замкнутому контуру L . Этот интеграл называется **циркуляцией** (англ. circulation). Соответственно, циркуляция вектора консервативной (потенциальной) силы по замкнутому кругу равна нулю.

Кроме перечисленных примеров консервативных сил, к таковым также можно отнести т.н. **диссипативные силы** (англ. dissipative forces) – сила трения скольжения, качения и сила сопротивления движению тел в жидкостях и газах. Их работа всегда отрицательна, а значит механическая энергия замкнутой системы уменьшается, иными словами, происходит превращение энергии механической в другие немеханические виды энергии, к примеру, в тепловую.

Работа, которая совершается консервативными силами при перемещении материальных точек системы, не зависит от того, по каким траекториям они движутся; она определяется исключительно их начальным и конечным расположением в пространстве. Из этого следует, что работу консервативных сил можно представить как разность значений некоторой *функции* Π , которая зависит от расположения в пространстве материальных точек системы, т.е. **потенциальной энергии системы** (англ. potential energy of the system):

$$A_{12} = \Pi_1 - \Pi_2 \quad (5.10)$$

Таким образом, элементарная работа консервативных сил равна убыли потенциальной энергии системы:

$$dA = -d\Pi \quad (5.11)$$

Исходя из этого, под *потенциальной энергией* можно понимать часть общей механической энергии системы, которая зависит от расположения материальных точек системы в пространстве и определяется взаимодействием этих точек между собой и с внешними силовыми полями. Однако, обращаем внимание уважаемого читателя на то, что понятие потенциальной энергии будет иметь смысл лишь в том случае, если на материальные точки системы действуют *консервативные силы*.

Потенциальная энергия материальной точки будет меняться вследствие перемещения ее в пространстве, причем изменятся и ее координаты x, y, z . В связи с этим, полный дифференциал потенциальной энергии $d\Pi$ (5.11), в декартовой системе координат будет определен следующим уравнением:

$$d\Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Pi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Pi}{\partial z} dz \quad (5.12)$$

Элементарная работа dA , которая совершается с силой $\vec{F}$ в условиях перемещения материальной точки, в данной системе координат может быть выражена следующим образом:

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz \quad (5.13)$$

В таком случае, принимая во внимание выражение (5.11) и сопоставив формулы (5.12) и (5.13), получим следующее уравнение:

$$F_x = \frac{-\partial \Pi}{\partial x}; dF_y = \frac{-\partial \Pi}{\partial y}; F_z = \frac{-\partial \Pi}{\partial z} \quad (5.14)$$

или в векторном виде:

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \Pi}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \Pi}{\partial z} \vec{e}_z\right) \quad (5.15)$$

Полученное уравнение для консервативной силы есть ни что иное, как градиент потенциальной энергии, взятый со знаком «минус»:

$$\vec{F} = -\text{grad} \Pi \quad (5.16)$$

Под **градиентом** (англ. gradient) здесь понимается вектор, который направлен в сторону увеличения физической величины. Знак «минус» показывает, что направление вектора потенциальной силы противоположно направлению возрастания потенциальной энергии материальной точки, помещенной в потенциальное силовое поле. В операторной форме уравнение (5.14) будет иметь следующий вид:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} \Pi \quad (5.17)$$

где: $\vec{\nabla}$ – это **оператор Гамильтона**⁴⁸ (англ. Hamilton operator) или **оператор набла** (англ. nabra operator)⁴⁹, в частном случае декартовой системы координат $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z}\right)$

Важно запомнить: оператор Гамильтона является вектором и действует на стоящую после него величину, поэтому в выражениях, в которых содержится такой оператор, произвольно переставлять множители нельзя.

⁴⁸ **Сэр Уильям Роуэн Гамильтон** (1805-1865) – ирландский математик, механик-теоретик, физик-теоретик, «один из лучших математиков XIX века». Известен фундаментальными открытиями в математике (кватернионы, основы векторного анализа, вариационное исчисление, обоснование комплексных чисел), аналитической механике (гамильтонова механика) и оптике. Автор предельно общего вариационного принципа наименьшего действия, применяемого во многих разделах физики. **См. подробнее:** Храмов Ю.А. Физики: Биографический справочник. – 2-е изд. – М.: Наука, 1983. – 400 с.

⁴⁹ **Прим.:** в 1853 г. У. Р. Гамильтон ввел этот оператор и придумал для него символ в виде перевернутой греческой буквы Δ (дельта). Позднее этот символ стали называть «набла» из-за сходства с остовом древнеассирийского музыкального инструмента наблы.

5.2.2. Потенциальное силовое поле; закон сохранения полной механической энергии системы

Потенциальное силовое поле (англ. potential force field) – это поле консервативных (потенциальных) сил. Если потенциальная энергия не зависит от времени, такое поле является **стационарным** (англ. stationary potential force field), в ином случае, соответственно – **нестационарным** (англ. non-stationary potential force field). В обоих вариантах связь между силой и потенциальной энергией будет описано выражением (5.14).

Важно отметить, что измеряемой на опыте величиной будет не потенциальная энергия, а работа сил, т.к. измеряя работу сил, определяется только разность потенциальных энергий. Из этого следует, что потенциальная энергия механической системы – неоднородно определена. Процедура придания такой энергии однозначности называется **нормировкой** (англ. normalization). Ее смысл заключается в том, что некоторому состоянию механической системы приписывается нулевое значение потенциальной энергии; такое состояние системы носит название **нулевой конфигурации механической системы** (англ. zero mechanical system configuration). Так, предположим, что в уравнении (5.10) потенциальная энергия в конечном состоянии равна нулю, т.е. $P_2 = 0$; конечное состояние – это, таким образом, состояние с нулевой конфигурацией. В таком случае, исходя из данного выражения, можно записать, что:

$$P_1 = A_{10} \quad (5.18)$$

Иными словами, *потенциальная энергия равна работе консервативных сил при переходе механической системы из заданного состояния в состояние с нулевой конфигурацией.*

Консервативной (англ. conservative mechanical system) будет называться та **механическая система**, в которой все внутренние и внешние силы, которые действуют на ее материальные точки, являются, соответственно, консервативными. В таком случае, изменение **кинетической энергии механической системы** (англ. kinetic energy of mechanical system)⁵⁰ при ее переходе из состояния 1 в состояние 2, согласно **уравнению кинетической энергии поступательного движения твердого тела** (англ. equation for the kinetic energy of the translational motion of a rigid body) (5.19), будет определяться работой консервативных сил, которая, в соответствии с уравнением (5.10) равна убыли потенциальной энергии системы.

$$K = \frac{v_C^2}{2} \sum_{i=1}^n m_i = \frac{mv_C^2}{2} \quad (5.19)$$

где: K – кинетическая энергия материальной точки ($K = m v^2/2$)⁵¹

$$K_2 - K_1 = P_1 - P_2; \text{ тогда будет верным и следующее выражение } K_1 + P_1 = K_2 + P_2 \quad (5.20)$$

⁵⁰ **Кинетическая энергия механической системы** (англ. kinetic energy of mechanical system) – это энергия механического движения этой системы, зависящая от скоростей материальных точек системы и не зависящая от их расположения в пространстве.

⁵¹ **Прим:** если умножить числитель и знаменатель полученного выражения на m и принять во внимание, что $p = mv$, то выражение для кинетической энергии примет вид: $K = p^2/2m$.

Величина, равная сумме кинетической и потенциальной энергии механической системы называется **полной механической энергией** (англ. total mechanical energy): $E = K + \Pi$; соответственно: $E_1 = E_2$. Поскольку оба состояния консервативной системы произвольны, в любом другом состоянии полная механическая энергия системы не изменится, иными словами, в консервативной системе:

$$E = K + \Pi = \text{const} \quad (5.21)$$

Данное уравнение выражает **закон сохранения механической энергии** (англ. law of conservation of mechanical energy), согласно которому: «механическая энергия консервативной системы не изменится с течением времени». Обращаем внимание уважаемого читателя на то, что закон сохранения механической энергии – это фундаментальный закон природы; он связан с *однородностью времени*, т.е. инвариантностью физических законов относительно выбора начала отсчета времени.

5.3. Гравитационное поле; потенциальная энергия тела

Начнем с того, что нам необходимо определить работу сил центрального **гравитационного поля** (англ. gravitational field)⁵², которое создается неподвижной материальной точкой массой m ; при перемещении в этом поле материальной точки с массой m_0 из положения 1 в положение 2, как это показано на **рисунке 5.5**. Выделим бесконечно малый участок траектории, на котором материальная точка m_0 выполняет элементарное перемещение $d\vec{l}$, под действием гравитационной силы $\vec{F}$. В соответствии с **законом всемирного тяготения** (англ. law of gravity)⁵³, модуль вектора $\vec{F}$ будет определяться следующим выражением:

$$F = G \frac{mm_0}{r^2} \quad (5.22)$$

где: r – расстояние между материальными точками m, m_0 , G – гравитационная постоянная. Элементарная работа на выделенном участке траектории будет следующей: $\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{l} = Fdl\cos\alpha$, где α – это угол между векторами $\vec{F}, d\vec{l}$.

⁵² **Прим.:** гравитационное взаимодействие между телами осуществляется с помощью **гравитационного поля** или **поля тяготения**. Всякое тело изменяет свойства окружающего его пространства – создает в нем гравитационное поле. Основное свойство гравитационного поля заключается в том, что на всякое тело, внесенное в это поле, действует сила всемирного тяготения. Силовой характеристикой гравитационного поля является напряженность гравитационного поля, которая равна отношению силы всемирного тяготения $\vec{F}$, действующей на материальную точку массой m_0 , к массе этой материальной точки: $\vec{g} = \vec{F}/m_0$

⁵³ **Прим.:** все тела в природе взаимно притягивают друг друга. Закон, которому подчиняется это притяжение, был установлен И. Ньютоном и носит название **закона всемирного тяготения**. Согласно этому закону. *между любыми двумя материальными точками действует сила взаимного притяжения, прямо пропорциональная произведению масс этих точек и обратно пропорциональная квадрату расстояния между ними:* $F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$. Эта сила называется гравитационной или силой всемирного тяготения. Коэффициент пропорциональности G называется гравитационной постоянной: $G = (6.6743 \pm 0.00015) \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$. Таким образом, два точечных тела массой по 1 кг каждое, находящиеся на расстоянии 1 м друг от друга, притягиваются с силой $6.6743 \cdot 10^{-11} \text{Н}$

Расстояние r между указанными материальными точками, при таком случае перемещения изменится на величину dr , при этом $dr = dl \cos(180^\circ - \alpha) = -dl \cos \alpha$. Соответственно, элементарную работу можно также представить в виде следующего уравнения: $\delta A = -F dr = -G \frac{mm_0}{r^2} dr$. В свою очередь, работа, совершаемая силой $\vec{F}$ на конечном участке траектории из положения 1 в положение 2, будет равна сумме элементарных работ на отдельных бесконечно малых участках траектории; такая работа определяется криволинейным интегралом:

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{l} = - \int_{r_1}^{r_2} G \frac{mm_0}{r^2} dr = G \frac{mm_0}{r_2} - G \frac{mm_0}{r_1} \quad (5.23)$$

Таким образом, работа гравитационной силы будет зависеть от начального r_1 и конечного r_2 расстояния между материальными точками, вне зависимости от вида траектории, по которой осуществляется перемещение. Иными словами, силы тяготения в действительности консервативны, а гравитационное поле – потенциально.

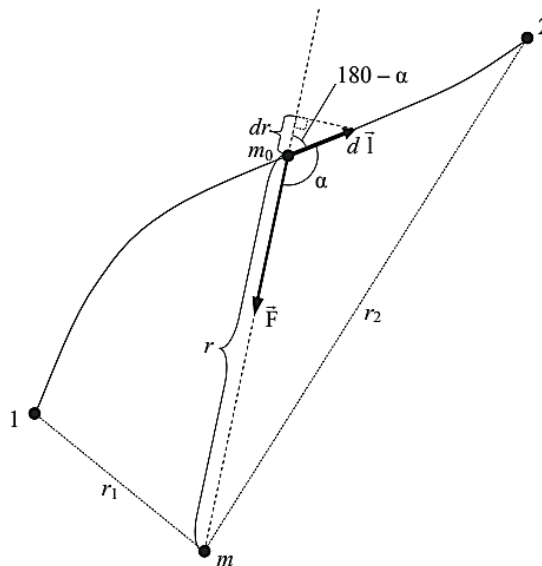


Рисунок 5.5 – Иллюстрация расчета работы силы центрального гравитационного поля, создаваемого локальной массой m , при перемещении массы m_0

Если сравнить выражения (5.10) и (5.23), то можно получить выражение для потенциальной энергии взаимодействия двух локальных масс: $\Pi = -G \frac{mm_0}{r} + C$, где C – это некоторая постоянная величина, которая зависит от того, какую именно конфигурацию механической системы принять за нулевую. В нашем случае, механическая система состоит из двух материальных точек, разведя которые на бесконечно большое расстояние, между ними исчезнет гравитационное взаимодействие. И, по общему правилу, потенциальная энергия гравитационного взаимодействия двух материальных точек, удаленных друг от друга на бесконечно большое расстояние, равна нулю, т.е.:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(-G \frac{mm_0}{r} \right) = 0 \quad (5.24)$$

Исходя из этого, $C = 0$, и нормированное выражение для потенциальной энергии гравитационного взаимодействия двух материальных точек приобретет следующий вид:

$$\Pi = -G \frac{mm_0}{r} \quad (5.25)$$

Для того, чтобы сделать акцент на обратно пропорциональной зависимости потенциальной энергии от расстояния r , данное выражение можно преобразовать:

$$\Pi = \frac{\beta}{r} \quad (5.26)$$

где: $\beta = -Gmm_0$ – величина, независящая от расстояния r .

Кроме того, уравнение (5.25) возможно получить и другим способом. Выше мы уже писали о том, что потенциальная энергия механической системы равна работе консервативных сил в случае перехода механической системы в состояние нулевой конфигурации. Следуя этой мысли, если учесть выражение (5.23), мы получаем аналитическое выражение потенциальной энергии:

$$\Pi_1 = A_{10} = - \int_r^\infty G \frac{mm_0}{r^2} dr = -G \frac{mm_0}{r} \quad (5.27)$$

Как правило, для однородного гравитационного поля у поверхности Земли за нулевую конфигурацию механической системы принимают положение материальной точки m_0 на высоте $h = 0$, т.е., собственно, на поверхности Земли. В данном случае, потенциальная энергия материальной точки на высоте h от нее будет равна работе, совершенной силой тяжести $m\vec{g}$ при перемещении материальной точки с h на нулевую высоту, т.е.:

$$\Pi_1 = A_{10} = \int_h^0 m\vec{g} \cdot d\vec{l} = - \int_h^0 mg dh = mgh \quad (5.28)$$

Примечание: при интегрировании учитывается, что увеличение пути l приводит к уменьшению высоты h , иными словами, $dl = -dh$.

Важной энергетической характеристикой гравитационного поля является потенциал (от лат. potential – сила, мощь); под **потенциалом гравитационного поля** в некоторой точке поля (англ. gravitational field potential) понимается величина, равная отношению потенциальной энергии частицы, помещенной в эту точку гравитационного поля, к массе этой частицы:

$$\varphi = \frac{\Pi}{m_0} \quad (5.29)$$

Примечание: единицей измерения потенциала гравитационного поля по системе СИ является джоуль на килограмм (Дж/кг).

Выражение для потенциала локальной массы m представляется возможным получить, если в уравнение (5.29) подставить потенциальную энергию взаимодействия локальных масс (5.25), т.е.:

$$\varphi = \frac{\Pi}{m_0} = \frac{-G \frac{mm_0}{r}}{m_0} = -G \frac{m}{r} \quad (5.30)$$

Принимая во внимание выражение (5.29) работа сил тяготения, при перемещении локальной массы из положения 1 в положение 2 может быть представлена следующим выражением:

$$A_{12} = m_o(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (5.31)$$

где: φ_1, φ_2 – это гравитационные потенциалы в начальном и конечном пунктах перемещения материальной точки.

Как уже было указано ранее, силовой характеристикой гравитационного поля является напряженность этого поля, равная отношению силы всемирного тяготения $\vec{F}$, которая действует на материальную точку m_o , к массе этой точки: $\vec{g} = \vec{F}/m_o$. Согласно этой формуле, на частицу с массой m_o в гравитационном поле напряженностью $\vec{g}$ действует сила $\vec{F} = m_o\vec{g}$. В соответствии же с выражением (5.29), потенциальную энергию этой частицы также можно найти через уравнение $\Pi = m_o\varphi$. В таком случае, используя формулу (5.14), которая связывает консервативную силу и потенциальную энергию, получаем следующее выражение: $m_o\vec{g} = -\vec{\nabla}(m_o\varphi)$. Если вынести из-под знака градиента константу m_o и сократить на нее, то получится соотношение между напряженностью и потенциалом гравитационного поля: $\vec{g} = -\vec{\nabla}\varphi$. Поясним, что знак «минус» в этом уравнении показывает, что вектор напряженности поля $\vec{g}$ направлен в сторону убывания гравитационного потенциала.

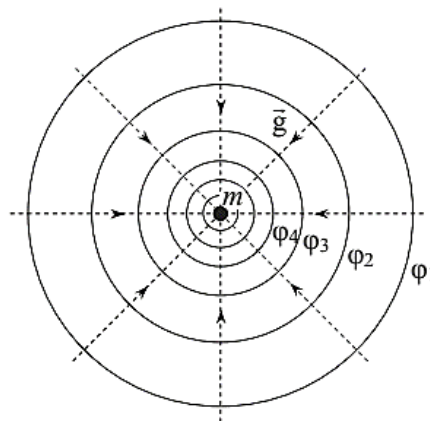


Рисунок 5.6 – Иллюстрация эквипотенциальных поверхностей гравитационного поля

В завершении параграфа укажем, что для иллюстрации представления гравитационных полей, помимо силовых линий также используются эквипотенциальные поверхности (см. рисунок 5.6). **Эквипотенциальная поверхность** (англ. equipotential surface)⁵⁴ – это геометриче-

⁵⁴ **Эквипотенциальные поверхности** – это понятие, применимое к любому потенциальному векторному полю, например, к статическому электрическому полю или к ньютоновскому гравитационному полю. *Эквипотенциальная поверхность* – это также, поверхность, на которой скалярный потенциал данного потенциального поля принимает постоянное значение (поверхность уровня потенциала). Другое, эквивалентное, определение – поверхность, в любой своей точке ортогональная силовым линиям поля. Поверхность проводника в электростатике является эквипотенциальной поверхностью. Кроме того, помещение проводника на эквипотенциальную поверхность не вызывает изменения конфигурации электростатического поля. Этот факт используется в методе изображений, который позволяет рассчитывать электростатическое поле для сложных конфигураций.

ское место точек, которые имеют идентичный гравитационный потенциал. Такого рода поверхности строятся таким образом, чтобы разность потенциалов между двумя соседними эквипотенциальными поверхностями оказывалась постоянной. Частота следования эквипотенциальных поверхностей, по общему правилу, определяет интенсивность гравитационного поля, иными словами, там, где такие поверхности проведены чаще, напряженность больше.

Важно запомнить: линии напряженности и эквипотенциальные поверхности всегда пересекаются под прямым углом.

В (стационарном) гравитационном поле уровень неподвижной жидкости устанавливается по эквипотенциальной поверхности. В частности, приближенно можно утверждать, что по эквипотенциальной поверхности гравитационного поля Земли проходит уровень океанов. Форма поверхности океанов, продолженная на поверхность Земли, называется геоидом и играет важную роль в геодезии. Геоид, таким образом, является эквипотенциальной поверхностью силы тяжести, состоящей из гравитационной и центробежной составляющей.

Глава 6. Закон сохранения момента импульса

6.1. Момент импульса материальной точки. Момент силы

Момент силы $\vec{M}$ (англ. moment of force) относительно неподвижной точки O – это физическая векторная величина, определяемая векторным произведением радиус-вектора $\vec{r}$, проведенного из точки O в точку приложения силы, на вектор действующей силы $\vec{F}$:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (6.1)$$

Как видно на **рисунке 6.1**, вектор момента силы $\vec{M}$ направлен перпендикулярно плоскости векторов $\vec{r}$ и $\vec{F}$, что следует из правила правого винта (правила буравчика). В данном случае, это правило применяется следующим образом: сперва необходимо выполнить параллельный перенос вектора силы $\vec{F}$ в точку O и посмотреть на кратчайший поворот от вектора $\vec{r}$ к вектору $\vec{F}$. Если такой поворот происходит против часовой стрелки, то получившийся вектор $\vec{M}$ направлен перпендикулярно плоскости векторов $\vec{r}$ и $\vec{F}$ на нас (если смотреть на плоскость, образованную векторами $\vec{r}$ и $\vec{F}$ сверху вниз), а если по ходу часовой стрелки (этот случай изображен на **рисунке 6.1**), то в противоположную сторону.

Важно запомнить: вектор $\vec{M}$ – это псевдовектор, его направление совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от $\vec{r}$ к $\vec{F}$.

Модуль момента силы определяется следующим выражением:

$$M = Fr \sin \alpha = Fh \quad (6.2)$$

где: α – угол между векторами $\vec{r}$ и $\vec{F}$; $h = r \sin \alpha$ – плечо силы. **Плечо силы** (англ. shoulder of force) – это длина перпендикуляра, опущенного из точки O на линию действия силы $\vec{F}$.

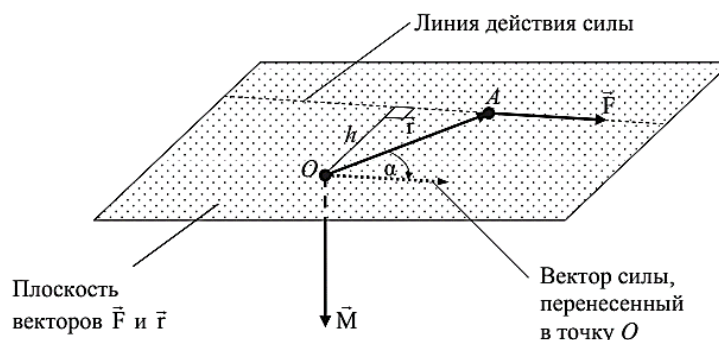


Рисунок 6.1 – Момент силы, приложенный к точке A , относительно центра O

Примечание: момент силы характеризует ее способность вызывать вращение тела относительно точки O ; единицей измерения этой величины (в системе СИ) будет **ньютон на метр** (обозначается $\text{Н} \cdot \text{м}$).

Момент импульса материальной точки (англ. angular momentum for a point particle) относительно неподвижной точки O – это векторное произведение радиус-вектора $\vec{r}$ материальной точки, проведенного из точки O , на импульс этой материальной точки $\vec{p}$:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} \quad (6.3)$$

где: m и $\vec{v}$ – это масса и скорость материальной точки.

Как видно из **рисунка 6.2**, вектор момента импульса $\vec{L}$ направлен перпендикулярно каждому из умножаемых векторов $\vec{r}$ и $\vec{p}$, опять же, согласно правилу правого винта (правилу буравчика).

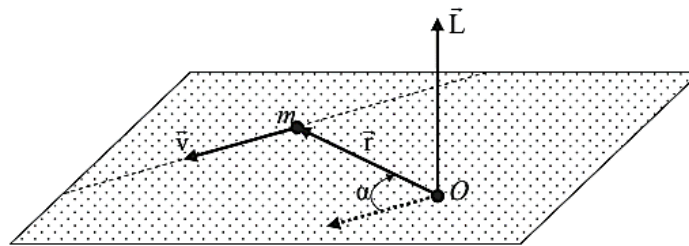


Рисунок 6.2 – Момент импульса материальной точки M относительно центра O

Примечание: единицей измерения момента импульса (в системе СИ) будет килограмм, умноженный на метр квадратный и деленный на секунду, т.е. «кг · м²/с».

В заключение параграфа рассмотрим, как момент импульса будет меняться при изменении начала координат. Предположим, что $\vec{a}$ – это радиус-вектор нового начала координат, тогда $\vec{r} = \vec{a} + \vec{r}'$, где $\vec{r}'$ – это радиус-вектор частицы в новой системе координат. Таким образом, мы имеем следующее:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_i (\vec{a} + \vec{r}'_i) \times \vec{p}_i = \vec{a} \times \sum_i \vec{p}_i + \sum_i \vec{r}'_i \times \vec{p}_i = \vec{a} \times \vec{P} + \vec{L}' \quad (6.4)$$

В данном случае $\vec{L}'$ – это момент импульса в новой системе координат, $\vec{P} = m\vec{V}$ – импульс системы. Если предположить, что начало координат будет перенесено в центр масс системы, то $\vec{L} = \vec{R} \times \vec{P} + \vec{S}$, где $\vec{S}$ – это собственный момент импульса (момент импульса в системе центра масс). **Собственным моментом импульса** (англ. own moment of the impulse) системы материальных точек называется момент импульса системы относительно точки, совпадающей с ее центром масс. Собственный момент импульса элементарных частиц называется **спином** (от англ. spin, букв. – «вращение, вращать(-ся)»)⁵⁵.

⁵⁵ **Спин** – это собственный момент импульса элементарных частиц, имеющий как квантовую, так и классическую природу и тесно связанный с представлениями группы вращений и группы Лоренца (классические аспекты спина см. в работах Н.С. Корбен, *Classical and Quantum Theories of Spinning Particles* (Holden-Day, San Francisco, 1968), Алексеи Дериглазов, *Classical Mechanics* (Second Edition, Springer 2017), Пенроуз и Риндлер, *Спиноры и пространство-время*). Спином называют также собственный момент импульса атомного ядра или атома; в этом случае спин определяется как векторная сумма (вычисленная по правилам сложения моментов в квантовой механике) спинов элементарных частиц, образующих систему, и орбитальных моментов этих частиц, обусловленных их движением внутри системы. Спин измеряется в единицах $\hbar$ (приведенной постоянной Планка, или постоянной Дирака) и равен $\hbar J$, где J – характерное для каждого сорта частиц целое (в том числе нулевое) или полуцелое положительное число – так называемое спиновое квантовое число (число, характеризующее представления группы вращений и группы Лоренца, то есть сколько в нём собственно квантовости и сколько неквантовости, сейчас неизвестно), которое обычно называют просто спином (одно из квантовых чисел). Спин свободной частицы измерить нельзя, так как для измерения требуется внешнее магнитное поле, а оно делает частицу несвободной. В связи с этим говорят о целом или полуцелом спине частицы. *Полуцелый спин фундаментальнее, так как «из него» можно построить целый спин, но обратное невозможно.*

Важно запомнить: если импульс системы равен нулю, то момент импульса будет зависеть от выбора начала координат и равным собственному моменту импульса.

6.2. Закон сохранения момента импульса

Уравнение моментов позволяет установить взаимосвязь между изменением момента импульса точки и моментом силы, которая действует на материальную точку. Обращаем внимание уважаемого читателя на то, что данное уравнение не является независимым законом природы, а непосредственно следует из *второго закона Ньютона* (см. подробнее пп. 3.2). Для его получения необходимо продифференцировать по времени выражение (6.3) для момента импульса материальной точки:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (6.5)$$

Вектор $\frac{d\vec{r}}{dt}$ – это скорость материальной точки $\vec{v}$, поэтому он сонаправлен с импульсом $m\vec{v}$. Соответственно, первое слагаемое в выражении (6.5) будет равно нулю. В свою очередь, вектор $\frac{d\vec{p}}{dt}$, согласно второму закону Ньютона, – это сила $\vec{F}$, которая действует на материальную точку. Поэтому, второе слагаемое выражения (6.4) может быть заменено на момент этой силы $\vec{M}$:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \quad (6.6)$$

Это выражение называется уравнением моментов для материальной точки или, в более традиционном варианте, – **теоремой об изменении момента импульса материальной точки** (англ. theorem on the change in angular momentum of a material point).

Рассмотрим механическую систему, которая состоит из n материальных точек. Предположим, что m_i и $\vec{v}_i$ – это масса и скорость i -точки системы. **Моментом импульса механической системы** (англ. angular momentum of a mechanical system) относительно неподвижной точки O выступит вектор, равный векторной сумме моментов импульса всех материальных точек системы относительно O :

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{p}_i) = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i) \quad (6.7)$$

Для каждой i -точки системы будет справедливым выражение (6.6); принимая во внимание то, что на каждую материальную точку влияют внешние и внутренние силы, уравнение моментов приобретет следующий вид:

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_{j=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} \quad (6.8)$$

где: $\vec{F}_i$ – равнодействующая внешних сил, действующих на i -ю материальную точку системы; $\vec{F}_{ij}$ – сила, которая действует на i -ю материальную точку со стороны j -й материальной точки.

Первое слагаемое в этом выражении – это момент внешних сил, действующих на i -ю материальную точку, второе – сумма моментов внутренних сил взаимодействия i -й материальной точки с остальными материальными точками системы.

Для того, чтобы получить закон изменения импульса механической системы, продифференцируем по времени равенство (6.7) для момента импульса механической системы:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \vec{L}_i = \sum_{i=1}^n \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \left(\vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_{j=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}' \right) = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}') \quad (6.9)$$

Согласно *третьему закону Ньютона* (см. подробнее пп. 3.2), силы взаимодействия двух материальных точек механической системы равны по величине и противоположны по направлению, т.е. $\vec{F}_{ij}' = -\vec{F}_{ji}'$. Плечи этих сил относительно неподвижной точки O равны, а значит, моменты сил взаимодействия двух материальных точек механической системы равны по величине и противоположны по направлению (см. рисунок 6.3): $\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}' = -\vec{r}_j \times \vec{F}_{ji}'$.

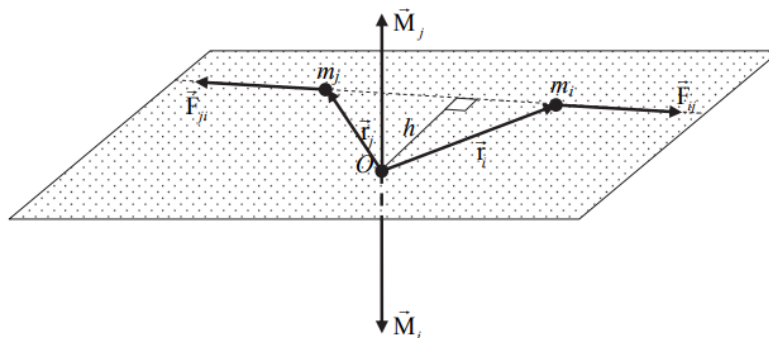


Рисунок 6.3 – Момент сил взаимодействия двух материальных точек

В таком случае, сумма моментов всех внутренних сил будет равна нулю, т.е. $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}') = 0$, и уравнение (6.9) можно упростить до следующих выражений:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{F}_i); \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i \quad (6.10)$$

где: $\sum_{i=1}^n \vec{M}_i$ – это векторная сумма моментов внешних сил.

Таким образом, мы получили уравнение моментов для механической системы, которое также называют **теоремой об изменении момента импульса механической системы** (англ. theorem on the angular momentum change for a mechanical system), согласно которой производная по времени от момента импульса механической системы равна векторной сумме моментов действующих на систему внешних сил. И если совокупный момент этих сил равен нулю, т.е.: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i) = 0$. (6.11)

Из этого следует, что момент импульса $\vec{L}$ механической системы в данном случае будет постоянным, т.е. с течением времени он не изменится. Таким образом, мы получаем **закон**

сохранения момента импульса (англ. conservation law for angular momentum), согласно которому момент импульса механической системы не изменяется с течением времени, если суммарный момент действующих на систему внешних сил равен нулю:

$$\text{если } \sum_{i=1}^n \vec{M}_i = 0, \text{ то } \vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i) = \text{const} \quad (6.12)$$

Данный закон действителен и в отношении *замкнутых механических систем*: момент импульса замкнутой механической системы не изменяется с течением времени.

Важно отметить, что равно как и законы сохранения импульса и механической энергии, закон сохранения момента импульса является одним из фундаментальных законов природы и справедлив не только в контексте классической (аналитической) механики. Он универсален и вполне релевантен основам релятивистской и квантовой механики. И еще один важный момент: закон сохранения момента импульса является следствием *особого свойства пространства* – **изотропности** (англ. isotropy), – означающего инвариантность физических законов относительно выбора направления осей координат системы отсчета. Иными словами, физические законы не изменяются при повороте системы отсчета в пространстве на какой-либо угол.

6.3. Динамика абсолютно твердого тела

Абсолютно твердое тело представим как *совокупность материальных точек*, к которым приложены внешние и внутренние силы; последние представляют собой силы взаимодействия жестко связанных между собой отдельных частиц абсолютно твердого тела. Для описания его вращательного движения будем использовать уравнение моментов для системы материальных точек (6.10):

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}; \vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i); \vec{M} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) \quad (6.13)$$

где: $\vec{L}$ – это момент импульса тела относительно некоторого центра O , который лежит на оси вращения; $\vec{M}$ – это итоговый момент внешних сил, действующих на тело, относительно того же центра.

Спроецируем обе части уравнения моментов на ось вращения z ; получаем:

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z \quad (6.14)$$

В данном случае проекция L_z момента импульса тела будет равна сумме проекций на ось z моментов импульсов отдельных частиц тела:

$$L_z = \sum_{i=1}^n L_{iz} = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i)_z \quad (6.15)$$

Проекция на ось z суммарного момента действующих на тело внешних сил M_z будет равна сумме проекций на ось z всех моментов внешних сил:

$$M_z = \sum_{i=1}^n M_{iz} = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{M}_i)_z \quad (6.16)$$

Выражение (6.14) представляет собой уравнение динамики вращательного движения абсолютно твердого тела относительно оси z . Как, вероятно, заметил уважаемый читатель, оно довольно схоже с уравнением динамики поступательного движения. При этом, становится очевидным соответствие импульса $\vec{p}$ и проекции момента L_z , равно как и силы $\vec{F}$, а также проекции момента силы M_z . Для того, чтобы верно использовать выражение (6.14), необходимо знать, как рассчитать проекции на ось z момента импульса тела и момента внешней силы.

Как видно на рисунке 6.4, абсолютно твердое тело вращается относительно оси z с угловой скоростью ω . Предположим, что некоторая материальная точка этого тела массой m_i движется по окружности радиусом R_i с линейной скоростью v_i . Радиус-вектор $\vec{r}_i$ данной точки проводится из лежащего на оси z центра O и образует с данной осью угол α . Поскольку вектора v_i, r_i перпендикулярны друг к другу, модуль момента импульса материальной точки будет определен следующим выражением: $L_i = m_i v_i r_i$. Вектор $\vec{L}_i (\vec{r}_i \times m_i v_i)$ перпендикулярен радиус-вектору $\vec{r}_i$, а также вектору линейной скорости v_i , а значит лежит в одной плоскости с осью z и радиус-вектором $\vec{r}_i$, образуя, при этом, с осью z угол $\beta = 90^\circ - \alpha$. В таком случае, проекция вектора L_i на ось z будет определяться следующим уравнением: $L_{iz} = L_i \cos \beta = m_i v_i r_i \sin \alpha = m_i v_i R_i$, – вне зависимости от того, где расположена точка O на оси z .

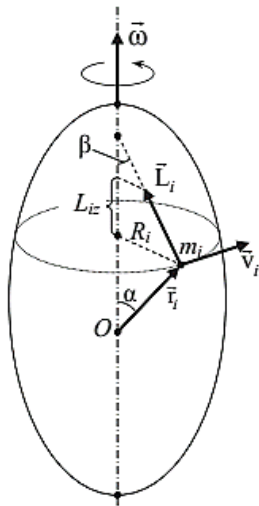


Рисунок 6.4 – Иллюстрация проекции момента импульса материальной точки на ось вращения тела

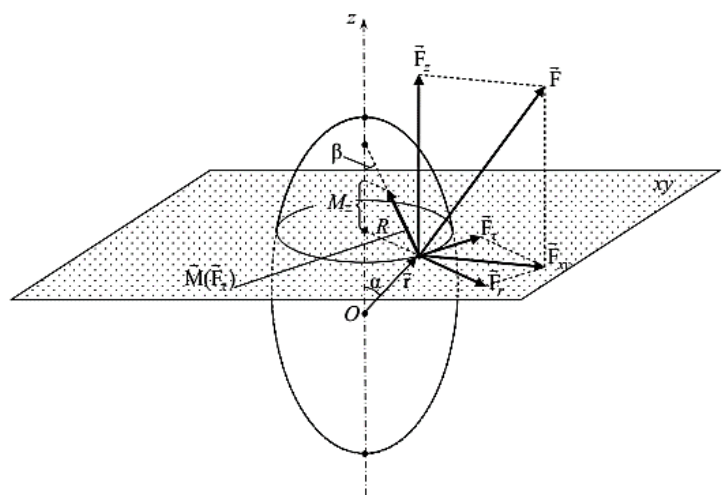


Рисунок 6.5 – Иллюстрация проекции момента силы на ось вращения тела

Если принять во внимание то, что при вращательном движении линейная и угловая скорости связаны соотношением $v_i = \omega R_i$, то учитывая выражение (6.15) можно записать следующее уравнение:

$$L_z = \sum_{i=1}^n m_i \omega R_i^2 = \omega \sum_{i=1}^n m_i R_i^2; L_z = I_z \omega \quad (6.17)$$

где: I_z – это момент инерции твердого тела относительно оси z , который определяется формулой:

$$I_z = \sum_{i=1}^n m_i R_i^2. \quad (6.18)$$

Таким образом, заключим, что *моментом инерции абсолютно твердого тела относительно оси z является скалярная величина, равна сумме произведений масс частей этого тела на квадраты их расстояний до оси z .*

Момент инерции материальной точки массой m , расположенной на расстоянии R от оси z (англ. moment of inertia for a material point with mass m , located at a distance R from the z axis) – это физическая величина, рассчитываемая согласно следующей формуле:

$$L_z = mR^2 \quad (6.19)$$

Примечание: единицей измерения момента инерции (в системе СИ) будет *килограмм на метр в квадрате*, т.е. «кг × м²».

Далее рассмотрим, как определяется проекция момента силы на ось вращения z . На рисунке 6.5 изображено тело, вращающееся относительно данной оси. Предположим, что на одну из точек с радиус-вектором $\vec{r}$ действует произвольно направленная сила $\vec{F}$. Разложим эту силу на два компонента: $\vec{F} = \vec{F}_z + \vec{F}_{xy}$, где $\vec{F}_z$ – это сила, параллельная оси z , а $\vec{F}_{xy}$ – сила, перпендикулярная $\vec{F}_z$ и лежащая в плоскости xy . Окружность, по которой при вращении тела движется точка приложения силы, аналогичным образом лежит в данной плоскости. Радиус этой окружности определяется через следующее уравнение: $R = r \sin \alpha$, где α – это угол между радиус-вектором $\vec{r}$ и осью z . Теперь разложим на две составляющие силу $\vec{F}_{xy}$ и получим $\vec{F}_{xy} = \vec{F}_r + \vec{F}_t$, где $\vec{F}_r$ – это радиальная сила, которая направлена вдоль радиуса окружности R , а $\vec{F}_t$ – это касательная сила, которая направлена, соответственно, по касательной к той же окружности. Таким образом, тремя составляющими силами $\vec{F}$ являются: $\vec{F}_z + \vec{F}_r + \vec{F}_t$.

Следует отметить, что параллельная оси z сила $\vec{F}_z$ и радиальная сила $\vec{F}_r$ не могут вызвать вращательного движения тела вокруг данной оси. Действительно, моменты этих сил направлены по касательной к окружности, по которой при вращении тела движется точка приложения силы и, следовательно, их проекции на ось z равны нулю. Момент касательной силы $\vec{F}_t$ лежит в одной плоскости с радиус-вектором $\vec{r}$ и осью z , его проекция на ось z не равна нулю. Соответственно, вращение тела вокруг оси z будет вызывать только касательная сила $\vec{F}_t$, момент которой относительно точки O , лежащей на оси z , равен $M(\vec{F}_t) = F_t R$. Проекцию этого момента на ось z можно найти по формуле:

$$M_z = M(\vec{F}_t) \cos \beta = F_t r \sin \alpha = F_t R \quad (6.20)$$

где: $\beta = 90^\circ - \alpha$ – это угол между вектором момента силы $\vec{F}_t$ и осью z , а радиус окружности R в данном случае выполняет роль плеча силы (см. подробнее пп. 6.1)

Принимая во внимание выражение (6.17), уравнение динамики для вращения тела относительно оси z будет сформулировано следующим образом:

$$\frac{d(I_z \omega)}{dt} = M_z \quad (6.21)$$

Если момент инерции абсолютно твердого тела I_z не зависит от времени, то данное уравнение можно записать и так:

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = M_z \quad (6.22)$$

или, принимая во внимание, что $\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon$, то получаем следующее выражение:

$$\varepsilon = \frac{M_z}{I_z} \quad (6.23)$$

Уравнение (6.23) представляет собой **уравнение динамики вращательного движения абсолютно твердого тела относительно неподвижной оси** (англ. equation for the dynamics of rotational motion of absolutely rigid body in relation to fixed axis, around fixed axis). По своему физическому смыслу это уравнение аналогично *второму закону Ньютона* для движения материальной точки. Одновременно с этим, можно заметить соответствие между линейным $\vec{a}$ и угловым $\vec{\varepsilon}$ ускорениями, между силой $\vec{F}$ и проекцией момента силы M_z , и между массой m и моментом инерции I_z . Сказанное позволяет заключить, что момент инерции тела относительно оси является мерой инертности тела при вращательном движении подобно тому, как масса является мерой инертности тела при поступательном движении.

Для демонстрации уникальных приложений Физических Основ Механики приведен также и список публикаций автора, Пономарева Максима Глебовича, [87], [210], [211], [212], [213], [214], [215], [216], [217], [218], [219], [220], [221], [222], [223], [224], [225], [226], [227], [228], [229], [230], [231], [232], [233], [234], [235], [236], [237], [238], [239], [240], [241], [242], [243], [244], [245], [246], [247], [248], [249], [250], [251], [252], [253], [254].

Список используемых и рекомендуемых источников

Научная и учебная литература:

1. Акустические взаимодействия в газовых потоках [Текст] / под ред. В.Н. Емельянова, К.Н. Волкова. – М.: Физматлит, 2021. – 588 с.
2. Айзерман М.А. Классическая механика. – М.: Наука, 1980. – 368 с.
3. Александров М.А. Корпускулярно-волновой дуализм и движение микрообъектов [Текст]. – М.: РКонсульт, 2009. – 49 с.
4. Ардашев А.П. Преобразования Лоренца. Новые горизонты [Текст]: [Монография]. – Киров, 2003 (Тип. ТДООШ). – 50 с.
5. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. – 5-е изд., стереотипное. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 416 с.
6. Асипова К.В. Есть ли тяготение закон? [Текст]: новый подход к явлению гравитации в рамках синтез. концепции поля силы притяжения и отталкивания: теорет.-эксперимент. исслед. – Сергиев Посад: Весь Сергиев Посад, 2005. – 159 с.
7. Афонин А.М. Физические основы механики [Текст]: учебное пособие для студентов вузов, обучающихся по техническим направлениям подгот. и специальностям. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2006. – 366 с.
8. Баутин С.П. Торнадо и сила Кориолиса [Текст]. – Новосибирск: Наука, 2008. – 92 с.
9. Баутин С.П. Аналитическое и численное моделирование течений газа при учете действия силы Кориолиса = Analitical and numerical modeling the gas flows under the action of the Coriolis force [Текст]: монография / С. П. Баутин, И. Ю. Крутова. – Екатеринбург: УрГУПС, 2019. – 181 с.
10. Беляев И.Н. Истинная философия природы [Текст]: возрождение древнего знания в терминах современной науки, устойчивая иллюзорность материи и корпускулярно-волновой дуализм, непротиворечивая схема зарождения окружающего мира, объективная реальность в материальном мире устойчивой иллюзии, общая методология познания, предпосылка уникальности нашей планеты, объективность естественного права. – М.: б/и, 2016. – 79 с.
11. Биденхарн Л., Лаук Дж. Угловой момент в квантовой физике. Теория и приложения [Текст]. – М.: Мир, 1984. – Т. 1. – 302 с.
12. Блохинцев Д.И. Основы квантовой механики [Текст]. – М.: Наука, 1976. – 664 с.
13. Борн М. Эйнштейновская теория относительности [Текст]. – М.: «Мир», 1972. – 368 с.
14. Боум А. Квантовая механика: основы и приложения [Текст]. – М.: Мир, 1990. – 720 с.
15. Варшавович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К. Квантовая теория углового момента. — Л.: Наука, 1975. — 441 с.
16. Ватульян А.О. Коэффициентные обратные задачи механики [Текст]. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2019. – 271 с.
17. Волченко А.П. Преобразования Лоренца как объект классической механики. – М.: URSS, 2022. – 130 с.
18. Галенко П.К. Высокоскоростная динамика в методе фазового поля: микроскопика [Текст]: монография / П. К. Галенко, В. Е. Анкудинов, И. О. Стародумов. – М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2021. – 239 с.

19. *Гарипов Т.Х.* Что такое Закон сохранения энергии [Текст]: автореферат: новая редакция истины на Закон сохранения первичной формы движения тел / Т. Х. Гарипов. – Изд. 3-е, перераб. и расш. – Балашиха: Гарипов Т. Х., 2020. – 137 с.
20. *Гладун А.Д.* Элементы релятивистской механики [Текст]: учебно-методическое пособие по курсу Общая физика. – 2-е изд. – М.: МФТИ, 2012. – 37 с.
21. *Голдратт Э.М.* Критическая цепь [Текст]; пер. с англ. – М.: ТОС Центр, 2006 – 272 с.
22. *Голубев Ю.Ф.* Основы теоретической механики. – М.: МГУ, 2000. – 720 с.
23. *Гребенищikov Г.К.* Физика от Григория: спин частиц, сверхпроводимость, электромагнетизм, корпускулярно-волновой дуализм, движение и инерция, модели атомов [Текст]. – СПб.: б/и, 2005. – 182 с.
24. *Губайдуллин, Д. А.* Аэрогидродинамика дисперсной частицы [Текст]: [монография] / Д. А. Губайдуллин, П. П. Осипов; Российская академия наук, Федеральный исследовательский центр «Казанский научный центр», Институт механики и машиностроения. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2020. – 170 с.
25. Двумерные нестационарные волны в электромагнитоупругих телах [Текст] / [В.А. Вестяк, А.Р. Гачкевич, Р.С. Мусий и др.]. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2019. – 283 с.
26. *Дерюгин Е.В.* Динамика вращательного движения абсолютно твердого тела [Текст]: учебное пособие / Е. Е. Дерюгин, Л. А. Теплякова. – Томск: Изд-во ТГАСУ, 2010. – 64 с.
27. *Димитриенко Ю.И.* Механика композитных конструкций при высоких температурах [Текст]: [монография] / Ю.И. Димитриенко. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2018. - 447 с.
28. *Дроздов В.И.* Корпускулярно-волновой дуализм в единой теории гравитации, электричества и спинорной электродинамики [Текст]. – СПб.: Изд-во Политехнического ун-та, 2010. – 10 с.
29. *Ефремов Ю.С.* Квантовая механика [Текст]: учебное пособие для вузов. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Издательство Юрайт, 2023. – 458 с.
30. *Зар Р.* Теория углового момента. О пространственных эффектах в физике и химии [Текст]. – М.: Мир, 1993. – 352 с.
31. *Земсков А.В.* Моделирование механодиффузионных процессов в многокомпонентных телах с плоскими границами [Текст]: монография / А. В. Земсков, Д. В. Тарлаковский. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2021. – 283 с.
32. *Зоммерфельд А.* Механика = Sommerfeld A. Mechanik. Zweite, revidierte auflage, 1944 [текст]. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 368 с.
33. *Зуев Л.Б.* Автоволновая пластичность. Локализация и коллективные моды [Текст]: [монография] / Л.Б. Зуев; отв. ред. С.Г. Псахье. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2018. - 207 с.
34. *Иваницкая О.С.* Обобщенные преобразования Лоренца и их применение [Текст]; под ред. докт. физ.-мат. наук, проф. В.И. Родичева. – Изд. 2-е. – М.: URSS: ЛЕНАНД, сор. 2020. – 226 с.
35. *Иванов В.К.* Физика. Молекулярная физика [Текст]: учеб. пособие. – СПб.: ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2021. – 202 с.
36. *Иванов М.Г.* Размерность и подобие [Текст]. – Долгопрудный: б/и, 2019. – 103 с.
37. Исаак Ньютон. Математические начала натуральной философии [Текст]; пер. с лат. и прим. А. Н. Крылова / под ред. Полака Л.С. – М.: Наука, 1989. – 690 с.
38. *Канель Г.И.* Ударные волны в физике твердого тела [Текст]. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2018. - 203 с.
39. *Киселев А.Б.* Закон всемирного тяготения в классическом и квантовом представлении [Текст]. - Иркутск, 2002. – 21 с.

40. Ковалев А.Е. Новый подход к явлению гравитации [Текст] / Ковалев А.Е. [и др.]. – М.: Перо, 2014. – 40 с.
41. Колесников А.А. Гравитация и самоорганизация [Текст]. – М.: URSS, 2006. – 107 с.
42. Кравченко Н.С. Физика. Часть I. Механика. Молекулярная физика и термодинамика [Текст]: учебное пособие / Н.С. Кравченко, Е.В. Лисичко, С.И. Твердохлебов. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2012. – 208 с.
43. Кузнецов Б.Г. Основные принципы физики Ньютона / отв. ред. Григорьян А. Т., Полак Л. С. Очерки развития основных физических идей. – М.: АН СССР, 1959. – С. 186-197.
44. Кузнецов С.И. Физика: оптика. Элементы атомной и ядерной физики. Элементарные частицы [Текст]: учебное пособие для вузов. – М.: Издательство Юрайт, 2022. – 301 с.
45. Кулешов А.С. О первых интегралах уравнений движения тяжелого тела вращения на абсолютно шероховатой плоскости [Текст]. – М.: б/и, 2002. – 19 с.
46. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика [Текст]. – Изд. 4-е, испр. – М.: Наука, 1988. – 215 с.
47. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля [Текст]. – Изд. 7-е, испр. – М.: Наука, 1988. – 512 с.
48. Лошкарева Е., Лукаш П., Ниненко И., Смагин И., Судаков Д. Навыки будущего. Что нужно знать и уметь в новом сложном мире [Текст]: доклад. – М.: Ворлдскиллс Россия, 2020. – 93 с.
49. Матвеев А.Н. Механика и теория относительности = Mechanics and relativity theory [Текст]: учебное пособие. – 4-е изд., стер. – СПб. [и др.]: Лань, 2009. – 324 с.
50. Международная система единиц (SI). – 9-е изд. – М.: Росстандарт, 2019. – 100 с.
51. Механика. Отдельные главы [Текст]: учеб. пособие / сост.: А. А. Русинов, Д. Н. Вандышев, В. И. Житенев, Е. А. Русинова. – Екатеринбург: Уральский федеральный университет, 2022.— 94 с.— ISBN 978-5-7996-3415-5.
52. Мещанин А.П. Откуда взялась гравитация, или Тайна природы универсального механизма гравитации Вселенной в рамках закона всемирного тяготения Ньютона и наша Солнечная система (новый взгляд) [Текст]. – М.: Спутник+, 2020. – 16 с.
53. Михайлов В.Н. Закон всемирного тяготения [Текст]. – изд. 3-е, перераб. – М.: УРСС, 2004. – 181 с.
54. Моисеев Н.Д. Очерки развития механики [Текст]: [учеб. пособие для ун-тов] / под ред. проф. П. М. Огибалова. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1961. – 478 с.
55. Моренко В.И. Общая теория относительности и корпускулярно-волновой дуализм материи [Текст]. – [Изд. 2, доп. и перераб.]. – М.: Дизайн-студия Стайл-А, 2004. – 116 с.
56. Мултановский В.В. Классическая механика [Текст]: учебное пособие для студентов педагогических и технических высших учебных заведений, обучающихся по направлениям подготовки и специальностям в области физики и естественнонаучного образования. – 2-е изд., перераб. – М.: Дрофа, 2008. – 382 с.
57. Мурзин А.О. Законы Ньютона [Текст]: учебно-методическое пособие / А. О. Мурзин, А. А. Шейкин, И. В. Блашков. – СПб.: Изд-во Санкт-Петербургского ун-та, 2021. – 59 с.
58. Мусин Ю.Р. Физика: механика [Текст]: учебное пособие для среднего профессионального образования. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Издательство Юрайт, 2023. – 262 с.
59. Ньютон. Закон всемирного тяготения. Самая притягательная сила природы [Текст]: [пер. с исп.] / В кн.: «Наука. Величайшие теории»; изд., учред., ред.: ООО «Де Агостини». – М.: Де Агостини, 2015. – 167 с.
60. Паули В. Общие принципы волновой механики [Текст]. – М.: ОГИЗ, 1947. – 333 с.

61. Платонов А.А. Произвольное движение инерциальных систем отсчета и группа тригонометрических преобразований Лоренца. – СПб.: Страта, 2022. – 209 с.
62. Погребысский И.Б. От Лангранжа к Эйнштейну: классич. механика XIX в. / АН СССР. Эйнштейновский ком. – М.: Наука, 1966. – 327 с.
63. Пожарский Д.А. Фундаментальные решения статики упругого клина и их приложения [Текст] / Д.А. Пожарский. – Ростов-на-Дону: ООО «ДГТУ-Принт», 2019. – 311 с.
64. Приходовский М.А. Математическая модель формирования и вращения галактик под действием сил Кориолиса на четырёхмерной гиперсфере [Текст]: препринт. – Томск: Иван Фёдоров, 2019. – 46 с.
65. Рыжиков С.Б. Энергия и движение. Физика [Текст]: [физика Аристотеля. Законы Ньютона. Золотое правило механики. Сила трения. Плавание и полёты. Тепловые машины / [Рыжиков С. Б., Рыжикова Ю. В.]. – М.: ОЛМА Медиа Групп, 2014. – 303 с.
66. Сидоров А.А. Основные положения квантовой механики. Корпускулярно-волновой дуализм [Текст] / А. А. Сидоров, В. Е. Холодовский. – Брянск: Изд-во Брян. гос. ун-та, 2002. – 87 с.
67. Сивухин Д.В. Общий курс физики [Текст]. – Изд. 4-е. – М.: Физматлит, 2002. – Т. I. Механика. – 792 с.
68. Сметана А.И. Новый взгляд на природу сил взаимодействия [Текст] / А. И. Сметана, С. А. Сметана. – М.: URSS, 2007. – 155 с.
69. Сота С. Движение по кругу. Закон гравитации [Текст]; [пер.: Г. Кириллов]. – Калуга: Акватинта, сор. 2016. – 15 с.
70. Ступишин Л.Ю. Критические уровни внутренней потенциальной энергии деформации твердых деформируемых тел [Текст]: монография. – М.; Курск: Университетская книга, 2022. – 386 с.
71. Тимофеев Е.И. Электричество. Роль законов сохранения импульса и момента импульса электронов в электродинамике Ампера [Текст]. – М.: Тимофеев Е. И., 2011. – 34 с.
72. Трубочев О.О. История и методология физики. – М.: ФИЗФАК МГУ им. М.В. Ломоносова, 2021. – 64 с.
73. Усенко А.С. Сила Кориолиса [Текст]. – Краснодар: Традиция, 2020. – 295 с.
74. Ухватов А.В. Законы электричества и гравитации при движении [Текст]. – 2-е изд. – Саранск: Тип. «Красный Октябрь», 2001. – 16 с.
75. Учайкин В.В. Механика. Основы механики сплошных сред [Текст]: учебник / В. В. Учайкин. – 2-е изд., стер. – СПб.; М.; Краснодар: Лань, 2021. – 858 с.
76. Федулов И.Н. Закон сохранения импульса и эффект инверсии импульса [Текст]: новое применение в теории космических полетов. – М.: Ленанд, 2015. – 19 с.
77. Фейнман Р. Ф. Фейнмановские лекции по физике [Текст]. Вып. 1 Современная наука о природе. Законы механики. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 440 с.
78. Фрейман Л.С. К истории доказательства теоремы Кориолиса // Труды института истории естествознания и техники; гл. ред. Н. А. Фигуровский. – М.: АН СССР, 1956. – Т. 10. – С. 213-244.
79. Храмов Ю.А. Физики: Биографический справочник. – 2-е изд. – М.: Наука, 1983. – 400 с.
80. Цветков А.В. Фотон и геометрия. – М.: Беловодье, 2005. – 62 с.
81. Чернышенко Л.В. Уточнение формулировок закона сохранения энергии и пределов его применимости [Текст]: (методическое руководство). – Таганрог: Ньюанс, 2017. – 11 с.
82. Широков Ю.М., Юдин Н.П. Ядерная физика [Текст]. – М.: Наука, 1972. – 672 с.

83. Ширков Д. В. Физика микромира [Текст]. – М.: Советская энциклопедия, 1980. – 527 с.
84. Яковлев В.И. Предыстория аналитической механики [Текст]. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 328 с.
85. Milner R.G. A Short History of Spin (англ.) // Contribution to the XVth International Workshop on Polarized Sources, Targets, and Polarimetry. – Charlottesville, Virginia, USA, September 9-13, 2013. – arXiv:1311.5016.
86. The 12 Transferable Skills from UNICEF's Conceptual and Programmatic Framework. Panama: United Nations Children's Fund (UNICEF), 2022. – 35 p.
87. Пономарев, М. Г. Физические Основы Механики, часть 2: учеб. пособие для физ.-мат., инженерно-физических и инженерных специальностей вузов, Издательство «Мир науки» 2023 (в печати).

Статьи и публикации:

88. Андреев С. Н., Еремичева Ю. И., Тараканов В. П. Особенности отражения фемтосекундного лазерного импульса от резкой границы релятивистской лазерной плазмы // Краткие сообщения по физике ФИАН. 2013. №8. С. 25-32.
89. Анисимова Т.А., Сабирова Ф.М. Актуализация магистерской программы «цифровое образование» посредством дополнения ее модулем «технологии STEAM-образования» // Общество: социология, психология, педагогика. 2022. №8 (100). С. 186-191.
90. Аринчев С.В. Третий закон Ньютона – это не догма. Это расчетная гипотеза // Известия вузов. Машиностроение. 2020. №6 (723). С. 36-50.
91. Афонасьева А. Б., Зайцев А. А. Влияние силы Кориолиса на распространение вынужденных длинных морских волн // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. Серия: Физико-математические и технические науки. 2010. №4. С. 8-13.
92. Бальбус И.А. Крупномасштабные модели атмосферы за пределами традиционного приближения // Символ науки. 2020. №6. С. 8-10.
93. Баскин В. Э. Нестационарные вихревые движения слабо-возмущенного газа и преобразования Лоренца // Ученые записки ЦАГИ. 1971. №4. С. 15-21.
94. Баутин С.П. Линеаризованная система уравнений газовой динамики при учёте действия силы Кориолиса и её некоторые решения // МСМ. 2019. №3 (51). С. 59-73.
95. Баутин С.П., Бугаенко А.А., Крутова И.Ю. Частные решения линеаризованной системы уравнений газовой динамики при учёте действия силы Кориолиса // МСМ. 2020. №1 (53). С. 82-93.
96. Беднов Б.Б. О точках Штейнера в пространстве непрерывных функций // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2011. №6. С. 26-31.
97. Белашов А Н. Опровержение закона сохранения энергии // МНИЖ. 2013. №9-1 (16). С. 7-19.
98. Беловол А.В. Законы механики и универсальные законы природы // Вестник ХНАДУ. 2013. №60. С. 148-153.
99. Берестовой А. М., Надточий В. А. Гравитационное красное смещение // ФМО. 2020. №1 (23). С. 11-15.
100. Бирюков В. В., Грачев В. А. Моделирование электромагнитного поля прямоугольного волновода с использованием преобразований Лоренца // Вестник ННГУ. 2014. №2-1. С. 164-169.

101. Богословский М.М. Новая формулировка закона сохранения энергии // Наука, техника и образование. 2022. №1 (84). С. 5-11.
102. Брусин С.Д. Открытие новой формы материи и анализ фундаментальных положений науки // Евразийский Союз Ученых. 2017. №2 (35). С. 58-62.
103. Бурьян Ю.А., Чернявская Д.Д., Чернявский Д.И. Закон сохранения энергии при центральном ударе двух тел // ОНВ. 2016. №2 (146). С. 5-8.
104. Ваганов А.Г. Анти-ньютон – феномен дилетантской науки на примере попыток опровержения закона всемирного тяготения // Управление наукой: теория и практика. 2020. №4. С. 2-4-225.
105. Варфаламеева С.А., Ларченкова Л.А. Построение иерархии математических моделей при решении задач на закон сохранения импульса // Известия РГПУ им. А. И. Герцена. 2017. №183. С. 14-21.
106. Васильев Э.Ф. Объективность и наблюдаемость теории относительности эйнштейна и теории релятивистской массы // Наука и образование сегодня. 2020. №10 (57). С. 5-9.
107. Васильев Э.Ф. Сравнение роли массы в теориях Ньютона и Эйнштейна // Наука и образование сегодня. 2020. №9 (56). С. 5-8.
108. Васильков Г.В. Локальный закон сохранения энергии деформаций в саморегулирующихся механических системах // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки. 2003. №2. С. 17-23.
109. Вельгас Л.Б., Яволинская Л.Л. Нет никакой силы всемирного тяготения // Интерактивная наука. 2020. №6 (52). С. 52-53.
110. Вернов С. Ю., Хрусталева О. А., Чичикина М. В. Квантование релятивистски инвариантных систем в терминах групповых переменных Боголюбова. I. операторы координаты и импульс // Вестник Московского университета. Серия 3. Физика. Астрономия. 2004. №1. С. 3-6.
111. Витко А.В. Законы сохранения энергии и импульса с применением релятивистских понятий полных энергии, импульса, запаса скорости и массы тела // Евразийский Союз Ученых. 2020. №12-4 (81). С. 18-22.
112. Вышинский В.А. «Коррекция» закона всемирного тяготения // Sciences of Europe. 2018. №25-2 (25). С. 22-31.
113. Галкин А. Л., Галстян А. М., Коробкии В. В., Романовский М. Ю., Ширяев О. Б. Движение заряженной частицы в поле короткого лазерного импульса релятивистской интенсивности // Краткие сообщения по физике ФИАН. 2007. №3. С. 31-40.
114. Галкин А. Л., Калашников М. П., Трофимов В. А. Угловое распределение электронов в поле короткого лазерного импульса релятивистской интенсивности // Краткие сообщения по физике ФИАН. 2012. №8. С. 35-42.
115. Гальцов Д.В., Мелкумова Е.Ю., Спирин П. Гравитационное столкновение частиц с доменными стенками и релятивистские потенциалы // Вестник ТГПУ. 2014. №12 (153). С. 70-79.
116. Геворкян С.Г., Голубов Б.Н. Развитие представлений о метрике пространства-времени в окрестности Земли и проблема формулировки закона всемирного тяготения // Электронное научное издание Альманах Пространство и Время. 2014. №1-1. С. 5.
117. Григорьев М.А. Единый гармонично пульсирующий периодический закон массы и гравитации // The Scientific Heritage. 2020. №53-2. С. 19-53.
118. Гришина О.В. Квантовая теория и Восточная философия о принципиальном единстве Вселенной // Инновационная наука. 2015. №6-2. С. 10-13.

119. Гришковский В.Е. Об усовершенствовании опыта Майкельсона, несостоятельности корпускулярной теории и происхождении Вселенной // Достижения вузовской науки. 2014. №11. С. 167-172.
120. Давидович М.В. Законы сохранения и плотности энергии и импульса электромагнитного поля в диспергирующей среде // Изв. Саратов. ун-та Нов. сер. Сер. Физика. 2012. №1. С. 46-54.
121. Давыдянц Д.Е. Корпускулярно-волновой дуализм: структурные взаимосвязи энергетических характеристик в системе "Волна-Частица" (одна из научных версий разрешения проблемы) // Kant. 2018. №2 (27). С. 373-378.
122. Дерябин С.Л., Мезенцев А.В. Численно-аналитическое моделирование газовых течений, примыкающих к вакууму в условиях действия сил тяготения и Кориолиса // ЖВТ. 2010. №5. С. 51-57.
123. Дубнищев Ю.Н., Дубнищева Т.Я. Фурье-сопряженные модели в концепции корпускулярно-волнового дуализма // Вестник НГУЭУ. 2015. №1. С. 341-346.
124. Егоров Г.В. О роли законов сохранения в физике // Вестник БГУ. 2014. №1. С. 291-294.
125. Ернылева С. Е., Богданкевич И. Л., Лоза О. Т. Механизм укорочения импульса излучения плазменного релятивистского СВЧ-генератора // Краткие сообщения по физике ФИАН. 2013. №7. С. 10-23.
126. Ернылева С.Е., Лоза О.Т. Устранение срыва излучения плазменного релятивистского СВЧ-генератора // Краткие сообщения по физике ФИАН. 2014. №2. С. 20-25.
127. Жарова Н.Р. Аналитическое и численное решения линейного неоднородного дифференциального уравнения в задаче теоретической механики «исследование движения материальной точки» при помощи MAPLE и MATHCAD // The Scientific Heritage. 2021. №73-2. С. 44-50.
128. Жмудь В.А. Закон сохранения энергии в астрофизике // Автоматика и программная инженерия. 2020. №3 (33). С. 144-148.
129. Жмудь В.А. О физических объяснениях некоторых природных процессов // Автоматика и программная инженерия. 2020. №3 (33). С. 74-78.
130. Жорник А.И., Киричек В.А. Корпускулярно-волновой дуализм микрообъектов. Уравнение Шрёдингера – основное уравнение нерелятивистской квантовой механики // Вестник Таганрогского института имени А. П. Чехова. 2022. №2. С. 45-56.
131. Зырянов Д.Е., Шастовский П.С. Влияние силы Кориолиса на направление движения ветра // Актуальные проблемы авиации и космонавтики. 2019. №. С. 489-491.
132. Ильченко В.Л. Квантование лунной гравитации (энергии приливной волны) в земной оболочке и «Квантовая» основа силы упругости // Вестник Кольского научного центра РАН. 2017. №1. С. 34-42.
133. Ишлинский А.Ю. К вопросу об абсолютных силах и силах инерции в классической механике // Сб. науч.-мет. ст. «Теоретическая механика». 2000. № 23. С. 3-8.
134. Клименко А.В., Клименко В.А. Частицы, античастицы и гравитация. Антитяготение // Вестник ЧелГУ. 2013. №19 (310). С. 78-88.
135. Козлов В.В. Сила Лоренца и ее обобщения // Rus. J. Nonlin. Dyn., RJND. 2011. №3. С. 627-634.
136. Козырева Н.В. STEM-форма в профорientации обучающихся образовательных организаций // Образование. Карьера. Общество. 2022. №4 (75). С. 15-18.
137. Колесникова Е.М., Куденко И.А. Интерес к STEM-профессиям в школе: проблемы профорientации // Социологические исследования. 2020. № 4. С. 124-133.

138. Кочетков А.В., Федотов П.В. Специальная теория относительности А. Эйнштейна: комментарии и сомнения // Пространство и Время. 2013. №1 (11). С. 49-57.
139. Кошман В. От закона всемирного тяготения к оценке гравитационной массы вселенной // Norwegian Journal of Development of the International Science. 2022. №80. С. 45-49.
140. Кошман В.С. Закон всемирного тяготения и космологическое расширение вселенной // The Scientific Heritage. 2021. №74-1. С. 25-27.
141. Кошман В.С. Закон всемирного тяготения и уравнения связи между параметрами космологического расширения вселенной // The Scientific Heritage. 2021. №80-2. С. 49-51.
142. Кошман В.С. Закон всемирного тяготения как ключ к разгадке космологических загадок природы // The Scientific Heritage. 2021. №80-2. С. 45-48.
143. Кошман В.С. Информативность закона всемирного тяготения в реалиях XXI века // Sciences of Europe. 2021. №84-1. С. 35-40.
144. Кошман В.С. К вопросу оценки «трудового стажа» закона всемирного тяготения // Norwegian Journal of Development of the International Science. 2021. №69-1. С. 45-47.
145. Кошман В.С. От глубинной сущности законов всемирного тяготения и Стефана – Больцмана к описанию космологической эволюции вселенной // The Scientific Heritage. 2021. №79-1. С. 23-28.
146. Кошман В.С. От физической сущности законов всемирного тяготения и Стефана Больцмана к вопросу космологической динамики вселенной // The Scientific Heritage. 2021. №78-2. С. 61-64.
147. Кречет В.Г. Астрофизические эффекты гравитационного взаимодействия вихревых полей // Ярославский педагогический вестник. 2010. №1. С. 71-77.
148. Ксендзов В.А. Динамика движения частицы по горизонтальному неподвижному диску, перемещаемой вертикально расположенной к нему прямолинейной лопастью // Вестник РГАТУ. 2016. №4 (32). С. 98-100.
149. Кузнецов С. А., Дикий Р. В. Закон сохранения момента импульса в динамическом анализе механизмов // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Серия: Технические науки. 2007. №3. С. 28-30.
150. Куролес В.К. Преобразования Лоренца без парадоксов // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук. 2015. №10-1. С. 19-24.
151. Лебедев С.П. Элейское мышление в современной физике. Часть 1. Предпосылки. Преобразования Лоренца // Вестник РХГА. 2022. №3-1. С. 11-27.
152. Ляхов А.И., Слепнев Н.Ф. Ускорение и силы Кориолиса, их влияние на характер распределения золота по площади и поперечному сечению аллювиальных россыпей // Вестник ИрГТУ. 2004. №1 (17). С. 48-53.
153. Макаров В.Н., Баутин С.П., Баутин К.В., Горбунов С.А. Исследование циркуляционного течения атмосферного воздуха под действием силы Кориолиса // Известия УГГУ. 2013. №2 (30). С. 35-38.
154. Макеев Н. Н. Творец синтетической геометрии (к 215-летию со дня рождения Якоба Штейнера) // Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2013. №1 (13). С. 69-77.
155. Малова И.Е., Гельфман Э.Г. Приёмы доказательства теоремы Штейнера-Лемуса // Ученые записки ОГУ. Серия: Гуманитарные и социальные науки. 2020. №3 (88). С. 203-207.
156. Малых В.С., Феклистов Г.С. Адекватность законов Ньютона для задач динамики систем с голономными связями // Вестник Адыгейского государственного университета. Серия 4: Естественно-математические и технические науки. 2014. №2 (137). С. 55-59.

157. *Матвеев В.И.* Релятивистское обобщение приближения внезапных возмущений // Arctic Environmental Research. 2008. №1. С. 91-97.
158. *Мацевич И.С.* Естественно-научное образование будущего: STEM-технологии в современном образовательном пространстве // ELS. 2022. №октябрь. С. 55-58.
159. *Меньшов Е.Н.* Роль калибровки Лоренца в электродинамике // Вестник УлГТУ. 2019. №2 (86). С. 51-54.
160. *Набиев Ш.И., Юсупов О.Я., Курбонова Ф.К., Садиров С.Х.* Безмассовые частицы – основа мироздания // Science Time. 2016. №4 (28). С. 592-595.
161. *Нагибин Г.Е.* Решение задачи о движении тела в поле тяготения с учетом сил инерции // Известия ТПУ. 2008. №2. С. 59-61.
162. *Настасенко В.А.* Новое толкование постоянной Планка и закона сохранения импульса движения // Вестник Херсонского национального технического университета. 2012. №2 (45). С. 16-20.
163. *Невдах В.В.* О выполнении закона сохранения энергии в теории упругих волн // Наука и техника. 2021. №2. С. 161-167.
164. *Никонов О.А.* Диалектика принципа соответствия и математический аппарат специальной теории относительности // Вестник МГТУ. 2013. №2. С. 344-349.
165. *Носов М.А., Колесов С.В., Нурисламова Г.Н., Большакова А.В., Семенцов К.А., Карпов В.А.* Роль силы Кориолиса в динамике волн, возбуждаемых в океане глубоководными землетрясениями // ЖВТ. 2019. №1. С. 73-85.
166. *Павлечко В.Н., Протасов С.К.* К вопросу о теоретическом давлении радиального нагнетателя с учетом силы Кориолиса // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия В. Промышленность. Прикладные науки. 2014. №11. С. 81-84.
167. *Пивоваров В.Г., Никонов О.А.* Методологические аспекты вывода преобразований Лоренца при выборе стандартов длины и времени // Вестник МГТУ. 1999. №1. С. 119-124.
168. *Пивоваров В.Г., Пивоваров В.В.* Вывод преобразований Лоренца без использования постулата о постоянстве скорости света // Вестник МГТУ. 2002. №2. С. 281-292.
169. *Плясовских А.П.* О наглядном геометрическом представлении движения материальной точки в пространстве и времени на примере воздушного движения // Crede Experto: транспорт, общество, образование, язык. 2021. №1. С. 6-29.
170. *Подберезкин С. М.* Обобщенные преобразования Лоренца // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. 1996. №4. С. 106-124.
171. *Подберезкин С.М.* Анализ обобщенных преобразований Лоренца // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. 2001. №12. С. 157-164.
172. *Поддубный Н.В.* Философская интерпретация природы внутренней взаимосвязи трех законов механики Ньютона // Наука. Искусство. Культура. 2022. №2 (34). С. 154-165.
173. *Полищук Р.Ф.* Каноническая связность и законы сохранения в гравитации // Краткие сообщения по физике ФИАН. 2014. №7. С. 8-19.
174. *Похмельных Л.А.* Физика близкодействия. Базовые соотношения // Вестник науки и образования. 2021. №13-1 (116). С. 6-22.
175. *Романенко В.А.* Преобразования Лоренца в вертикальной гиперплоскости // Проблемы Науки. 2019. №3 (136). С. 5-20.
176. *Романов В.А., Бескачко В.П.* Идентификация гироскопических сил в колебательной системе расходомера Кориолиса // Вестник ПНИПУ. Механика. 2021. №3. С. 129-140.

177. Рындин В.В. Вывод уравнения первого закона термодинамики на основе законов и механики Ньютона и статистической физики // Наука и техника Казахстана. 2005. №2. С. 114-122.
178. Рысин А., Бойкачёв В., Никифоров И. Вывод силы Лоренца, усовершенствованных уравнений максвелла, констант электрической и магнитной проницаемостей из преобразований Лоренца // EESJ. 2016. №6. С. 15-157.
179. Рысин А., Бойкачёв В., Никифоров И. Сила Кориолиса как результат выполнения СТО И ОТО Эйнштейна // EESJ. 2015. №3. С. 113-118.
180. Рысин А.В., Рысин О.В., Бойкачев В.Н., Никифоров И.К. Парадокс связи электромагнитного поля с преобразованиями Лоренца и вывод силы Лоренца из уравнений Максвелла // Sciences of Europe. 2017. №22-1 (22). С. 52-61.
181. Рысин А.В., Рысин О.В., Бойкачев В.Н., Никифоров И.К. Уравнения Максвелла, как результат отражения преобразований Лоренца-Минковского в противоположности // Sciences of Europe. 2016. №8-1 (8). С. 104-113.
182. Салин А.А., Гришин Н.С., Поникаров С.И. Действие сил Кориолиса на радиальные потоки в центробежных экстракторах // Вестник Казанского технологического университета. 2014. №7. С. 228-231.
183. Салосин Е.Г. Замена преобразований Лоренца // Глобус. 2022. №1 (66). С. 36-40.
184. Сафиуллин Р.К. Движение и силы в неинерциальных системах отсчета. Влияние силы Кориолиса на климат Земли // Известия КазГАСУ. 2014. №1 (27). С. 253-260.
185. Си Дж С. Мезомеханика взаимодействия энергии и массы в диссипативных системах // Физ. мезомех. 2010. №5. С. 27-40.
186. Смирнов В.Ф., Зябликов В.М. Корпускулярно-волновой дуализм дискретных динамических систем // Инженерный журнал: наука и инновации. 2013. №12 (24). С. 15.
187. Смык А.Ф. Поиск Луи де Бройлем физического смысла корпускулярно-волнового дуализма // Discrete and Continuous Models and Applied Computational Science. 2013. №2. С. 114-124.
188. Страданченко С.Г., Прокопов А.Ю., Басакевич С.В., Курнаков В.А. Оценка влияния силы Кориолиса на подъемный сосуд и жесткую армировку вертикального ствола в зависимости от кинематики подъема // Известия ТулГУ. Естественные науки. 2009. №3. С. 317-325.
189. Сумачев Ю.Н. Закон всемирного тяготения и гравитационная постоянная: уточнение понятий. Предложения // Инновационная наука. 2021. №8-1. С. 12-15.
190. Сумачев Ю.Н. Эфирный ветер: куда и откуда дует // Инновационная наука. 2022. №10-2. С. 6-10.
191. Сучилин В.А. Об использовании преобразований Лоренца в задачах математической физики // Проблемы науки. 2018. №12 (36). С. 18-21.
192. Таранников Ю.В. О рангах подмножеств пространства двоичных векторов, допускающих встраивание системы Штейнера $s(2, 4, v)$ // ПДМ. 2014. №1 (23). С. 73-76.
193. Терехин В.А. К особым свойствам земной гравитации // Евразийский научный журнал. 2020. №7. С. 29-31.
194. Трубицин Н.М. Доказательства корпускулярно-волнового дуализма света на примере биологических систем // Молодой исследователь Дона. 2020. №3 (24). С. 183-189.
195. Федоровский В.Е. О законе всемирного тяготения // Инновационная наука. 2021. №2. С. 18-23.
196. Федоткин А.Н. Уравнения Гамильтона в релятивистской механике классической материальной точки в приближении малых импульсов // Вестник МГУ. 2007. №3. С. 8-14.

197. Феоктистов В.В., Феоктистова О.П., Чернышева И.Н. Гаспар-Гюстав Кориолис и эйлеровы силы инерции // Машиностроение и компьютерные технологии. 2017. №6. С. 185-197.
198. Цапурин К.С., Цапурин Л.М. О возможности противодействия силам тяготения (гравитации) // Проблемы науки. 2018. №12 (36). С. 22-25.
199. Цыденов Б.О. Влияние силы Кориолиса и ветра на динамику осеннего термобара // Вестник Московского университета. Серия 3. Физика. Астрономия. 2019. №1. С. 64-68.
200. Червенчук В.Д. К вопросу о физическом смысле преобразований Лоренца // APRIORI. Серия: Естественные и технические науки. 2015. №2. С. 34.
201. Чеснокова К.В. Об отображении, сопоставляющем тройке точек банахова пространства их точку Штейнера // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2016. №2. С. 40-44.
202. Чуприков Н.Л. О совместимости корпускулярных и волновых свойств частицы в двухщелевом эксперименте // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. 2011. №2 (23). С. 235-242.
203. Ширяев О.Б. Математическое моделирование энергетических спектров, формирующихся при ускорении электронов релятивистски интенсивными гауссовскими и лаггеровскими лазерными импульсами // Автоматизация и моделирование в проектировании и управлении. 2021. №1 (11). С. 4-12.
204. Эткин В.А. Альтернатива закону тяготения Ньютона // Проблемы науки. 2020. №6 (54). С. 6-13.
205. Яловенко С. Н. Законы Кеплера. // Colloquium-journal. 2020. №5 (57). С. 36-48.
206. Яловенко С.Н. Выведение закона гравитации // Цифровая наука. 2021. №3. С. 59-79.
207. Яловенко С.Н. Вывод закона всемирного тяготения из закона сохранения энергии // Colloquium-journal. 2019. №18 (42). С. 15-26.
208. Яловенко С.Н. Закон гравитации. Физика времени. Атом // Евразийский Союз Ученых. 2017. №9-1 (42). С. 52-67.
209. Яловенко С.Н. Расширенная теория относительности, гравитация и время // Кронос: естественные и технические науки. 2019. №3 (25). С. 41-49.
210. Carati D., Ponomarev M. G. Statistical description of currents induced by two electron cyclotron counter-propagating waves // ELECTRON CYCLOTRON EMISSION AND ELECTRON CYCLOTRON HEATING. Proceedings of the 12th Joint Workshop. Held 13-16 May 2002 in Aix-en-Provence, France. Edited by Gerardo Giruzzi (Association Euratom-CEA sur la Fusion, France) . Published by World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2003. ISBN #9789812705082, pp. 77-82
211. Gun'ko, Yu.F., Ponomarev, M.G. The charged particles emission in a magnetic field // Vestnik Sankt-Peterburgskogo Universiteta. Ser 1. Matematika Mekhanika Astronomiya. 1993. n2. 89-94.
212. Gun'ko, Yu.F., Ponomarev, M.G. The charged particle layer expansion in a magnetic field // Vestnik Sankt-Peterburgskogo Universiteta. Ser 1. Matematika Mekhanika Astronomiya. 1995. n4. 105-108.
213. Gun'ko, Yu.F., Ponomarev, M.G. The charged particle distribution due to emission in a magnetic field // Astronomische Nachrichten. 1995. 316. 1. 17-21.
214. A case for new statistical software testing models / May, J.; Ponomarev, M.; Kuball, S.; Gallardo, J. // 2006 Annual Reliability and Maintainability Symposium, RAMS'06; Newport Beach, CA; United States; 23 January 2006 through 26 January 2006; Category number CH3744; Code 69734, Proceedings - Annual Reliability and Maintainability Symposium, Article number 1677399, 349-353. DOI: 10.1109/RAMS.2006.1677399

215. Ponomarev M., Johanning L., Parish D., Enhancing precision and reliability of tri-axial load cells for mooring load measurements // Proc. of the 3rd International Conference on Ocean Energy. 6 October. 2010. (ICOE2010). ISBN 978-84-693-5467-4.
216. Ponomarev M. A novel physical model to enhance precision and performance of 3-dimensional force sensors // Processes in Geomedia 2022. No2(32). p.1589-1600.
217. Ponomarev M. Experimental validation of novel physical model for improvement of sensing 3-dimensional fluid flow loads and responses in real sea conditions with South Western Mooring Test Facility (SWMTF) // Processes in Geomedia 2022. No2(32). 1579-1589.
218. Ponomarev M. A Novel Physical Model to Enhance Precision and Performance of Multidimensional Force Sensors // Physical and Mathematical Modeling of Earth and Environment Processes – 2022, Proceedings of 8th International Scientific Conference-School, Springer, 347-364, ISBN 978-3-031-25961-6
219. Ponomarev M., Johanning L., Parish D., Experimental validation of novel physical model for improvement of sensing multidimensional fluid flow loads and responses in real sea conditions with South Western Mooring Test Facility // Physical and Mathematical Modeling of Earth and Environment Processes – 2022, Proceedings of 8th International Scientific Conference-School, Springer, 365–376, ISBN 978-3-031-25961-6
220. Digital radiographic inspection technique for production friendly quality assessment of PM parts / Ponomarev M.G., Kappatos V., Selcuk C., Gan T.-H., Amos M., Halai H., Gierl C., Iovea M. // Powder Metallurgy. 2013. 56. 2. 92-95.
221. PM Dimensional Control: Development of a Digital Radiographic Inspection Technique for Production Friendly Quality Assessment of Powder Metallurgy Parts / M. G. Ponomarev, V. Kappatos, C. Selcuk, T.-H. Gan, M. Amos, H. Halai, C. Gierl, M. Iovea // Proceedings of the International Euro Powder Metallurgy Congress and Exhibition. Euro PM 2012. 2012. Volume 1. Basel. Switzerland. 16 September 2012 through 19 September 2012. Code 105676.
222. Ponomarev M.G., Selcuk C., Gan T.-H. Construction of pattern recognition system optimized for X-ray inspection of plastic electronics and OLED displays // 51st Annual Conference of the British Institute of Non-Destructive Testing 2012. NDT 2012. BINDT 2012. Northamptonshire. United Kingdom. 11 September 2012 through 13 September 2012. Code 107048. pp. 354 - 360.
223. Defect detection and classification system for automatic analysis of digital radiography images of PM parts / M. G. Ponomarev, C. Selcuk, T.-H. Gan, M. Amos, I. Nicholson, M. Iovea, M. Neagu, B. Stefanescu, G. Mateiasi // Powder Metallurgy. 2014. 57. 1. 17-20.
224. Non Destructive Testing: A Defect Detection and Classification System for Automatic Analysis of Digital Radiography Images of Powder Metallurgy Parts / M. G. Ponomarev, C. Selcuk, T.-H. Gan, M. Amos, I. Nicholson, M. Iovea, M. Neagu, B. Stefanescu, G. Mateiasi // International Powder Metallurgy Congress and Exhibition. Euro PM 2013. Gothenburg. Sweden. 15 September 2013 through 18 September 2013. Code 110976.
225. Preliminary NDT investigation of sintered powder metallurgy parts by high-resolution TDI based X-ray digital radiography / M. Iovea, M. Neagu, B. Stefanescu, G. Mateiasi, H. Halai, M. Amos, M. Ponomarev, V. Kappatos, C. Selcuk, T.-H. Gan, C. Gierl // 2012. Volume 1. European International Powder Metallurgy Congress and Exhibition. Euro PM 2012. Basel. Switzerland. 16 September 2012 through 19 September 2012. Code 105676.
226. PM parts fast in-line X-ray digital radiography / M. Iovea, M. Neagu, B. Stefanescu, G. Mateiasi, A. Clarke, I. Nicholson, M. Ponomarev, V. Kappatos, C. Selcuk, T.-H. Gan // International Powder Metallurgy Congress and Exhibition. Euro PM 2013. European PM Conference Proceedings.1. 2013. European Powder Metallurgy Association (EPMA).

227. A molecular dynamics study of a 5 keV C60 fullerene impact on a two-component organic molecular sample / Ponomarev M.G., Garrison B.J., Vickerman J.C., Webb R.P. // *Surface and Interface Analysis*. Wiley Online Library. 2011. 43. 1-2. 107-111.
228. Ponomarjov M. G. Imaginary-emission method for modeling disturbances of all magnetoplasma species: Reflecting and absorbing objects in motion through a rarefied plasma at different angles to the ambient magnetic field // *Physical Review E*. 1996. 54. 5. 5591-5598.
229. Ponomarjov M. G. Disturbances of the ambient magnetoplasma due to its interactions with object surfaces. Imaginary emission method. Far-wake of objects moving through a rarefied plasma at different angles to the ambient magnetic field // *Planetary and Space Science*. 1995. 43. 10-11. 1419-1427.
230. Ponomarjov M. G. Space flows and disturbances due to bodies in motion through the magnetoplasma // *Astrophysics and Space Science*. 2000. 274. 1. 423-429.
231. Ponomarjov M. G. Pressure of charged particle flows in ambient magnetic fields // *Astronomische Nachrichten*. 1997. 318. 3. 187-192.
232. Ponomarjov M. G. 3D time-dependent kinetic simulation of space plasma disturbances due to moving bodies with the ambient magnetic field effect // *Advances in Space Research*. 2002. 29. 9. 1397-1402.
233. Ponomarjov M. G., Gunko Y. F. Kinetic modeling of charged particle cloud expansion and emission in magnetic and electric fields // *Planetary and Space Science*. 1995. 43. 10-11. 1409-1418.
234. Ponomarjov M. G. Acceleration and transport of particles in collisionless plasmas: Wakes due to the interaction with moving bodies // *Astrophysics and Space Science*. 2001. 277. 1. 39-44.
235. Ponomarjov M. G. Outer atmosphere and wake of space objects, kinetic simulation. Disturbances of ambient magnetoplasma due to diffuse reflecting bodies in motion // *APS Division of Plasma Physics Meeting Abstracts*. 1998. abstract id. U9Q.09.
236. Ponomarjov M. G. Simulation of oscillations in charged particle systems under the ambient magnetic field control // 2nd International Conference. Control of Oscillations and Chaos (COC 2000). St. Petersburg, Russia. 5 July 2000 through 7 July 2000. Code 57512. Proceedings (Cat. No.00TH8521), 2000, vol.1. pp. 167-170. doi: 10.1109/COC.2000.873548.
237. Ponomarjov M. G. 3D Collisional Kinetic Simulation of Stratifications and Flute Structures of Plasma Flows and Wakes in External Magnetic Fields // *AAS, DPS Meeting*. No 32. id.15.10. 2000. Bulletin of the American Astronomical Society. Vol. 32, p.1022.
238. Ponomarjov M. G., Carati D. Enhanced acceleration of electrons populations by crossing electron cyclotron waves in an ambient magnetic field, Resonant Moments method // *Advances in Space Research*. 2006. Volume 38. Issue 8. 1576-1581.
239. Ponomarjov M. G. Outer atmosphere and wake of space objects, kinetic simulation. Disturbances of ambient magnetoplasma due to diffuse reflecting bodies in motion // *American Physical Society, Division of Plasma Physics Meeting*, November 16-20, 1998 New Orleans, LA abstract id. U9Q.09.
240. Ponomarjov M. G. 3D Kinetic Dynamical models of Ionized HII Clouds in External Magnetic Field // *Ionized Gaseous Nebulae*. 2000. Mexico City. November 21- 24. meeting abstract id. 44.
241. Ponomarjov M. G. Kinetic simulation of stratifications and flute structures of charged particle jets and wakes in the ambient magnetic field // *Bulletin of the Astronomical Society*. 1999. Vol. 31. No. 4. p. 1157. id.53.12.
242. Ponomarjov M. G. 3D Collisional Kinetic Simulation of Stratifications and Flute Structures of Plasma Flows and Wakes in External Magnetic Fields // 32nd Annual Meeting of the Division for

- Planetary Sciences. 23-27 October 2000. Pasadena. California. USA. Session 15. Outer Planets IV-Aurorae and Magnetospheres. 2000/10/24. Abstract 15.10. 1022.
243. Ponomarjov M. G. Kinetic Simulation of Magnetic Field Effects on Stratifications and Flute Structures of Space Plasma Flows and Wakes of Bodies // 2001 Joint Assembly American Geophysical Union Spring Meeting. Boston. Massachusetts. USA. Abstracts. 2001. SM52B-04.
244. Ponomarjov M. G., Carati D. Search for optimal 3D wave launching configurations for the acceleration of charged particles in a magnetized plasma: Resonant Moments Method // American Physical Society. 46th Annual Meeting of the Division of Plasma Physics. 15-19 November. 2004. Savannah. GA. MEETING ID: DPP04. abstract id. RP1.042.
245. Ponomarjov M. G. New Ways of Protecting Astronomical Equipment and Solar Batteries of Spacecrafts // American Astronomical Society, DPS meeting No 29, id.27.02. Bulletin of the American Astronomical Society. 1997. Vol. 29. p.1023.
246. Ponomarjov M. G., Carati D. Acceleration of charged particles by crossed cyclotron waves, Resonant Moments Method // 35th COSPAR Scientific Assembly. 18 - 25 July 2004. Paris. France. p.2851.
247. Ponomarjov M. G., Carati D. Kinetic Simulations of Relativistic Electron Flows in Time-Dependent Electromagnetic Fields // Electron Cyclotron Emission and Electron Cyclotron Heating. Conference Proc. World Scientific Publishing Co Pte Ltd. 2003. 137-142.
248. Ponomarjov M. G. Kinetic simulation of magnetic field effects on wakes of meteoroids imaginary emission method // European Space Agency, (Special Publication) ESA SP. 2001. 495. 295-300.
249. Ponomarjov M. G., Carati D. Search for optimal 2D and 3D wave launching configurations for the largest acceleration of charged particles in a magnetized plasma, Resonant Moments Method // arXiv 2004. <https://arxiv.org/format/physics/0411075> arXiv:physics/0411075 [physics.plasm-ph]
250. Ponomarjov M. G. 3D time-dependent kinetic simulation of turbulent plasma flows under the effect of external magnetic field // American Physical Society. 42nd Annual Meeting of the APS Division of Plasma Physics combined with the 10th International Congress on Plasma Physics October 23 – 27. 2000 Québec City. Canada Meeting ID: DPP00. abstract id. NO1.007. <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2000APS..DPPNO1007P/abstract>
251. Ponomarjov M. G. Kinetic modeling magnetic field effect on ion flows, disturbances and wakes in space plasma // Space plasma simulation: proceedings of the Sixth International School/Symposium. ISSS-6. Garching. Germany. 3-7 September. 2001. Edited by J. Büchner, C.T. Dum, and M. Scholer. Berlin: Schaltungsdienst Lange o.H.G. 2001. p.328.
252. Ponomarjov M. G., Carati D. Acceleration of electron populations by crossing EC waves in an external magnetic field // 13th Joint Workshop on Electron Cyclotron Emission and Electron Cyclotron Resonance Heating. Nizhny Novgorod. Russia. 2004. Conference paper <https://ec13.iap-ras.ru/papers/Ponomarjov.pdf>
253. Ponomarjov M. G., Carati D. Enhanced acceleration of charged particles by crossing electromagnetic waves in a magnetized plasma, resonant moments method // 2004. fhal-00001926v1f. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00001926v1>
254. Webb R. P., Ponomarev M. Molecular dynamics simulation of low energy cluster impacts on carbon nanotubes // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms. 2007. 255. 1. 229-232.

Интернет-источники:

255. *Абрамов А.* Навыки будущего: что нужно знать и уметь в XXI веке [Электронный ресурс]. – 30.09.2020 // РБК. Тренды. Образование. – ULR: <https://trends.rbc.ru/trends/education/5e728cbc9a79476476f6eb4e> (дата обращения: 01.02.2023)
256. *Волкова Г.Л., Шматко Н.А.* Наиболее востребованные STEM-профессии и компетенции [Электронный ресурс]. – 25.08.2021 // Институт статистических исследований и экономики знаний. – ULR: <https://issek.hse.ru/news/499130554.html> (дата обращения: 15.12.2022)
257. 200 законов мироздания – физика [Электронный ресурс] // Элементы. – ULR: <https://elementy.ru/> (дата обращения: 05.02.2023)
258. *Яковлев И.В.* Корпускулярно-волновой дуализм // Портал «Mathus». – ULR: <https://mathus.ru/phys/duality.pdf> (дата обращения: 15.12.2022).

Пономарев Максим Глебович

Физические основы механики. Часть 1. «Ньютонова механика»

Учебное пособие издано в авторской редакции

Сетевое издание

Ответственный за выпуск – Алимова Н.К.

Учебное издание

Системные требования:

операционная система Windows XP или новее, macOS 10.12 или новее, Linux.

Программное обеспечение для чтения файлов PDF.

Объем данных 5 Мб

Принято к публикации «17» апреля 2023 года

Режим доступа: <https://izd-mn.com/PDF/22MNNPU23.pdf> свободный. – Загл. с экрана. –
Яз. рус., англ.

ООО «Издательство «Мир науки»

«Publishing company «World of science», LLC

Адрес:

Юридический адрес — 127055, г. Москва, пер. Порядковый, д. 21, офис 401.

Почтовый адрес — 127055, г. Москва, пер. Порядковый, д. 21, офис 401.

<https://izd-mn.com/>

**ДАННОЕ ИЗДАНИЕ ПРЕДНАЗНАЧЕНО ИСКЛЮЧИТЕЛЬНО ДЛЯ ПУБЛИКАЦИИ НА
ЭЛЕКТРОННЫХ НОСИТЕЛЯХ**